LE SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI

GEOMETRIA 1

21 GENNAIO 2025

a) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ 2x_3 & x_1 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 3$ dato che $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ e la 3^a riga è multipla della 2^a.

Quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni ed è equivalente a

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 2x_4 = -t \end{cases} \qquad x_1 = t$$

Quindi

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\ker(f)$

$\dim(\ker(f)) =$

Per l'equazione dimensionale si ha

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(\ker(f))$$
$$= 4 - 1 = 3$$

Troviamo una base.

$$\mathrm{Im}(f) = L(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$$
$$= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$= L\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

dato che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Siccome $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathrm{Im}(f)$.

b) $\forall A, B \in W$ si ha che $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tale che $f(A) = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(B) = b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $$f(A+B) \overset{f \text{ lineare}}{=} a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a+b) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$f(A+B)$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$
$A+B \in W$.

Inoltre $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall A \in W$ dimostriamo che anche $\lambda \cdot A \in W$. Infatti $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tale che $f(A) = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Allora $$f(\lambda A) \underset{f \text{ lineare}}{=} \lambda \cdot f(A) = \lambda\left(a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right) = (\lambda a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $f(\lambda A)$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ sono lin. dipendenti e quindi $\lambda A \in W$.

c) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in W \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ 2x_3 & x_1+2x_4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda \cdot 1 \\ x_3 = \lambda \cdot 2 \\ 2x_3 = \lambda \cdot 4 \\ x_1 + 2x_4 = \lambda \cdot 0 \end{cases} \iff rg\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & 2x_3 & x_1+2x_4 \\ \boxed{1} & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\iff \begin{cases} \det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix} x_2 & 2x_3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix} x_2 & x_1+2x_4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_2 = t \\ x_1 = -2s \end{cases} \qquad x_3 = t \quad x_4 = s$$

In conclusione

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -2s & \frac{t}{2} \\ t & s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{2} \\ t & 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ s \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Poiché i generatori $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono anche linearmente indipendenti, concludiamo che $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è base di W.

d) $g: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$$B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$B' = \{ \underset{v'_1}{1+x}, \underset{v'_2}{2} \} \qquad M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{B}{M_2(\mathbb{R})} \xrightarrow{f} \underset{B}{M_2(\mathbb{R})} \xrightarrow{g} \underset{B'}{\mathbb{R}_2[x]}$$

Troviamo $M_{BB}(f)$.

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\gamma+\delta \\ \gamma & \alpha+\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha+\gamma+\delta = 0 \to \delta = -1 \\ \gamma = 0 \\ \alpha+\beta = 3 \to \beta = 3-1 = 2 \end{cases}$$

$$= 1 \cdot v_1 + 2 v_2 + 0 \cdot v_3 - 1 \cdot v_4$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 v_2$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\gamma+\delta \\ \gamma & \alpha+\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha+\gamma+\delta = 1 \to \delta = -2 \\ \gamma = 2 \\ \alpha+\beta = 0 \to \beta = -1 \end{cases}$$

$$= 1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 - 2 v_4$$

$$f(v_4) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 - v_2 - v_4$$

$$\Rightarrow \quad M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\quad M_{BB'}(g \circ f) = M_{BB'}(g) \cdot M_{BB}(f) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Allora $\quad (g \circ f)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (g \circ f)(0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4) =$

$$= x_1' v_1' + x_2' v_2'$$

dove $\quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = M_{BB'}(g \circ f) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot (1+x) + 4 \cdot 2 = 13 + 5x.$$

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} k x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ k x_2 + x_3 + (1-k)x_4 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & k & 1 & 1-k \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & k & 1 & 1-k & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ abbiamo subito che $rg(A) \geq 2$.

Consideriamo i minori di ordine 3 orlati di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\det\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} = k \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix} = k(2-k) = 0 \iff k=0 \vee k=2$$

Se $k \neq 0$ e $k \neq 2$ $rg(A) = 3 = rg(A|B)$; in tal caso il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni.

Se $k=0$ è sufficiente verificare il comportamento del rimanente orlato

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$ perché la terza colonna è pari alla seconda meno la prima

Quindi per $k=0$ $rg(A)=2$.

Controlliamo l'ulteriore orlato in $A|B$:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$ perché la terza colonna è la somma delle restanti colonne

Quindi anche $A|B$ ha rango 2.

Concludiamo che anche per $k=0$ il sistema è compatibile, ma ammette ∞^2 soluzioni.

Infine, se $k=2$ il rimanente orlato di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ in A ha determinante pari a

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$ perché la terza colonna è pari alla seconda meno la prima

Quindi $rg(A)=2$.

Quanto a $A|B$ abbiamo che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{III col.} \to \text{III} - \text{I} - \text{II}}{=\!=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\cdot(1-4) = 6 \neq 0 \Rightarrow rg(A|B) = 3$$

Quindi per $k=2$ il sistema è incompatibile.

Troviamo l'insieme delle soluzioni nei casi in cui il sistema è compatibile.

- $k \neq 0 \wedge k \neq 2$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + 2x_3 = 3 - s \\ 2x_2 + x_3 = 3 + s \\ kx_2 + x_3 = 1 - (1-k)s \end{cases} \qquad x_4 = s$$

Sottraendo la 2ª e 3ª equazione si ha

$$(2-k)x_2 = 3+s-1+(1-k)s = 2+2s-ks$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{2+(2-k)s}{2-k}$$

da cui $\quad x_3 = 3+s-2x_2 = 3+s - \dfrac{2(2+(2-k)s)}{2-k}$

e infine

$$x_1 = \frac{1}{k}\left(3-s-x_2-2x_3\right) = \frac{1}{k}\left(3-s-\frac{2+(2-k)s}{2-k} - 6 - 2s + \frac{4(2+(2-k)s)}{2-k}\right)$$

$$= \frac{1}{k}\left(-3-3s+\frac{6+3(2-k)s}{2-k}\right)$$

Pertanto, per $k \neq 0 \wedge k \neq 2$,

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{k}\left(-3-3s+\frac{6+3(2-k)s}{2-k}\right), \frac{2+(2-k)s}{2-k}, 3+s-\frac{2(2+(2-k)s)}{2-k}, s \right) : s \in \mathbb{R} \right\}$$

- $k = 0$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 3 - s \\ 2x_2 + x_3 = 3 + s \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_4 = s \\ x_1 = t \end{array}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \det\begin{pmatrix} 3-s & 2 \\ 3+s & 1 \end{pmatrix} = \frac{3-s+6-2s}{-3} = s-3$$

$$x_3 = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \det\begin{pmatrix} 1 & 3-s \\ 2 & 3+s \end{pmatrix} = \frac{3+s-6+2s}{-3} = 1-s$$

Pertanto, per $k = 0$,

$$S = \{ (t, s-3, 1-s, s) : s, t \in \mathbb{R} \}.$$

Es...

a) La matrice ...

$B = \{ (0 \quad 1 \ \ldots$

è

$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$

Conseguentemente, il polinomio ...

$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda)^2 \lambda^2$

Vi sono due autovali, 0 e 2, entrambi con mo...
algebrica 2.

Troviamo gli autospazi.

ESERCIZIO 3

a) La matrice associata a f rispetto alla base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Conseguentemente, il polinomio caratteristico è dato da

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 \lambda^2$$

Vi sono due autovali, 0 e 2, entrambi con molteplicità algebrica 2.

Troviamo gli autospazi.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V(0) = \ker(f) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

FATTO NELL'ESERCIZIO 1 a)

per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Quindi $V(0) = L\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V(2) \Longleftrightarrow f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ 2x_3 & x_1 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = t$$

det $\neq 0$

Quindi $V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Poiché $m_g(0) = 1 \neq m_a(0)$ (e anche $m_g(2) = 1 \neq m_a(2)$)

f NON è diagonalizzabile.