Problema 1.

Sia $f : X \to Y$ una funzione, e sia $\mathcal{F} \subseteq P(X)$. Si provi che

$$f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\right) \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{F}} f(A)$$

Problema 2.

Sia X un insieme non vuoto e sia Y un sottoinsime fissato di X. Definiamo un'applicazione $\varphi : P(X) \to P(X)$, ponendo, per ogni $A \in P(X) : \varphi(A) = A\Delta Y = (A \setminus Y) \cup (Y \setminus A) = (A\cup Y)\setminus(A\cap Y)$. Dimostrare che $\varphi^2 = \varphi\circ\varphi = \mathrm{Id}$. Dedurre, argomentando, che φ è biettiva. (si può utilizzare che la differenza simmetrica $A\Delta B$ gode della proprietà associativa).

Problema 3.

Dimostrare per induzione su $n \in \mathbb{N}^*$, che

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Problema 4.

Decomporre in $\mathbb{R}$ il seguente polinomio

$$x^4 + 1$$

Problema 5.

Sia $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 0\}$ e si definisca in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ la seguente relazione

$$(x, y)R(x', y') \quad\Leftrightarrow\quad xy' \leq x'y$$

Dimostrare che R definisce un pre-ordine. Dire se R definisce un ordine parziale.

Problema 6.

Determinare il più piccolo intero positivo k tale che il seguente sistema di congruenze ammetta soluzione

$$\begin{cases} x \equiv_5 7 \\ x \equiv_3 10 \\ x \equiv_{15} k \end{cases} .$$