Corso di Analisi Matematica 1

Monica Marras - Universitá degli Studi di Cagliari

mmarras@unica.it

Argomenti del corso

-Cenni di teoria degli insiemi

- successioni e serie numeriche

- funzioni di una variabile reale

-Formule di Taylor e Mac Laurin e applicazioni.

Testi di riferimento

- Analisi Matematica uno
casa editrice Liguori,
autori P. Marcellini, C. Sbordone

- Analisi Matematica 1
casa editrice Zanichelli
autori M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa

Esercizi:
Esercitazioni di matematica. Volume 1, parte prima e parte seconda
casa editrice Liguori
autori P. Marcellini, C. Sbordone.

SIMBOLOGIA

$\in$ Appartiene
$\notin$ Non appartiene
$\exists$ Esiste
$\nexists$ Non Esiste
$\subset$ Contenuto strettamente
$\subseteq$ Contenuto
$\supset$ Contiene strettamente
$\supseteq$ Contiene
$\Rightarrow$ Implica
$\iff$ Se e solo se
$\neq$ diverso
$\forall$ per ogni
$\ni$: $|$ Tale che

α, Alfa
β, Beta
γ, Γ, Gamma
δ, Δ, Delta
ϵ, Epsilon
σ, Σ, Sigma
ρ, Rho

Cenni Teoria degli insiemi

Rappresentazione estensiva $A := \{0, 1, 2, 3\}$;

Rappresentazione intensiva $A := \{x \in \mathbb{N} : \; x < 4\}$;

Rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn.

Operazioni tra insiemi:

Unione: $A \cup B := \{x : (x \in A) \; o \; (x \in B)\}$;

Intersezione: $A \cap B := \{x : (x \in A) \; e \; (x \in B)\}$;

Differenza: $A \setminus B := \{x : (x \in A) \; e \; (x \notin B)\}$;

Differenza simmetrica: $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

Complementare di A rispetto all'insieme ambiente X:
$\mathcal{C}_X A := \{x : (x \in X) \; e \; (x \notin A\} = X \setminus A$

Prodotto cartesiano di due insiemi X e Y:
Dati due insieme X e Y non necessariamente distinti, si definisce prodotto cartesiamo il nuovo insieme costituito da tutte le coppie ordinate (x, y) con $x \in X, \ y \in Y$:

$$X \times Y := \{(x, y) : \ x \in X, \ y \in Y\}$$

Definizione di relazione tra due insiemi.
Una relazione binaria (o corrispondenza) tra gli elementi degli insiemi X e Y si indica con $r(x, y)$ nelle variabili $x \in X$ e $y \in Y$. Se $r(x, y)$ è vera si dice che x e y sono in relazione tra loro.

Se $X = Y$ allora r è una relazione tra gli elementi di X.

Sia R un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$ formato dalle coppie ordinate (x, y) in cui x e y sono in relazione tra loro tramite la relazione r cioè l'insieme

$$R := \{(x, y) \in X \times Y \; e \; r(x, y)\} \;\; Grafico \; della \; relazione \; r \quad = graf(r)$$

allora per indicare che x e y sono legati dalla relazione r si scrive $(x, y) \in graf(r)$

Relazione di equivalenza $\approx$

Proprietà riflessiva: $\forall x \in X \ x \approx x$,

Proprietà simmetrica $\forall x \in X, \ \ \forall y \in X, \quad x \approx y \iff y \approx x$

Proprietà transitiva
$\forall x \in X, \ \ \forall y \in X \ \ \forall z \in X, \quad x \approx y \text{ e } y \approx z \ \Rightarrow \ x \approx z.$

Definizione di Partizione
Sia X un insieme non vuoto. Si definisce Partizione di X l'insieme S famiglia di sottoinsiemi di X tale che:

- ogni elemento A di S è non vuoto;
- se $A_1 \in S$; $A_2 \in S$ e $A_1 \neq A_2$ allora $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;
- $\displaystyle\bigcup_{A \in S} A = X.$

ESEMPIO: Se X è l'insieme degli interi positivi, una partizione di X è $S = \{P, D\}$ dove $P =$ numeri pari, $D =$ numeri dispari.

Definizione di Relazione d'ordine $\preceq$

Si definisce r relazione d'ordine (o ordinamento) in X e si indica con $x \preceq y$ ($x, y \in X$ e si legge x precede y oppure y segue x) se verifica le proprietà

riflessiva: $\forall x \in X : \quad x \preceq x;$

antisimmetrica:
$\forall x \in X, \;\; \forall y \in X : \quad (x \preceq y) \; e \; (y \preceq x) \iff x = y;$

transitiva:
$\forall x \in X, \;\; \forall y \in X, \;\; \forall z \in X : \quad (x \preceq y) \; e \; (y \preceq z) \;\Rightarrow\; x \preceq z.$

Gli elementi (x, y) del grafico di una relazione d'ordine si dicono confrontabili tra loro.

Se comunque si considerino $x \; e \; y \;\in X$ si ha $x \preceq y$ oppure $y \preceq x$ allora l'ordinamento è totale altrimenti si dirà parziale.

Un insieme in cui si introduce una relazione d'ordine si dice ordinato.

ESEMPIO. $\mathbb{R}$ è un insieme ordinato con relazione d'ordine $\leq$ (o $\geq$)

Maggiorante, minorante di un insieme

In un insieme ordinato possiamo introdurre il concetto di:

Definizione di Maggiorante
Sia X un insieme ordinato e $A \subseteq X$ non vuoto (anche A è ordinato con l'ordinamento indotto da X), un elemento $k \in X$ si dice maggiorante (rispettivamente (minorante) di A, se:

i) k è confrontabile con ogni elemento di A;

ii) $\forall x \in A$: si ha $x \preceq k$ (rispettivamente $x \succeq k$)

Se esiste un maggiorante (risp. minorante) di un sottoinsieme $A \subseteq X$ allora A si dirà limitato superiormente (rispett. inferiormente).

Un insieme si dirà limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente.

Estremo superiore e estremo inferiore, massimo, minimo

Definizione di Estremo superiore (rispett. Estremo inferiore).

Sia X un insieme ordinato e $A \subseteq X$, si definisce estremo superiore (rispett estremo inferiore di A) e si indica $\sup A$ (rispett. $\inf A$) il minimo (rispett. massimo) dei maggioranti (rispett. minoranti) di A se esiste.

L'estremo superiore e l'estremo inferiore se esistono sono unici.

Se $\sup A \in A$ allora $M = \sup A$ è detto massimo di A.
Se $\inf A \in A$ allora $m = \inf A$ è detto minimo di A.

L'insieme $A = \{x = n + \frac{4}{n} : \ n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ ha come $\sup A = +\infty$ e $\min A = 4$.

Infatti se $n > 4 : \ 0 < \frac{4}{n} < 1$ e aggiungendo n in ogni membro: $n < n + \frac{4}{n} < n + 1$.
Se $n \geq 4$ allora si ha $4 < n + \frac{4}{n} < n + 1$ e per $n = 3, \ x_3 = 3 + \frac{4}{3}$, per $n = 2, \ x_2 = 4$, per $n = 1 : \ x_1 = 5$.

perciò $A = \{x : \ 4 \leq x < +\infty.\}$

I numeri naturali $\mathbb{N}$, interi $\mathbb{Z}$, razionali $\mathbb{Q}$, reali $\mathbb{R}$

Insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$

Assiomi di Peano

P_1) zero (0) è un numero naturale,

P_2) per ogni numero naturale n esiste un numero naturale univocamente determinato $n+1$ (o n^+) detto successore di n;

P_3) 0 non è il successivo di nessuno;

P_4) numeri naturali diversi hanno successori diversi;

P_5) Principio di induzione: Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato che riguarda il numero naturale n, se:

i) $\mathcal{P}(0)$ è vera (o $\mathcal{P}(1)$ o $\mathcal{P}(2)$ etc..),

ii) $\mathcal{P}(n)$ *vera* $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(n+1)$ *vera*, allora $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esercizio.

Utilizzando il principio di induzione dimostrare che:

1) la somma dei primi n numeri naturali è $\frac{n(n+1)}{2}$;

2) è vera la diseguglianza di Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall x > 0$.

Insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

Insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ \ n \neq 0\}$$

S ha

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Non esiste nessun numero razionale $c \in \mathbb{Q}$ tale che $c^2 = 2$.

Dimostrazione.(Per assurdo)
Sia $c \in \mathbb{Q},\ \ c > 0,\ : c^2 = 2$ e $\exists m, n \in \mathbb{Z} :\ \ c = \frac{m}{n}$ con m, n per esempio entrambi positivi e non entrambi pari (altrimenti si semplifica).
Si ha $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = c^2 = 2 \ \Rightarrow\ \ m^2 = 2n^2$ e quindi m è pari in quanto lo è m^2.
Perciò $m = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}$ e $2n^2 = m^2 = 4k^2$ cioè $n^2 = 2k^2$ e perciò anche n è pari e questo va contro l'ipotesi (m e n non entrambi pari).

I numeri reali $\mathbb{R}$

Gli assiomi dei numeri reali

Assiomi relativi alle operazioni

Sono definite le operazioni di addizione $(+)$ e moltiplicazione $(\cdot)$ tra coppie di numeri reali con le proprietà: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

Proprietà associativa:
$(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$;

Proprietà commutativa: $a+b=b+a, \qquad a\cdot b = b\cdot a$;

Proprietà distributiva: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$;

Esistenza l'elemento neutro: $\exists 0 \in \mathbb{R}: \; 0+a = a+0 = a$ and
$\exists 1 \in \mathbb{R}: \; 1\cdot a = a \cdot 1 = a$;

Esistenza degli opposti:
$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists(-a) \in \mathbb{R}: \quad (-a)+a = a+(-a) = 0$;

Esistenza degli inversi:
$\forall a \in \mathbb{R}, \; a \neq 0, \qquad \exists a^{-1} \in \mathbb{R}: \quad (a^{-1})\cdot(a) = (a)\cdot(a^{-1}) = 1.$

I numeri reali $\mathbb{R}$

Gli assiomi dei numeri reali.

Assiomi relativi all'ordinamento

E' definita l'operazione di $\leq$ tra coppie di numeri reali con le proprietà:

- Dicotomia: per ogni coppia a, b si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$;
- Proprietà asimmetrica: se contemporaneamente $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$;
- Se $a \leq b$ allora vale anche $a + c \leq b + c$;
- Se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora valgono anche $0 \leq a + b, \quad 0 \leq a \cdot b$

Gli assiomi dei numeri reali

Sia $\{A,\ B\}$ una partizione di $\mathbb{R}$ cioè A e B sono insiemi non vuoti disgiunti la cui unione è $\mathbb{R}$.
A e B si dicono una sezione dell'insieme dei numeri reali se:

ogni numero reale è elemento di A oppure di B,

$a < b$, $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$.

Assioma di completezza (Assioma di Dedekind)
Per ogni sezione A e B dell'insieme dei numeri reali esiste un unico numero reale s tale che $a \leq s \leq b$ per qualunque a in A e b in B.
s è detto elemento separatore e s non è altro che $\sup A = \inf B$.

(L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ soddisfa tutti gli assiomi dei numeri reali tranne l'assioma di completezza.)

Definizione Si dice che un sottoinsieme $T \subset \mathbb{R}$ è denso in $\mathbb{R}$ se: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $\exists t \in T$ con $a < t < b$.
Allora:
Proposizione L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

I numeri complessi $\mathbb{C}$

$x^2+1=0 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{-1}$ Non esiste soluzione nell'insieme dei numeri reali.

Si esende $\mathbb{R}$ con introducendo il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Si definisce l'unità immaginaria $i: \quad i^2=-1.$

L'insieme dei numeri complessi si rappresenta in forma algebrica

$\mathbb{C} := \{z = x+iy : \quad x,\ y\ \in\ \mathbb{R}\},$

$x =$ *parte reale di* z,
$y =$ *coefficiente della parte immaginaria di* z

se $x=0$ allora $z=iy$ numero immaginario puro

se $y=0$ allora $z=x$ numero reale

$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

$\bar{z} = x - iy$ complesso coniugato di $z = x + iy$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = \textit{numero reale}$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} :=$ modulo di z.

Cenni di Topologia in $\mathbb{R}^n$

Se per gli elementi di un insieme X viene introdotto il concetto di intorno, si dice che è stata definita una topologia di X e l'insieme X si chiama spazio topologico.

Per definire l'intorno di un punto occorre prima definire la distanza tra due punti $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ (se $n = 1$ allora avremo $x, y \in \mathbb{R}$, se $n = 2$ allora avremo ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ *con* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, se $n = 3$ scriveremo ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *con* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, etc.).

Definizione: Si dice distanza tra due punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$: l'applicazione $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

che soddisfa le proprietà

1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$;
2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (diseguaglianza triangolare).

Esempio di distanza tra due punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$: $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$,

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, con $P_1 = (x_1, x_2)$ e $P_2 = (y_1, y_2)$.

Questa definizione vale $\forall n$.

Per $n = 1$ abbiamo l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ ($d(x, y) = |x - y|$). Possiamo mettere in corrispondenza biunivoca i numeri reali con una retta detta retta numerica o retta reale.

In molti casi (per esempio quando parleremo di limiti) si considerano insieme alla retta reale $\mathbb{R}$ anche un suo ampliamento indicato con $\mathbb{R}^*$ ottenuto aggiungendo a $\mathbb{R}$ due punti (non numeri) indicati con i simboli $+\infty$ e $-\infty$.:

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

In $\mathbb{R}^*$ si ha l'ordinamento di $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R} : \quad -\infty < x < +\infty.$

Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ un numero reale.

Definizione. Sia $r > 0$, si definisce Intorno sferico di $\mathbf{x}$ (o palla di centro $\mathbf{x}$) di raggio r l'insieme

$$B(\mathbf{x}, r) : \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}.$$

In $\mathbb{R}$ l'intorno sferico di x è l'intervallo con centro in x : $(x - r, x + r)$ o $\{x \in \mathbb{R} : \ x - r < x < x + r\}$.

In $\mathbb{R}^2$ l'intorno sferico di $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ è il cerchio di centro $\mathbf{x}$ e raggio r esclusa la circonferenza.

In $\mathbb{R}^3$ l'intorno sferico di $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ è la sfera piena centrata in $\mathbf{x}$ esclusa la superficie sferica.

Punti di accumulazione, punti interni, esterni, di frontiera, isolati

Definizione. Un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di accumulazione per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se, in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di A diverso da x_0.

Esempi.

- L'intervallo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ha come punti di accumulazione tutti i punti di I compreso gli estremi a e b.
- Il sottoinsieme dei dei numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ non ha punti di accumulazione. sono tutti punti isolati, si dice che è un insieme discreto.

  Pensando $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^*$, $\mathbb{N}$ ha solo un punto di accumulazione che è $+\infty$

Definizione. Un punto $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ si dice interno ad A se esiste un intorno di x_0 interamente contenuto in A.
Il punto x_0 si dice esterno ad A se esso è internoa $\mathcal{C}A$ (complementare di A).
Si dice di frontiera se esso non è nè interno nè esterno ad A.

Osservazione

- Se x_0 è interno ad A allora $x_0 \in A$;
- Se x_0 è esterno ad A allora $x_0 \notin A$;
- Se x_0 è di frontiera per A, allora può aversi $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$. In ogni caso qualunque intorno di x_0 contiene sia punti di A che del suo complementare.

L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama derivato di A e si indica con A'.

Se un punto di A ($x_0 \in A$) non è di accumulazione per Aallora si dice che x_0 è un punto isolato.

Se un insieme A non ha punti di accumulazione (cioè $A' = \emptyset$) allora si dice discreto.

L'insieme dei punti interni di A si indica con $\mathring{A}$.

L'insieme dei punti di frontiera di A si indica con ∂A (si ha $\partial A = \partial \mathcal{C} A$)

Se A coincide con A' (cioè è costituito da tutti e soli i suoi punti di accumulazione) allora l'insieme A si dirà perfetto.

Insiemi aperti, chiusi, limitati

Definizione. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se ogni $x \in A$ è un punto interno, cioè se $A \equiv \mathring{A}$.

Esempio: l'intervallo (a, b) cioè $\{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ è un intervallo aperto (ogni suo punto è di accumulazione: attenzione a e b sono di accumulazione ma non sono punti di (a, b))

Definizione. L'insieme A si dice chiuso se $\mathcal{C}A$ è aperto.

Esempio: il complementare dell'intervallo $[3, 5]$ è $\{x \in \mathbb{R} : x < 3 \ o \ x > 5\}$ e questo è un insieme aperto (ogni suo punto è di accumulazione).

L'insieme vuoto $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono gli unici insiemi sia aperti che chiusi.

Definizione. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, si definisce chiusura di A e si indica con $\overline{A}$, l'insieme $\overline{A} = A \cup \partial A$

Se A è chiuso allora $\overline{A} = A$.

Teorema.

i) se $\mathcal{F}$ è una qualunque famiglia di aperti, $\cup\mathcal{F}$ è un aperto,

ii) se $\mathcal{F}$ è una famiglia finita di aperti, $\cap\mathcal{F}$ è un aperto.

Osservazione: l'intersezione di una famiglia infinita di aperti può non essere un aperto.
Esempio: la famiglia infinita di intervalli aperti definiti come $A = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}$, ha come intersezione $\{0\}$.

Infatti, si ha che ogni insieme discreto è un chiuso. In particolare l'insieme costituito da un solo punto $B = \{x_0\}$ è un chiuso: esso è il complementare di un aperto (che è unione dei due aperti V$=(-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$, e $\mathcal{C}V = B$).

Teorema.

i) se $\mathcal{F}$ è una qualunque famiglia di chiusi, $\cap\mathcal{F}$ è un chiuso,

ii) se $\mathcal{F}$ è una famiglia finita di chiusi, $\cup\mathcal{F}$ è un chiuso.

Se consideriamo

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ allora $\mathbb{N}$ è chiuso (e non ha punti di accumulazione).
è non limitato perchè non esiste un intorno dell'origine che lo contiene.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^*$

è non chiuso (e contiene $+\infty$ che è il suo punto di accumulazione), limitato perchè è contenuto nell'intorno di $+\infty$.

Si definisce intorno di ∞ il complementare di qualunque insieme chiuso di $\mathbb{R}$.

In $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ l'intorno sferico di ∞ è il complementare di qualunque bolla chiusa di $\mathbb{R}^n$.

Definizione. Diciamo che l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente se ammette un maggiorante (allora $supA =$ minimo dei maggioranti di A).

A è limitato inferiormente se ammette un minorante (allora inf $A=$ massimo dei minoranti).

Teorema di esistenza dell'estremo superiore. Se un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, è limitato superiormente allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.
Infatti se B è l'insieme dei maggioranti di A sicuramente B è non vuoto perchè A è limitato superiormente e per l'assioma di completezza si ha: $a \leq M \leq b \; \forall a \in A$ e$\forall b \in B$.
Ma $M \in B$ perchè è un maggiorante di A ed è minore o uguale a tutti gli elementi di B, quindi M è il minimo di B cioè esiste il minimo dei maggioranti di A (che si chiama $\sup A$).

Definizione. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato se è limitato sia inferiormente che superiormente (esiste un intorno dell'origine che lo contiene).

Teorema di Bolzano Weierstrass
Ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e infinito, ammette almeno un punto di accumulazione.

Nel caso di $A \subseteq \mathbb{R}$, il teorema di Bolzano Weirstrass dice che se A è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$, A allora ammette massimo e minimo (assoluto).

Infatti se A è limitato allora esistono due numeri reali <u>finiti</u> $x_1 = \inf A$ e $x_2 = \sup A$. x_1 e x_2 possono essere punti isolati di A oppure punti di accumulazione per A.
Se sono isolati allora devono appartenere ad A altrimenti non sarebbero estremo superiore o estremo inferiore di A.
Infatti se per esempio $x_2 = \sup A$ fosse un punto isolato non appartenente ad A allora esisterebbe un punto x_3 maggiorante di A più piccolo di x_2 cioè $x_3 < x_2$ e quindi x_3 sarebbe il $\sup A$.

Perciò essendo il $\sup A$ unico si ottiene $x_2 = \sup A \in A$ analogo discorso per l'estremo inferiore $x_1 = \inf A \in A$.

Se x_1 e x_2 sono di accumulazione per A allora appartengono ad A solo se A è chiuso.

Quindi il Teorema di Bolzano Weierstrass per $A \subseteq \mathbb{R}$, con A chiuso e limitato, è dimostrato in quanto abbiamo dimostrato che $x_1 = \inf A,\ x_2 = \sup A$ appartengono ad A e quindi $x_1 = \inf A = m =$ minimo di A e $x_2 = \sup A = M =$ massimo di A.

Esempio di insieme costituito da punti isolati e non discreto: $A = \{x = \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\} :\ 0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, i punti di A sono isolati ma A non è discreto perchè $x = 0$ è un punto di accumulazione per A (cioè $A' = \{0\} \neq \emptyset$) e si ha $0 = \inf A$, $\sup A = 1 = \max A$.

Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: Intervalli

Consideriamo come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ intervalli o unione di intervalli.
Gli intervalli:

1) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \ -2 \leq x < 3\}$ si può scrivere come $A_1 = [-2, 3)$ e si ha $\sup A_1 = 3, \ \inf A_1 = \min A_1 = -2$ (non è nè aperto nè chiuso, è limitato, si può dire aperto a destra e chiuso a sinistra).
   L'insieme dei suoi punti interni è $\mathring{A}_1 = (-2, 3)$,
   l'insieme dei suoi punti di accumulazione (o derivato di A_1) è $A_1' = [-2, 3]$, i punti di frontiera sono $x = -2, \in A_1, \ x = 3 \notin A_1$
2) $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : \ -2 < x \leq 3\}$ si può scrivere come $A_2 = (-2, 3]$ e si ha $\sup A_2 = \max A_2 = 3, \ \inf A_2 = -2$ (non è nè aperto nè chiuso, è limitato, si può dire chiuso a destra e aperto a sinistra)
   L'insieme dei suoi punti interni è $\mathring{A}_2 = (-2, 3)$,
   l'insieme dei suoi punti di accumulazione è $A_2' = [-2, 3]$, i punti di frontiera sono $x = -2, \notin A_2, \ x = 3 \in A_2$
   $\partial A_1 = \partial A_2 = \{-2, 3\}$

3) $A_3 = \{x \in \mathbb{R} : \; -2 < x < 3\}$ cioè $A_3 = (-2, 3)$ ha $\sup A_3 = 3$ e $\inf A_3 = -2$ (A_3 è aperto, limitato).
L'insieme dei punti interni è $\mathring{A}_3 = A_3 = (-2, 3)$,
l'insieme dei suoi punti accumulazione è $A_3' = [-2, 3] = \mathring{A}_3 + \partial A_3$

4) $A_4 = \{x\mathbb{R} : \; -2 \leq x \leq 3\}$ cioè $A_4 = [-2, 3]$ ha $\sup A_4 = \max A_4 = 3$ e $\inf A_4 = \min A_4 - 2$ (A_4 è chiuso, limitato)
L'insieme dei punti interni è $\mathring{A}_4 = (-2, 3)$,
l'insieme dei suoi punti accumulazione è $A_4' = A_4 = [-2, 3]$,
$\partial A_3 \partial A_4 = \{-2, 3\}$

5) $A_5 = \{x \in \mathbb{R} : \; -\infty < x \leq 3\}$ cioè $A_5 = (-\infty, 3]$ ha $\sup A_5 = \max A_5 = 3$ e $\inf A_5 = -\infty$ (A_5 è illimitato inferiormente)

6) $A_6 = \{x \in \mathbb{R} : \; -2 < x < \infty\}$ cioè $A_6 = (-2, \infty)$ ha $\sup A_6 = \infty$ e $\inf A_6 = -2$ (A_6 è illimitato superiormente)

7) $A_7 = \{x \in \mathbb{R} : \; -\infty < x < \infty\}$ cioè $A_7 = (-\infty, \infty)$ ha $\sup A_7 = \infty$ e $\inf A_7 = -\infty$ (A_7 è illimitato)

Funzioni reali di una variabile reale

Vogliamo studiare le funzioni $f : x \mapsto y = f(x)$ dove sia la variabile indipendente x che quella dipendente $y = f(x)$ appartengono a $\mathbb{R}$.

Definizione di funzione.
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, si definisce funzione di X in R una legge, o relazione o mappa, che associa ad ogni elemento $x \in A$ uno e un solo elemento $y = f(x) \in B$.

In simboli:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

la variabile dipendente $y = f(x)$ si chiama immagine di x tramite f, e la variabile indipendente x si chiama controimmagine di y.

L'insieme X è detto dominio o insieme di definizione,
$Y = f(X)$ è detto codominio di f ed è l'insieme delle immagini di $x \in X$ tramite f: $f(X) \subseteq \mathbb{R}$.