Problema 1.

Sia $f : A \to B$ un'applicazione, e siano $S, T \subseteq A$. Si provi che

(1) $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

(2) $f(S) \setminus f(T) \subseteq f(S \setminus T)$

Problema 2.

Dimostrare la seguente affermazione: una funzione $f : X \to Y$ è suriettiva se e solo se $\forall\, T \subseteq X$ si ha che $Y \setminus f(T) \subseteq f(X \setminus T)$.

Problema 3.

Dimostrare per induzione che per ogni numero naturale n dispari, 3 divide $2^n + 1$

Problema 4.

- Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^4 = -1$$

- Utilizzando l'esercizio precedente scrivere il polinomio reale $x^4 + 1$ come prodotto di due polinomi reali di grado 2

Problema 5.

Si definisca la relazione R su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ come segue

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow (a, b) = (c, d) \quad \text{o} \quad a^2 + b^2 < c^2 + d^2.$$

Mostrare che $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, R)$ è un insieme parzialmente ordinato.

Problema 6.

Sia $a \in \mathbb{N}$ un numero naturale e si consideri il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv_4 a \\ ax \equiv_2 1 \end{cases}$$

Determinare per quali valori di a il sistema ammette soluzioni.