1) Geometria analitica (5 punti)

Si considerino l'ellisse di centro C (-1; 0) e semiassi orizzontale *a* e verticale *b* di lunghezza pari a 2 e $\sqrt{3}$ rispettivamente, nonché la retta passante per i punti A(-2; 3) e B(2; -1).

Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra l'ellisse e la retta.

2) Studio di funzione: Concentrazione di un veleno nel sangue (12 punti)

La cubomedusa, conosciuta anche come box jellyfish, appartiene alla classe Cubozoa. Questi invertebrati sono noti per la loro forma a cubo e per il loro veleno estremamente potente. Si trovano principalmente nelle acque costiere dell'Australia settentrionale e del Sud-Est asiatico, preferendo acque calde e poco profonde dove possono cacciare le loro prede, principalmente piccoli pesci e crostacei. Il veleno della cubomedusa è uno dei più potenti nel regno animale. Alcune specie possono causare dolore estremo e sono spesso fatali per gli esseri umani, agendo rapidamente sul cuore, sul sistema nervoso e sulle cellule della pelle. Considerato da molti l'animale con il veleno più potente e letale, basta una concentrazione di 0.5 µg/L per uccidere un uomo adulto in 2/3 minuti.

Sia data la seguente funzione, che modellizza la concentrazione di veleno di cubomedusa (in µg/L) in funzione del tempo (in minuti):

$$C(t) = \frac{kt}{t^2 + 4}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Si ricavi dopo quanto tempo si raggiunge la concentrazione massima di veleno nel sangue. (2 punti)
b. Si adatti la funzione al caso considerato, calcolando il valore di *k* perché la concentrazione massima sia pari al valore letale per l'uomo (0.5 µg/L). (1 punto)
c. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione *C(t)*, tracciandone il grafico. (7 punti)
d. Ricavare (con uno studio per punti) dopo quanto tempo la concentrazione di veleno nel sangue raggiunge un valore di 10 volte inferiore a quello massimo. (2 punti)

3) Calcolo integrale: Epidemia (8 punti)

In un piccolo villaggio si sviluppa un'epidemia di una forma sconosciuta e particolarmente aggressiva di ebola che colpisce mortalmente l'intera popolazione del villaggio, costituito inizialmente da 200 unità. L'epidemia si diffonde con una velocità data dalla seguente funzione:

$$v(t) = -kt\, e^{-\frac{t^2}{k}}$$

Dove *k* è una costante positiva e non nulla che dipende dalla popolazione iniziale ed il tempo è dato in settimane.

a. Ricavare la costante *k*, facendo riferimento alle condizioni iniziali date (si assuma nulla la costante di integrazione *c*). (5 punti)
b. Dopo quanti giorni si stima che la malattia possa aver ucciso tutti gli abitanti? (3 punti)

4) Statistica: Piante di mirtillo (5 punti)

Il mirtillo è una pianta del genere Vaccinium, appartenente alla famiglia delle Ericacee. Esistono diverse specie di mirtilli, ma la più comune a livello commerciale è il mirtillo americano, noto anche come mirtillo alto. Queste piante possono raggiungere un'altezza compresa tra 1,5 e 4 metri e producono frutti di colore blu scuro o nero. Le piante di mirtillo iniziano generalmente a produrre frutti a partire dal terzo anno di vita, con una produzione più abbondante a partire dal quarto o quinto anno. Per quanto riguarda la loro longevità, le piante di mirtillo possono vivere e produrre frutti per un periodo che va dai 10 ai 20 anni, a seconda delle condizioni di crescita e delle pratiche di manutenzione.

Vengono prese a campione 5 piante di mirtillo, delle quali vengono contati i frutti prodotti, in modo da valutare se esista una correlazione tra l'età della pianta ed il numero di frutti prodotti:

Pianta	1	2	3	4	5
Età	5	6	5	7	6
Numero di mirtilli	641	598	701	655	717

Effettuare un'analisi statistica della popolazione, verificando il tipo di correlazione tra l'età delle piante ed il numero di mirtilli prodotti.

SOLUZIONI

1) GEOMETRIA ANALITICA

DATI

$$x_C = -1 \quad y_C = 0 \qquad a = 2 \rightarrow a^2 = 4 \quad b = \sqrt{3} \rightarrow \ b^2 = 3$$

$$x_A = -2 \quad y_A = 3 \qquad x_B = 2 \quad y_B = -1$$

SOLUZIONE

Equazione dell'ellisse:

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2} + \frac{(y-y_C)^2}{b^2} = 1 \ \rightarrow \ 3x^2 + 4y^2 + 6y - 9 = 0$$

Equazione della retta:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \ y = -x + 1$$

I punti di intersezione si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 + 6y - 9 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$7x^2 - 2x - 5 = 0$$

Con soluzioni:

$$\begin{cases} x_{P1} = 1 \\ x_{P2} = -\dfrac{5}{7} \end{cases}$$

Da cui, sostituendo in $y_P = -x_P + 1$ e, perciò, facendo attenzione a cambiare di segno x_P:

$$\begin{cases} y_{P1} = 0 \\ y_{P2} = \dfrac{12}{7} \end{cases}$$

Infine, si ottiene

$$\mathrm{P}_1(1;\ 0)\ ,\mathrm{P}_2\left(-\frac{5}{7};\ \frac{12}{7}\right)$$

2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$C(t) = \frac{kt}{t^2+4} \qquad C_{Max} = 0.5\ \frac{\mu g}{l} \qquad C_s = \frac{C_{Max}}{10} = 0.05\ \frac{\mu g}{l}$$

a)

Il valore massimo della funzione si ottiene laddove la derivata prima si annulla:

$$C'(t) = k\frac{t^2+4-t(2t)}{(t^2+4)^2}$$

$$\boldsymbol{C'(t) = k\frac{4-t^2}{(t^2+4)^2}}$$

La funzione fratta si annulla quando il numeratore si annulla, perciò, ricordando che il tempo è una variabile necessariamente positiva:

$$C'(t) = 0 \ \rightarrow\ 4-{t_M}^2 = 0 \ \rightarrow\ (2+t_M)(2-t_M) = 0 \ \rightarrow\ t_M = 2\ min$$

b)

Il valore di *k* si ottiene imponendo nella funzione *C (t)* la condizione per cui per *t = 2* si ha $C = C_{MAX}$:

$$C(t=2) = k\frac{2}{4+4} \ \rightarrow\ k\frac{2}{4+4} = 0.5 \ \rightarrow\ 2k = 4 \ \rightarrow\ k = 2$$

c)

Lo studio della funzione *C(t)* dev'essere fatto in considerazione del fatto che sia la variabile indipendente *t* che quella dipendente *C* corrispondano a grandezze fisiche positive. Perciò, il grafico della funzione ed i valori ad esso associati interesseranno solo il primo quadrante (ove ascissa ed ordinata sono entrambe positive). Queste considerazioni permettono delle semplificazioni nello studio di funzione, andando ad escludere tutto ciò che riguarda le regioni di spazio esterne al primo quadrante stesso.

$$C(t) = \frac{2\,t}{t^2+4}$$

- Dominio:

$$t^2+4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad D: \forall t \in R \quad (t \geq 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ascisse:

$$C(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2\,t}{t^2+4} = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0;0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ordinate:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad C(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0;0)$$

- Studio del segno:

$$C(t) > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2\,t}{t^2+4} > 0$$

$N(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0$

$D(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t^2 + 4 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$C(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0$$

- Comportamento asintotico:

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Utilizzando il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{2\,t}{t^2+4} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{2t} = 0^+$$

- Studio della derivata prima ed estremi relativi:

$$C'(t) = 2\frac{4-t^2}{(t^2+4)^2} = 2\frac{(2+t)(2-t)}{(t^2+4)^2}$$

$C'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad (2+t)(2-t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2$

$C(t=2) = 0.5 \quad \rightarrow \quad M(2; 0.5)$

$$C'(t) > 0$$

$(2+t)(2-t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 2$

$(t^2+4)^2 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$C'(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 2$$

- Studio della derivata seconda e punti di flesso:

$$C''(t) = \frac{-2t\,(t^2+4)^{\cancel{2}} - 2\,\cancel{(t^2+4)} \cdot 2t(4-t^2)}{(t^2+4)^{\cancel{4}\,3}} = -2t\frac{12-t^2}{(t^2+4)^3}$$

$$\boldsymbol{C''(t) = -2t\frac{12-t^2}{(t^2+4)^3}}$$

$C''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0\,;\ 12 - t^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46\,min$

$$C(t = 2\sqrt{3}) \approx 0.433\,\frac{\mu g}{l}$$

$$F_1(0;0) \qquad F_1(3.46;0.433)$$

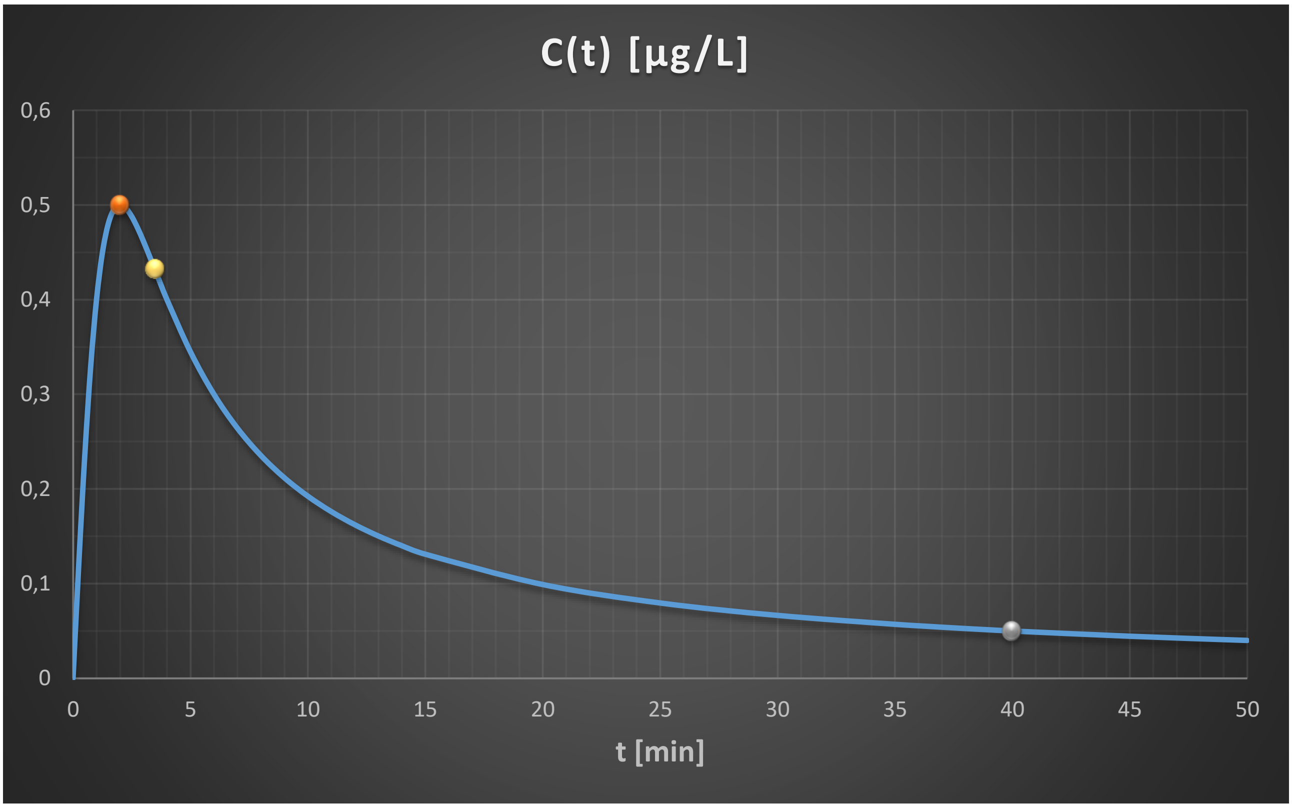
$$C''(t) > 0$$

$-2t > 0 \quad \rightarrow \quad t < 0$

$12 - t^2 > 0 \quad \rightarrow \quad -2\sqrt{3} < t < 2\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad 0 < t < 2\sqrt{3}$

$(t^2 + 4)^3 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$C''(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 2\sqrt{3}$$



d)

Di seguito, viene riportata la tabella relativa allo studio della funzione per punti. La concentrazione raggiunge il valore di 0.05 µg/l dopo 40 minuti.

t [min]	C(t) [µg/l]
0	0
0.25	0.123
0.5	0.235
0.75	0.329
1	0.400
1.25	0.449
1.5	0.480
1.75	0.496
2	0.500
2.25	0.497
2.5	0.488
2.75	0.476
3	0.462
3.25	0.446
3.46	0.433
3.5	0.431
3.75	0.415
4	0.400
5	0.345
6	0.300
7	0.264
8	0.235
9	0.212
10	0.192
11	0.176
12	0.162
13	0.150
14	0.140
15	0.131
20	0.099
25	0.079
30	0.066
35	0.057
36	0.055
37	0.054
38	0.052
39	0.051
40	0.050
45	0.044
50	0.040

3) INTEGRALE

DATI

$$v(t) = -kt\, e^{-t^2/k} \qquad N_0 = 200$$

a)

La funzione *N(t)* si ottiene dall'integrale indefinito di *V(t)* (con costante d'integrazione *c=0)* :

$$N(t) = -k\int t\, e^{-t^2/k}\, dt = -k\left(-\frac{k}{2}\right)\int\left(-\frac{2}{k}\right) t\, e^{-t^2/k}\, dt = \frac{k^2}{2} e^{-t^2/k}$$

$$N_0 = N(t=0) \quad \rightarrow \quad \frac{k^2}{2} = 200 \quad \rightarrow \quad k = 20$$

b)

Bisogna calcolare il tempo al quale il numero di abitanti scende sotto il valore soglia finale di 1, imponendo quindi $N_f = 1$:

$$N(t) = 200\, e^{-t^2/20}$$

$$N(t_x) = 200\, e^{-{t_x}^2/20} = 1$$

$$e^{-{t_x}^2/20} = \frac{1}{200} \quad \rightarrow \quad e^{{t_x}^2/20} = 200 \quad \rightarrow \quad \frac{{t_x}^2}{20} = \ln 200 \quad \rightarrow \quad {t_x}^2 = 20\ \ln 200$$

$$t_x = 10.294\ settimane = 72\ giorni$$

4) STATISTICA

Avendo un numero limitato di piante (N = 5) e, quindi, di campioni, si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

	Media	Varianza campionaria S_x^2, S_y^2	Dev Std campionaria S_x , S_y
Età	5.8	0.7	0.837
Numero di mirtilli	662.4	2282.8	47.779

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N - 1} = -6.15$$

$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = -0.15$$

La correlazione è quindi di natura debole e le grandezze sono inversamente correlate.