

ANALISI MATEMATICA 1 (150 minuti)
20 gennaio 2025

1. Data la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|-1}\right)$
 - a) Calcolare il campo di esistenza e studiare il comportamento agli estremi del campo,
 - b) Calcolare la derivata prima e classificare gli eventuali punti stazionari ed eventuali punti di non derivabilità,
 - c) disegnare il grafico,
2. Definizione di funzione continua in un punto. Dire per quali valori di k è continua la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x) & x > 0 \\ k - \cos x & x \leq 0. \end{cases}$$

3. Enunciare il criterio di Leibniz per le serie numeriche. Utilizzandolo dire se converge la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}.$$

Dire inoltre se la serie data converge assolutamente motivando la risposta.

4. Svolgere a piacere uno dei due esercizi:
 - a) Definizione di successione infinita e confronto tra infiniti. Utilizzando il principio di sostituzione tra infiniti calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + n^2) + 3n^2 + \sqrt{n^2 + 1} + \sin n}{e^n + \ln n + n^e}$$

- b) Enunciare la formula di Mac Laurin all'ordine n con resto di Peano per una funzione $f(x)$ (scrivere le ipotesi di validità e le proprietà del polinomio approssimante). Scrivere il polinomio di Mac Laurin di grado 2 che approssima la funzione: $f(x) = e^{-x} + e^{2x}$.

ANALISI MATEMATICA 1 (150 minuti)
19 settembre 2024

1. Data la funzione $f(x) = |x - 1|e^x$ disegnare il grafico illustrando i passaggi fondamentali.
2. Data la serie geometrica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\sin x)^n,$$

studiarne il carattere al variare di $x \in \mathbb{R}$. Dove possibile calcolarne la somma.

3. Enunciare la formula di Mac-Laurin per una funzione $f(x)$. Utilizzandola calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \ln(1 + x^2)}{e^x - \cos x}$$

4. Definizione di funzione continua in un punto e punti di discontinuità. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente funzione $g(x)$ è continua in $x = 1$:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se } x \geq 1 \\ \alpha x + 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

ANALISI MATEMATICA 1 (150 minuti)
12 luglio 2024

1. Data la funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$ disegnare il grafico illustrando i passaggi fondamentali (campo di esistenza, comportamento agli estremi, eventuali punti di discontinuità, derivata prima, crescita e decrescita, etc).
2. Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle e illustrare il significato geometrico. Dire se è applicabile il Teorema di Rolle alla funzione $y = \arctan |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Motivare la risposta.

3. Definizione di successione infinitesima e ordine di infinitesimo. Utilizzando tale definizione calcolare l'ordine di infinitesimo della successione $a_n = \sin \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$

4. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}.$$

Studiare la convergenza semplice e assoluta, motivare la risposta.

ANALISI MATEMATICA 1 (150 minuti)

18 giugno 2024

1. Data la funzione $f(x) = |x - 2|e^x$
- a) Calcolare il campo di esistenza e studiare il comportamento agli estremi del campo,
 - b) Calcolare la derivata prima e classificare i punti stazionari e i punti di non derivabilità,
 - c) disegnare il grafico,
2. Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange e illustrare il significato geometrico. Dire se è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione $y = |x - 2|e^x$ nell'intervallo $[0, 3]$.

3. Definizione di limite di successione. Calcolare il limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n) + \sin n + 2n^2}{n - 1 + \sqrt{n^4 + 1}}$$

4. Enunciare il criterio di Leibniz per le serie numeriche. Utilizzandolo dire se converge la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{e^n}.$$

Dire inoltre se la serie data converge assolutamente motivando la risposta.

ANALISI MATEMATICA 1 (150 minuti)

27 febbraio 2024

1. Data la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}$ disegnare il grafico illustrando i passaggi fondamentali.
2. Enunciare la formula di Mac-Laurin per una funzione $f(x)$. Utilizzandola calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - x \ln(1+x)}{\cos x - e^x}$$

3. Data la serie geometrica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (1 + \ln x)^n,$$

studiarne il carattere al variare di $x \in \mathbb{R}$. Dove possibile calcolarne la somma.

4. Definizione di funzione continua in un punto e punti di discontinuità. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente funzione $g(x)$ è continua in $x = 1$:

$$g(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 2 & \text{se } x \geq 1 \\ \alpha x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

ANALISI MATEMATICA 1 (150 minuti)
2 febbraio 2024

1. Data la funzione $f(x) = x\sqrt[3]{\ln x}$
 - a) Calcolare il campo di esistenza e studiare il comportamento agli estremi del campo,
 - b) Calcolare la derivata prima e classificare i punti stazionari e i punti di non derivabilità,
 - c) disegnare il grafico.
2. Definizione di massimo e minimo relativi e massimo e minimo assoluti per una funzione $f(x)$. Enunciare il teorema di Fermat. Dire se la funzione $f(x) = e^{-|x-1|}$
 - a) soddisfa il teorema di Fermat in $x = 1$,

- b) trovare il massimo assoluto e minimo assoluto di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 3]$.
3. Definizione di serie numerica assolutamente convergente. Studiare il carattere della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} (x^2 - 1)^n.$$

4. Svolgere a piacere solo uno dei due quesiti
- a) Enunciare le ipotesi di validità della formula di Mac-Laurin. Scrivere il polinomio di Mac-Laurin di grado 3 che approssima la funzione $f(x) = x \cos(2x)$. Scrivere inoltre il resto nella forma di Lagrange.
- b) Definizione di successione infinita. Illustrare il confronto tra infiniti. Utilizzando il confronto tra infiniti calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + \ln n^2 + n!}{\sqrt{n} + 3n^3 + \ln n^4}$$

ANALISI MATEMATICA 1 (150 minuti)
18 gennaio 2024

1. Data la funzione $f(x) = e^{-x} \sqrt[3]{x-1}$
- a) Calcolare il campo di esistenza e studiare il comportamento agli estremi del campo,
- b) Calcolare la derivata prima e classificare i punti stazionari e i punti di non derivabilità,
- c) disegnare il grafico,
- d) Enunciare il Teorema di Rolle e illustrare il significato geometrico. E' applicabile il Teorema di Rolle alla funzione $y = xf(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$?
2. Definizione di successione infinitesima e illustrare il confronto tra successioni infinitesime. Utilizzando il confronto tra infinitesimi calcolare il limite (specificare l'ordine di infinitesimo per ogni successione):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n^2}) + e^{\frac{1}{n}} - 1}{\tan(\frac{1}{n^2}) + \sin(\frac{2}{n})}$$

3. Definizione di serie numerica convergente, divergente, indeterminata. Studiare il carattere della seguente serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (e^\alpha - 1)^n$$

4. Svolgere a piacere solo uno dei due quesiti
- a) Enunciare il Teorema di Weierstrass. Utilizzandolo dire se la funzione $f(x) = |1 - \ln x|$ ammette massimo e minimo assoluti nell'intervallo $[1, e]$. In caso affermativo determinare tali punti.
- b) Definizione di derivata prima di una funzione $f(x)$ in un punto e suo significato geometrico. Utilizzando la definizione, dimostrare che la derivata di $(e^{2x})' = 2e^{2x}$