Prova scritta di Analisi Matematica 3 e Analisi Matematica 2 (10 CFU)

Esercizio 1. (5 punti)
Sia $f(x, y, z) = 3z + x \sin(x - 2y)$.

a) Determinare la direzione di massima crescita e la massima crescita in corrispondenza del punto $(0, 0, 2)$.
b) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(0, 0, 2)$ relativamente alla direzione $\lambda = (1/2, 0, \sqrt{3}/2)$.
c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente alla superficie di livello di f passante per il punto $(0, 0, 2)$).
d) Scrivere lo sviluppo di Taylor di f attorno al punto $(0, 0, 2)$ sino al secondo ordine e con il resto di Peano.

Esercizio 2*. (6 punti)
Determinare, se esistono, gli estremi vincolati assoluti della funzione $f(x, y, z) = 2x+2y-z$ ristretta all'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2/4 = 1\}$.

Esercizio 3. (8 punti)
Sia dato $E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ |z| \leq \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \leq y \leq x\Big\}$, calcolare l'integrale

$$\iiint_E (8z - 3)\, dx\, dy\, dz.$$

Suggerimento: passare alle coordinate sferiche.

Esercizio 4. (5 punti)
Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\varphi(t) : \begin{cases} x = t^2 \\ y = -t^3 \\ z = t^4 \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

a) Stabilire se la curva è chiusa, verificare che è regolare a tratti e scrivere il versore tangente indotto da $\varphi(t)$.
b) Esprimere la lunghezza di γ mediante un integrale semplice (cioè di una variabile).
c) Calcolare il lavoro $\int_\gamma \big(\mathbf{F}, \mathbf{T}\big)\, ds$ dove $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, yx, zy)$.

vedi retro →

Esercizio 5*. (6 punti)
Siano dati il campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (ze^{x^2}, x, \sin(xz))$$

e la semisfera

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

orientata dal campo di versori normali "esterni" ν (cioè quelli con la terza componente non negativa). Calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S:

$$\iint_S \big(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \nu\big)\, d\sigma.$$

Suggerimento: per il calcolo finale ricordare che $\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2$.