

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

Dati A e $B \subseteq \mathbb{R}$ una funzione di A in B è una legge (o relazione, o mappa) che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B .

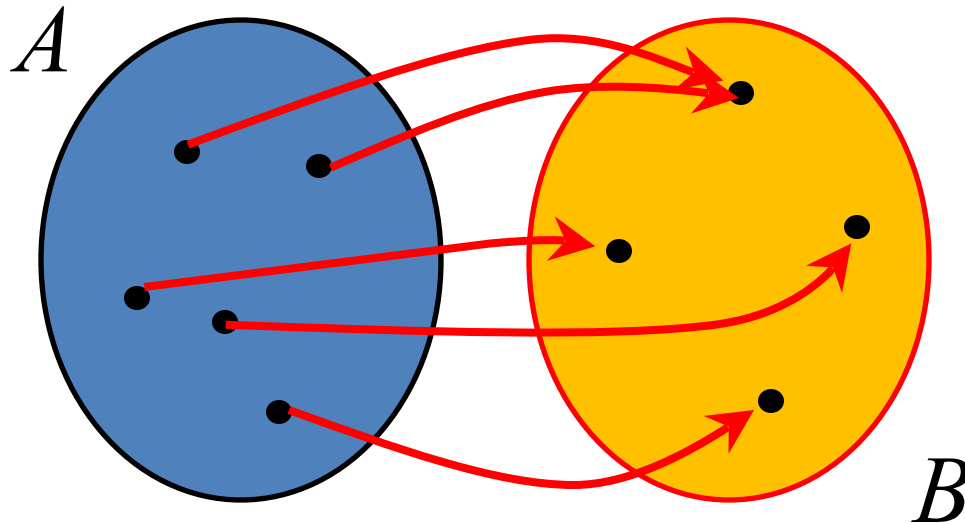
$f: A \rightarrow B$ oppure $y = f(x)$

$$x \in A \quad \text{e} \quad y = f(x) \in B$$

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

A = dominio o insieme di definizione di f .

B = codominio di f



FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Il grafico di f è un insieme di punti del piano (generalmente una curva) che è sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ costituito da $(x, f(x))$ con $x \in A, f(x) \in B$

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

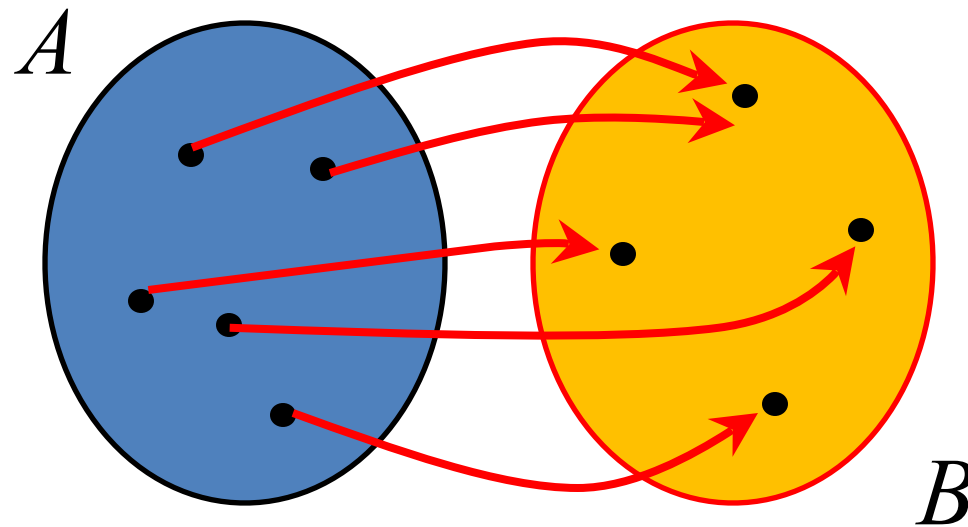
L'**immagine** di A tramite f , $f(A)$, è l'insieme degli y tale che $\exists x \in A$ tale che $f(x) \in B$

Es. Se $f: A \rightarrow B$, $f(x) = x^2$ $A = \mathbb{R}$, $f(A) = [0, +\infty)$

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

Si dice che $f: A \rightarrow B$ è **suriettiva** se $f(A) = B$ (cioè
fissato $y \in B \Rightarrow \exists x \in A : y = f(x)$)

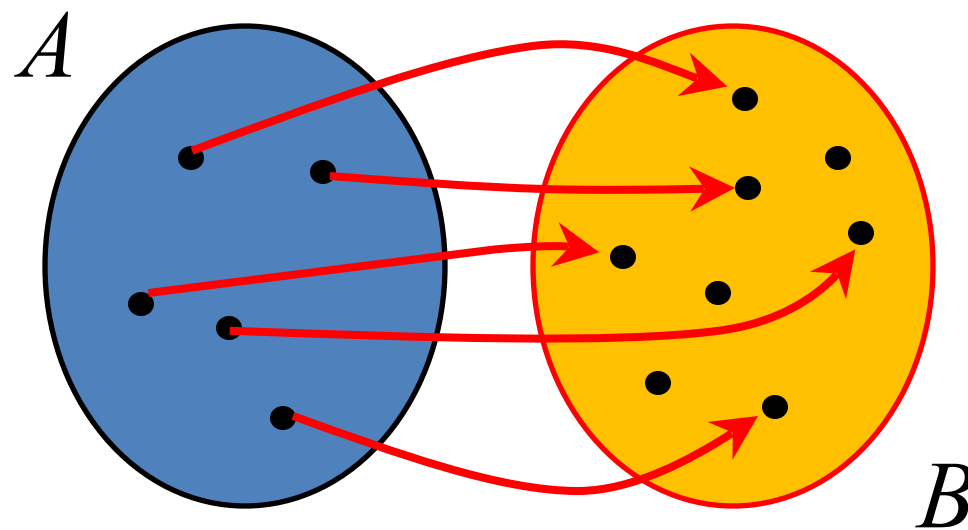


FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

Si dice che $f: A \rightarrow B$ è **iniettiva** se

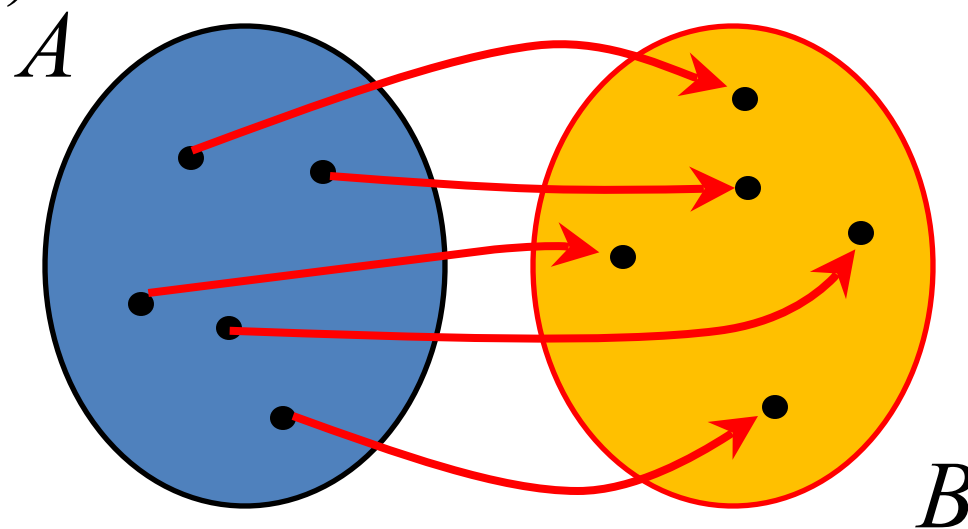
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

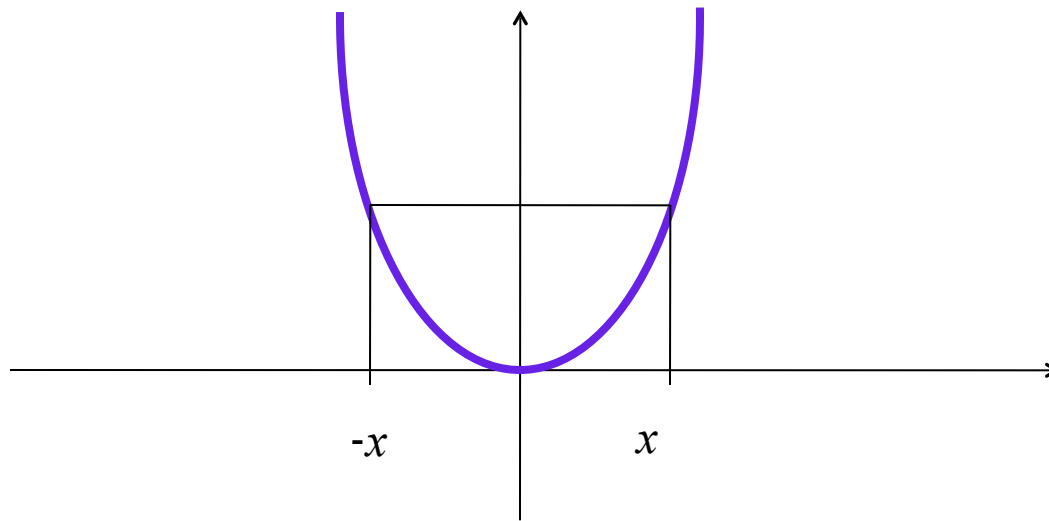
Se f è sia **suriettiva** che **iniettiva** allora si dice **biiettiva** (cioè si ha una corrispondenza biunivoca tra A e B)



FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

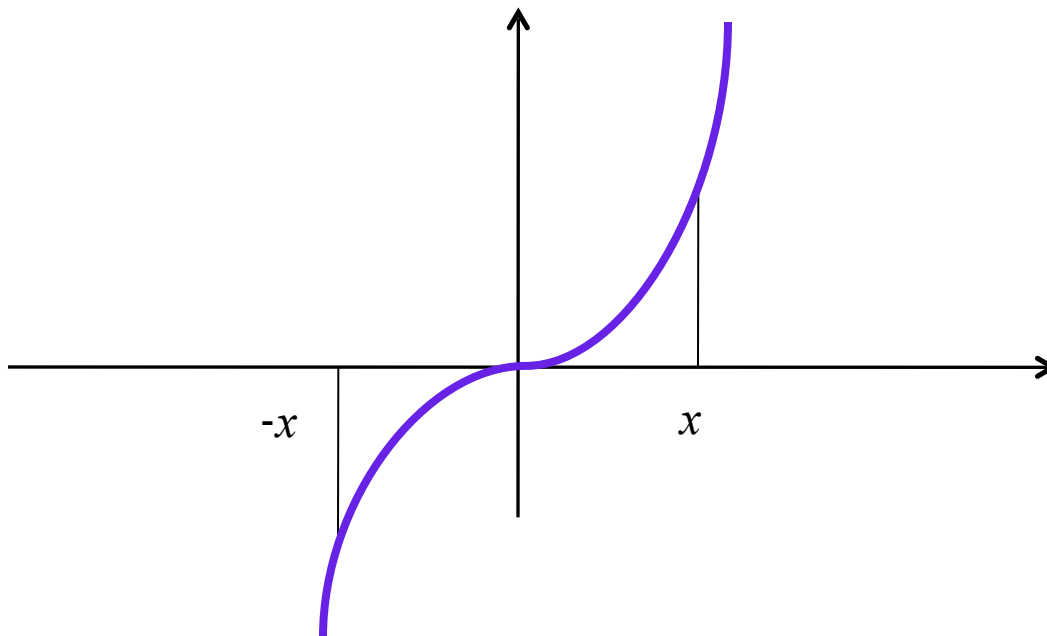
f è pari se $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse Y (es. $y = x^2$)



FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

f è dispari se $\forall x \in A : f(x) = -f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine (es. $y = x^3$)



FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

Una funzione $f: A \rightarrow B$ è periodica di periodo $T > 0$, se $\forall x \in A, x+T \in A$ e $f(x+T) = f(x)$

Es. Funzioni trigonometriche

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def. Data la funzione $f: A \rightarrow B$,

f si dice **limitata superiormente** se

$$\exists M \in \mathbb{R}: f(x) \leq M$$

(il grafico di f sta sotto la retta orizzontale $y=M$)

Analogamente, f si dirà **limitata inferiormente** se

$$\exists m \in \mathbb{R}: f(x) \geq m$$

(il grafico di f sta sopra la retta orizzontale $y=m$.)

La funzione f si dirà **limitata** se è limitata sia inferiormente che superiormente.

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

Date $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$

Si definisce **funzione composta** di f e g :

$$y = g(f(x))$$

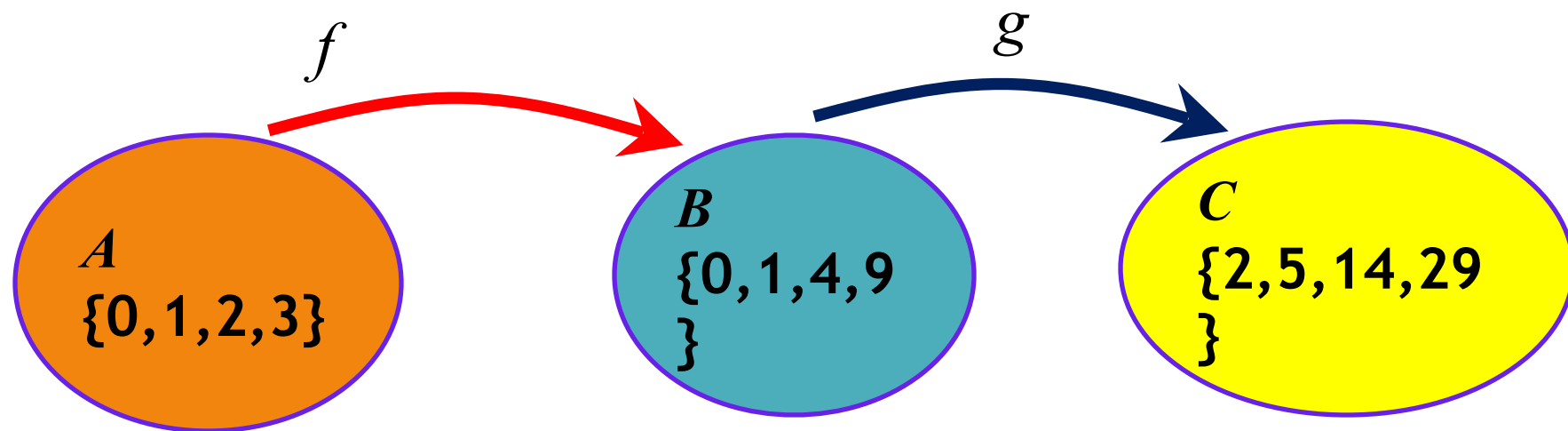
la funzione $h: A \rightarrow C$ $h = g \circ f$

Esempio $f = x^2$, $g(x) = 3x+2$, ($A \equiv B \equiv C \equiv R$)

$$g \circ f = 3x^2+2$$

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

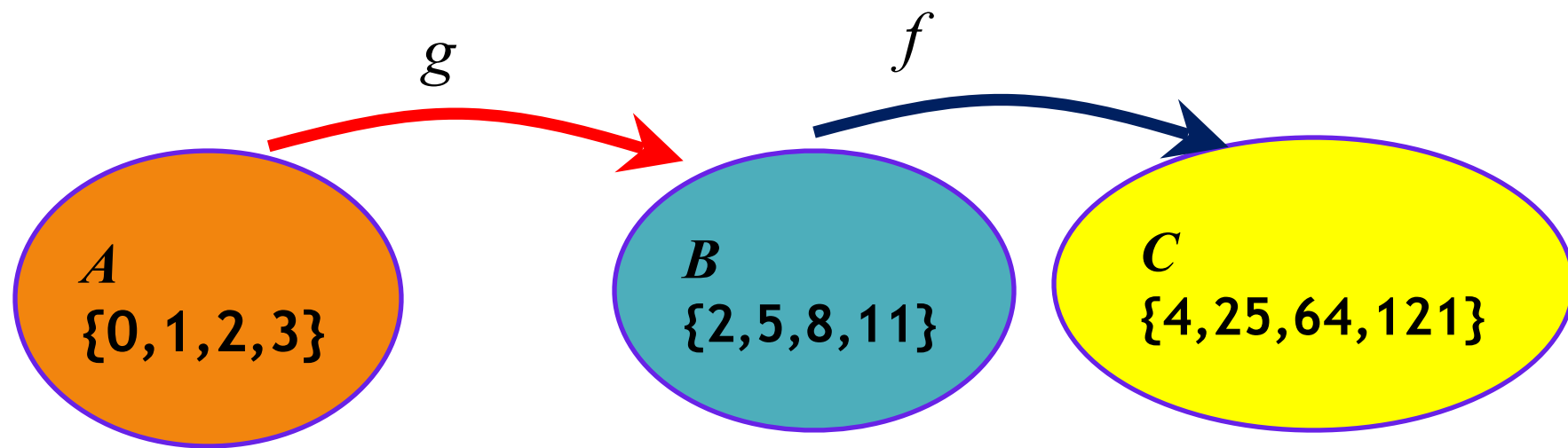
Esempio $f = x^2$, $g(x) = 3x+2$



$$g \circ f = 3x^2 + 2$$

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Esempio $f = x^2$, $g(x) = 3x+2$



$$f \circ g = (3x+2)^2$$

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

L'operazione di composizione non è commutativa
($g \circ f \neq f \circ g$)

La composizione di due funzioni biiettive è biiettiva

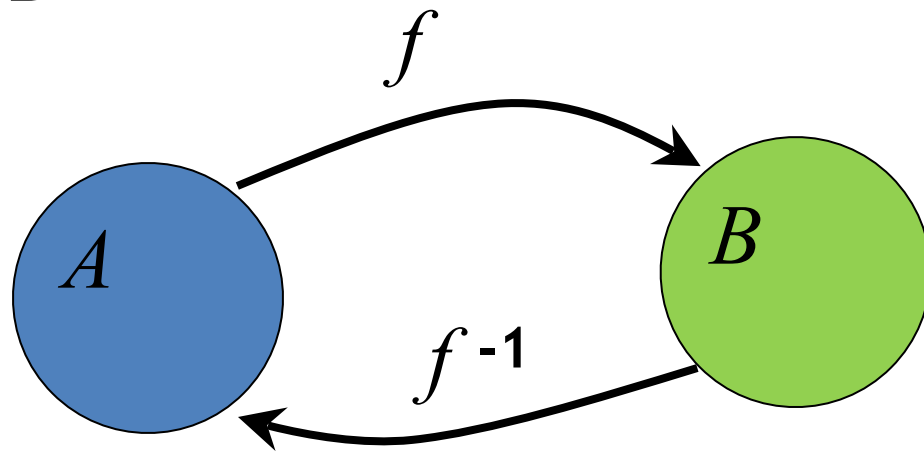
FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

Date $f: A \rightarrow B$ biiettiva, si definisce **funzione inversa** di f :

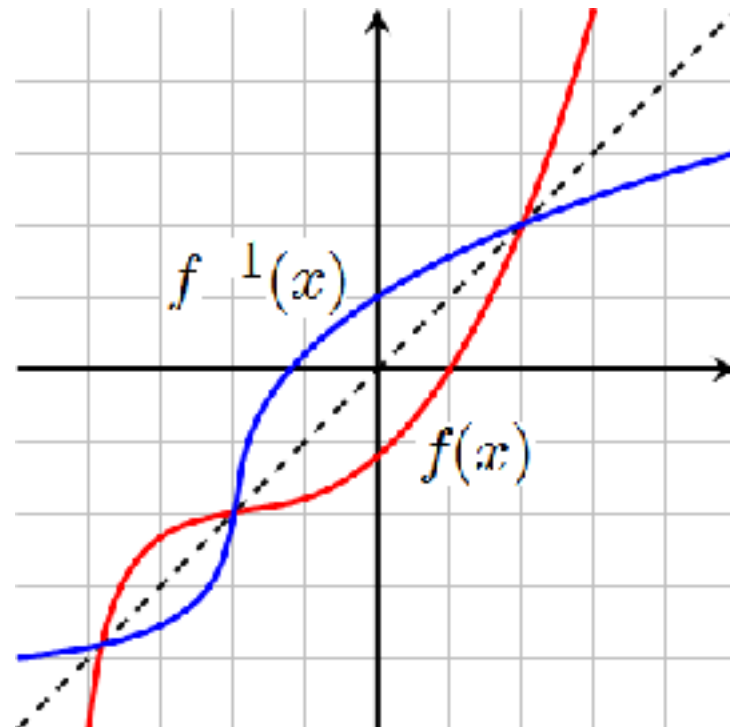
$f^{-1} : B \rightarrow A$ tale che $f^{-1} \circ f = I_A$

$f \circ f^{-1} = I_B$



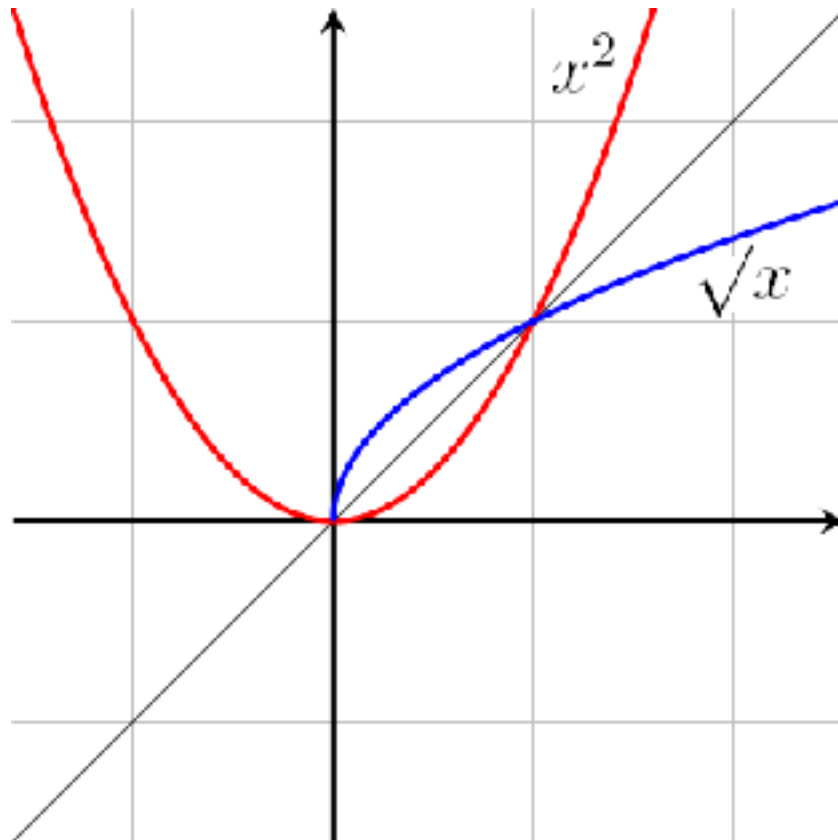
FUNZIONI DI UNA VARIABILE

I grafici di f e f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante



FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Es $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $y=x^2$, f (nel dominio indicato) è biettiva la sua funzione inversa è $y = \sqrt{x}$



FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Nota. La funzione $y = x^2$ ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) non è biiettiva ma è stata "resa" biiettiva, quindi invertibile, restringendo il suo dominio (per l'iniettività) e codominio (per la suriettività).

Nell'esempio il dominio è stato «rimpicciolito» in modo tale da avere una funzione strettamente crescente e quindi iniettiva. Il codominio è stato «rimpicciolito» all'intervallo massimale $[0, +\infty)$ e la funzione è diventata anche suriettiva

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Def.

Sia $f: A \rightarrow B$, f si dice **monotona** in A se verifica una delle seguenti condizioni ($\forall x_1, x_2 \in A$)

- | | | |
|----------------------------|------------------|----------------------|
| 1) f strett. crescente | se $x_1 < x_2$, | $f(x_1) < f(x_2)$ |
| 2) f crescente | se $x_1 < x_2$, | $f(x_1) \leq f(x_2)$ |
| 3) f strett. decrescente | se $x_1 < x_2$, | $f(x_1) > f(x_2)$ |
| 4) f decrescente | se $x_1 < x_2$, | $f(x_1) \geq f(x_2)$ |

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Se si verificano la 1 e 3 allora la funzione $f(x)$ è strettamente monotona.

Teorema. Una funzione $f: A \rightarrow R$ strettamente monotona in A , è invertibile in A . Inoltre la sua inversa è ancora strettamente monotona.

FUNZIONI E RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

Esempio

