

Problema 1.

Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione, e sia $\mathcal{F} \subseteq P(Y)$. Si provi che

$$f^{-1} \left(\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \right) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} f^{-1}(A)$$

Problema 2.

Sia $q_0 \in \mathbb{Q}, q_0 \neq 0$, e si consideri la funzione $f : \mathbb{Q} \setminus \{q_0\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ definita da, per ogni $x \in \mathbb{Q} \setminus \{q_0\}$, $f(x) = (x + q_0)/(x - q_0)$. Determinare per quali valori di q_0 la funzione f è biettiva e determinare, in tali casi, la sua inversa.

Problema 3.

Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, 9 divide $4^n + 15n - 1$.

Problema 4.

Decomporre in \mathbb{R} il seguente polinomio

$$x^4 + 16$$

Problema 5.

Sia X un insieme e siano R_1 e R_2 due relazioni di equivalenza su X . Dimostrare che $R_1 \cap R_2$ è una relazione di equivalenza.

Problema 6.

Determinare tutte le soluzioni intere del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 40x \equiv_3 16 \\ 20x \equiv_7 25 \end{cases}$$