Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

21 Gennaio 2025

Esercizio 1

Si consideri l'endomorfismo $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ 2x_3 & x_1 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

a) Trova la dimensione e una base del nucleo e dell'immagine di f.

b) Verificare che l'insieme

$$W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : f(A) \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ sono linearmente dipendenti} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

c) Trovare una base di W.

d) Data $g: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ la funzione lineare la cui matrice associata rispetto alla base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$ e $B' = \{1 + x, 2\}$ di $\mathbb{R}_1[x]$ è

$$M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare $(g \circ f)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli trovare i valori del parametro reale k per i quali il seguente sistema è compatibile e in corrispondenza di tali valori trovare l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ kx_2 + x_3 + (1-k)x_4 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Con riferimento all'endomorfismo $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ dell'Esercizio 1,

a) trova gli autovalori e una base degli autospazi di f;

b) stabilisci se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trova una base di $M_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f.