UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
(Classe LM-40 Matematica)

Elementi di Analisi funzionale

Dispense per il corso di Analisi superiore 1
A.A. 2024/2025
Docente: Claudia Anedda

Indice

1 Richiami **3**

1.1 Introduzione 3

1.2 Spazi normati 4

1.3 Disuguaglianze ausiliarie 14

2 Operatori lineari **22**

2.1 Teorema di Helly-Hahn-Banach e conseguenze 31

2.2 Principio di uniforme limitatezza 38

2.3 Teorema della mappa aperta 41

2.4 Topologie deboli 42

2.5 La topologia debole* 48

2.6 Spazi riflessivi 52

2.7 Spazi separabili 56

2.8 Spazi uniformemente convessi 57

3 Spazi L^p **60**

3.1 Riflessività, separabilità e duale 76

3.2 Mollificatori 93

3.3 Criterio di compattezza forte in L^p 100

4 Spazi l^p **106**

Bibliografia **115**

Capitolo 1

Richiami

1.1 Introduzione

L'analisi funzionale nasce dallo studio di "spazi di funzioni", spazi vettoriali i cui elementi sono funzioni e dotati, in genere, di un'ulteriore struttura (dotati di una norma, di un prodotto interno, di una topologia ecc.). Tra questi spazi rivestono particolare importanza gli spazi di Banach e gli spazi di Hilbert.
Il nome "funzionale" deriva dal calcolo delle variazioni (che studia i massimi e i minimi di funzionali e le loro proprietà); nelle scienze applicate, infatti, si ricercano i valori massimi o minimi di alcune quantità specifiche, che vengono espresse come funzioni di una o più variabili; un funzionale è dunque una funzione il cui argomento, a sua volta, è una funzione. Il termine venne usato per la prima volta da Hadamard[1] nel 1910, ma il concetto generale era già stato introdotto da Volterra[2] nel 1887.
Le radici storiche dell'analisi funzionale affondano le proprie radici nello studio delle trasformazioni di funzioni (come la trasformazione di Fourier); infatti, storicamente, molte questioni affrontate dall'analisi funzionale hanno avuto origine da problemi modellati da equazioni differenziali alle derivate parziali. D'altra parte, molti risultati astratti di questo ramo dell'analisi vengono usati soprattutto per risolvere equa-

[1] **Jacques Solomon Hadamard** (1865-1963), matematico francese.
[2] **Vito Volterra** (1860-1940), matematico, fisico e politico italiano. Fu uno dei principali fondatori dell'analisi funzionale.

zioni differenziali alle derivate parziali e equazioni integrali.

1.2 Spazi normati

Sia X uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un'applicazione $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ si chiama **norma** se soddisfa le seguenti proprietà:
1) $||x|| \geq 0 \; \forall x \in X$, e $||x|| = 0$ se e solo se $x = \mathbf{0}$;
2) $||\lambda x|| = |\lambda| \; ||x|| \; \forall x \in X$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ (omogeneità della norma);
3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \; \forall x, y \in X$ (disuguaglianza triangolare).
Uno spazio vettoriale X con una norma assegnata su di esso è detto **spazio normato**.
Uno spazio normato X è *metrizzabile*, cioé si può dotare dell struttura di spazio metrico ponendo, $\forall\, x, y \in X$, $d(x, y) = ||x - y||$; d è una metrica su X, infatti, $d(x, y) = 0$ implica $||x - y|| = 0$, da cui $x - y = \mathbf{0}$, cioé $x = y$; viceversa, se $x = y$ allora $d(x, y) = 0$. La simmetria della distanza è evidente dalla definizione. Infine, la disuguaglianza triangolare per la distanza è una conseguenza della disuguaglianza triangolare per la norma:

$$d(x, y) = ||x - y|| = ||(x - z) + (z - y)||$$

$$\leq ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(z, y).$$

La topologia generata su X dalla metrica d coincide con quella generata dalla norma, detta **topologia della norma** dello spazio X.
Data una successione $\{x_n\}$ in X, diciamo che $\{x_n\}$ converge a x *secondo la norma* (o *rispetto alla norma*, o *in norma*) se $||x_n - x|| \to 0$ per $n \to \infty$. Se $\forall\, \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n, m > N$ risulta $\|x_n - x_m\| < \epsilon$, si dice che la successione $\{x_n\}$ è **di Cauchy** o **fondamentale** in X. Se ogni successione fondamentale in X è convergente in X, lo spazio X si dice **completo**. Uno spazio vettoriale normato completo si dice **spazio di Banach**[3].
Gli esempi più noti di spazi di Banach sono $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$ con la norma

[3]**Stefan Banach** (1892-1945), matematico polacco, considerato uno dei padri fondatori dell'analisi funzionale moderna.

euclidea.

La funzione norma gode di varie proprietà:
1) **lipschitzianità della norma**: $\big|||x|| - ||y||\big| \leq ||x - y||$ per ogni $x, y \in X$; essa è una diretta conseguenza della disuguaglianza triangolare: da $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ segue che $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, e da $\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\|$ segue che $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$, da cui la 1).
2) **Continuità della norma**: $||x||$ è una funzione continua di x: infatti, per la proprietà appena scritta si ha $\big|||x_n|| - ||x||\big| \leq ||x_n - x||$ che implica che, se $x_n \to x$ in X, allora $||x_n|| \to ||x||$ in $\mathbb{R}$.
3) **Unicità del limite**: se $\{x_n\}$ è una successione convergente a x, il limite x è unico. Infatti, se per assurdo si avesse $x_n \to x$ e $x_n \to y$, allora da

$$\|x - y\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\|,$$

passando al limite per $n \to \infty$, si avrebbe $\|x - y\| \leq 0$, da cui $x = y$.
4) Se $\{x_n\}$ è una successione convergente a x, essa è limitata, cioé esiste $M \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|x_n\| \leq M \; \forall \, n \in \mathbb{N}$. Infatti, per ipotesi, $\forall \, \epsilon > 0$ esiste $N(\epsilon)$ tale che, $\forall \, n > N$, $\|x_n - x\| < \epsilon$; scelto $\epsilon = 1$, si ha

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq \|x\| + 1 \leq \|x\| + 1 + \sum_{k=1}^{N} \|x_k\| \quad \forall n,$$

da cui risulta che $\{x_n\}$ è limitata.
5) Se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy, essa è limitata: in tal caso, ragionando come prima, dato che $\forall \, \epsilon > 0$ esiste $N(\epsilon)$ tale che, $\forall \, n, m > N$, $\|x_n - x_m\| < \epsilon$, si ha

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_m\| + \|x_m\| \leq 1 + \sum_{k=1}^{N+1} \|x_k\| \quad \forall n.$$

6) Se $x_n \to x$, $y_n \to y$ in X e $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{K}$, allora si ha

$$x_n \pm y_n \longrightarrow x \pm y \quad \text{in } X \qquad \text{e} \qquad \lambda_n x_n \longrightarrow \lambda x \quad \text{in } X.$$

Vediamo alcuni esempi di spazi normati.

Esempio 1.1. *Consideriamo lo spazio* $\mathbb{K}^N$*: qui la norma può essere definita in modi differenti; ad esempio* $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_N)$*; questa norma è detta* ***norma euclidea*** *(a volte norma pitagorica). Altre norme frequentemente usate sono* $||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq N} |x_i|$ *e* $||x||_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$.

Esempio 1.2. *Lo spazio* $C(K)$ *delle funzioni continue su* K *(con* K *compatto di* $\mathbb{R}$*) diventa normato se definiamo* $||x|| = \max_{t\in K} |x(t)|$.[4]
Lo spazio $B(A)$ *delle funzioni limitate definite su* $A \subseteq \mathbb{R}$ *(non necessariamente compatto) con la norma* $||x|| = \sup_{t\in A} |x(t)|$ *è di Banach.*[5]
Lo spazio $C^k([a, b])$ *delle funzioni derivabili* k *volte con continuità su* $[a, b]$ *è normato con la norma* $||x|| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(k)}(t)|$*, detta* norma lagrangiana. *Gli spazi* $C^k([a, b])$*,* $k \in \mathbb{N}$*, sono detti* spazi di Lagrange *e sono spazi di Banach.*

Esempio 1.3. *Osserviamo* $C([a, b])$ *è di Banach con la norma del max, ma non lo è con la norma indotta dalla metrica integrale di ordine 1:* $\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt$*. Si può infatti fornire un esempio di successione fondamentale che non converge, rispetto a tale norma, a una funzione continua:* $\{t^n\} \in C([0, 1])$ *è tale che (sia* $m > n$*)*

$$\|t^n - t^m\| = \int_0^1 (t^n - t^m)\,dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \longrightarrow 0 \quad \textit{per } n, m \to \infty,$$

cioé essa è di Cauchy rispetto alla metrica integrale ma

$$\lim_{n\to\infty} t^n = f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \textit{se } t = 1, \end{cases}$$

che non è continua in $[0, 1]$.

[4] Più in generale, si può considerare lo spazio $C(K)$ delle funzioni $f : K \to \mathbb{R}$, (o $f : K \to \mathbb{C}$) continue su uno spazio metrico compatto K.

[5] Dato uno spazio topologico compatto K, lo spazio $C(K)$ è un sottospazio vettoriale di $B(K)$ (dato che in questo caso tutte le funzioni continue sono limitate) ed è un suo sottospazio chiuso.

Ricordiamo anche alcune altre importanti definizioni.

Definizione 1.1. *Sia X un insieme e $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X, detti* ***aperti****; $\mathcal{F}$ è detta* ***topologia*** *su X se:*
i) $\emptyset$, $X \in \mathcal{F}$ (l'insieme vuoto e X sono aperti);
ii) $\forall\, U_i \in \mathcal{F}$ si ha $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{F}$ (un'unione arbitraria di aperti è un aperto);
iii) $\forall\, U_1, U_2 \in \mathcal{F}$ si ha $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F}$ (l'intersezione di due aperti, e quindi di un numero finito, è un aperto).
La coppia $(X, \mathcal{F})$ è detta ***spazio topologico****.*

Uno spazio topologico X si dice di **Hausdorff** se, per ogni coppia di punti $x, y \in X$, $x \neq y$, esistono due aperti U, V di X tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.[6]
Un'applicazione tra due spazi topologici è continua[7] se la controimmagine di un qualunque aperto nello spazio di arrivo è un aperto nello spazio di partenza.

In Analisi Funzionale risulta di grande importanza un'altra famiglia di spazi: gli spazi vettoriali topologici. Uno **spazio vettoriale topologico** (s.v.t.) V è uno spazio, simultaneamente vettoriale e topologico, in cui le operazioni sono continue nella topologia di V, cioé uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ e dotato di una topologia $\mathcal{T}$, tale che le applicazioni $V \times V \ni (v, w) \mapsto v + w \in V$ e $\mathbb{K} \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha v \in V$ siano continue, dove gli spazi prodotto sono muniti delle corrispondenti topologie prodotto.
Ogni spazio normato è uno spazio vettoriale topologico, mentre esistono spazi vettoriali topologici non normabili e non metrizzabili.
Dati due spazi vettoriali topologici V e W, si dice che V è **immerso con continuità** in W se V è un sottospazio vettoriale di W e se l'**immersione** di V in W, cioé l'applicazione $i : V \to W$, definita da

[6]Ricordiamo che ogni spazio metrico (X, d) (in particolare ogni spazio euclideo) è di Hausdorff: se $x \neq y$, allora $d(x, y) = d \neq 0$, e quindi gli intorni $B_{\frac{d}{2}}(x)$ e $B_{\frac{d}{2}}(y)$ soddisfano le proprietà richieste.
[7]Esistono diverse condizioni equivalenti di continuità per un'applicazione tra spazi topologici.

$x \mapsto x$, è continua.

Si dimostra che ogni spazio normato (così come ogni spazio metrico) può essere "completato".[8] Prima di capire cosa significa "completare" uno spazio normato ricordiamo alcune definizioni.
Dati due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y), un'applicazione $F : X \to Y$ è detta **isometria** se conserva le distanze, cioé se $d_Y(F(x), F(y)) = d_X(x, y)\ \forall\, x, y \in X$; X e Y si dicono **isometrici** se esiste un'isometria suriettiva di X su Y.
Dati due spazi vettoriali X e Y, un **isomorfismo (algebrico)** di X su Y è un'applicazione $L : X \to Y$ lineare e biunivoca (che conserva le strutture algebriche); X e Y si dicono **(algebricamente) isomorfi** se esiste un isomorfismo algebrico di X su Y.
Dati due spazi normati $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, un *isomorfismo* di X su Y è un isomorfismo algebrico $L : X \to Y$ tale che L e L^{-1} siano funzioni continue. In particolare, un isomorfismo si dice *isometrico* quando è anche un'isometria rispetto alle metriche indotte dalle rispettive norme. I due spazi normati sono **isomorfi** se esiste un isomorfismo del primo sul secondo, e sono **isometricamente isomorfi** se esiste un isomorfismo isometrico del primo sul secondo. Se X e Y sono isometricamente isomorfi, essi possono essere identificati da un punto di vista astratto, e differiscono solo per la natura dei loro elementi. In definitiva, se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono due spazi normati, un'applicazione lineare $L : X \to Y$ è un'isometria se e solo se $\|Lx\|_Y = \|x\|_X\ \forall\, x \in X$, e X, Y sono isometricamente isomorfi se L è suriettivo; tale operatore, in realtà, risulta anche iniettivo; l'inieittività segue infatti dalla linearità dell'operatore e dalla definizione di isometria: se $Ax_1 = Ax_2$ si ha $A(x_1 - x_2) = 0$, da cui $\|A(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\| = 0$ e, quindi, $x_1 = x_2$. La definizione quindi diventa: X e Y sono isometricamente isomorfi se esiste un operatore lineare biettivo $A : X \to Y$ che conserva le norme.[9]

Dato uno spazio metrico X, un **completamento** di X è uno spazio

[8] Lo spazio metrico completo "più piccolo" contenente uno spazio X viene detto completamento di X.

[9] A seconda del testo considerato la definizione richiede la suriettività o la biunivocità.

metrico completo Y che contiene un sottoinsieme denso G, isometrico ad X. Dato uno spazio normato X, un **completamento** di X è uno spazio di Banach Y che contiene un sottospazio denso G, isometricamente isomorfo a X.
Ogni spazio metrico (rispettivamente normato) ha almeno un completamento e due completamenti qualunque sono isometrici (rispettivamente, isometricamente isomorfi). Quindi il completamento di uno spazio metrico (normato) è unico a meno di isometrie (isomorfismi isometrici). Visto che il completamento è, essenzialmente, unico, spesso si parla, appunto, de *il* completamento, piuttosto che di *un* completamento.

Esempio 1.4. *Dato uno spazio topologico X, consideriamo lo spazio $C_c(X)$ di tutte le funzioni continue $f : X \to \mathbb{R}$ il cui supporto*[10] *è compatto, con la norma del max; in generale, $C_c(X)$ non è completo. Sappiamo che un completamento esiste: indichiamo con $C_0(X)$ il completamento di $C_c(X)$ rispetto alla norma del sup; chiaramente, se X é compatto, si ha $C_0(X) = C_c(X) = C(X)$.*
In modo analogo si definiscono gli spazi $C_c(X; \mathbb{R}^m)$ e $C_0(X; \mathbb{R}^m)$ delle funzioni $u : X \to \mathbb{R}^m$ le cui componenti appartengono, rispettivamente, a $C_c(X)$ e a $C_0(X)$.

Definizione 1.2. *Sia X uno spazio vettoriale. Due norme $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ su X si dicono* ***equivalenti*** *se esistono due costanti $k_1, k_2 > 0$ tali che si abbia*

$$k_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq k_2||x||_1 \quad \forall\, x \in X.$$

Osserviamo che nella definizione avremmo potuto scrivere, equivalentemente $k_1||x||_2 \leq ||x||_1 \leq k_2||x||_2$ $\forall\, x \in X$.
L'equivalenza fra norme è una relazione d'equivalenza.
Due norme equivalenti su uno spazio X sono *topologicamente equivalenti*, cioé inducono su X la stessa topologia. Vale anche il viceversa: se due norme inducono su X la stessa topologia, allora soddisfano la

[10] Il supporto è la chiusura dell'insieme in cui la funzione non si annulla.

Definizione 1.1. Infatti, dire che due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono topologicamente equivalenti significa dire che l'applicazione identica $i : X \to X$ di X in se stesso è continua quando X è dotato di una qualunque di queste due norme, diciamo $\|\cdot\|_1$ per esempio, se viene pensato come dominio di i, mentre è dotato dell'altra norma, $\| \|_2$, se è pensato come codominio dell'identità i. Ricordando la definizione di operatore lineare continuo/limitato (si veda il capitolo successivo) si ottiene che le norme sono equivalenti. Dunque si può affermare che la condizione necessaria e sufficiente affinché le norme $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ siano equivalenti è che l'applicazione identica di X su X sia un isomorfismo degli spazi normati $(X, ||\cdot||_1)$ e $(X; ||\cdot||_2)$.

Un sottospazio vettoriale di uno spazio normato è esso stesso uno spazio normato rispetto alla norma indotta su di esso. Esso è detto **sottospazio normato** dello spazio normato X.

Richiamiamo il

Teorema 1.1 (Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$)**.** *In $\mathbb{R}^N$ ogni successione limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.*[11]

Consideriamo ora, in particolare, gli spazi normati di dimensione finita, per i quali valgono alcuni risultati che, in generale, non si estendono agli spazi di dimensione infinita.

Teorema 1.2. *Se X è uno spazio vettoriale reale*[12] *normato di dimensione finita, due qualunque norme in X sono equivalenti.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ una base in X. Allora ogni elemento $x \in X$ si potrà rappresentare nella forma $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$, $x_i \in \mathbb{R}$. Poiché l'equivalenza tra norme è una relazione d'equivalenza, è sufficiente provare che una qualunque norma $||\cdot||$ in X è equivalente a una norma

[11] Esiste anche un'altra formulazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass: *ogni sottoinsieme limitato e infinito in $\mathbb{R}^N$ possiede almeno un punto di accumulazione.*

[12] Il Teorema vale anche per spazi vettoriali complessi, ma qui e nel seguito consideriamo spazi vettoriali reali.

particolare, per esempio la norma $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.[13] Si ha $||x|| = ||\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i|| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \; ||\mathbf{e}_i|| \leq c||x||_1$, dove $c = \max_{1\leq i\leq n} ||\mathbf{e}_i||$.
Ora dobbiamo trovare un'altra costante c_1 tale che $\|x\| \geq c_1\|x\|_1$. Supponiamo per assurdo che non sia così, e che esista una successione $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty = \left\{\sum_{i=1}^n x_i^{(k)}\mathbf{e}_i\right\}_{k=1}^\infty$ di elementi di X tale che $||x^{(k)}||_1 > k||x^{(k)}|| \; \forall k \in \mathbb{N}$, da cui $\dfrac{||x^{(k)}||}{||x^{(k)}||_1} < \dfrac{1}{k}$. Posto $u^{(k)} = \dfrac{x^{(k)}}{||x^{(k)}||_1}$, si ha che $||u^{(k)}|| < \dfrac{1}{k}$ e $||u^{(k)}||_1 = 1 \; \forall k$. Allora le successioni $\left\{u_i^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, ..., n$, essendo limitate, ammettono ciascuna, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, una sottosuccessione (che denotiamo ancora con $\left\{u_i^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$) convergente in $\mathbb{R}$, cioé $u_i^{(k)} \to \lambda_i \in \mathbb{R}$ per $k \to \infty$, $i = 1, ..., n$. Posto $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i\mathbf{e}_i$ (u limite di $u^{(k)}$ in $\| \; \|_1$), risulta che u è contemporaneamente nullo e non nullo. Infatti, essendo $||u|| \leq ||u - u^{(k)}|| + ||u^{(k)}|| \leq c||u - u^{(k)}||_1 + \dfrac{1}{k}$, per $k \to \infty$ si ottiene $||u|| \leq 0$, da cui segue $||u|| = 0$. D'altra parte, poiché

$$\big|||u||_1 - 1\big| = \big|||u||_1 - ||u^{(k)}||_1\big| \leq ||u - u^{(k)}||_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i - u_i^{(k)}|$$

(dove nella disuguaglianza è stata usata la proprietà 1) della norma, e dove l'ultimo uguale segue dalla definizione di $\|\cdot\|_1$), passando al limite per $k \to \infty$ si ottiene $||u||_1 = 1$. Essendo arrivati a una contraddizione, si ha che, $\forall x \in X$, $||x|| \geq c_1||x||_1$. $\square$

Osservazione 1.1. *Si può dimostrare che in uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita si possono sempre introdurre due norme non equivalenti.*

Esempio 1.5. *Sia $X = C([0,1])$, con $||x|| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$ e $||x||_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$: risulta $||x||_1 \leq ||x|| \; \forall x \in X$. Consideriamo ora la successione $x_n(t) = t^n$ (le funzioni t^n sono linearmente indipendenti al variare di n, quindi generano uno spazio di dimensione infinita, lo spazio dei polinomi): si ha $\dfrac{||t^n||}{||t^n||_1} = n + 1 \to \infty$ per $n \to \infty$. Quindi le*

[13] Osserviamo che, in dimensione infinita, $||x||_1$ non è più una norma (non vale, in generale, la disuguaglianza triangolare).

due norme non sono equivalenti.

Corollario 1.3. *Ogni spazio normato X di dimensione finita è completo.*

Dimostrazione. Sia $\dim(X) = n$ e fissiamo in X la stessa base scelta prima; allora ogni $x \in X$ si potrà rappresentare come $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$; sia $\{x^{(k)}\}$ una successione di Cauchy in X rispetto alla norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (essendo X di dimensione finita, tutte le norme sono equivalenti, e quindi scegliamo, per esempio, questa norma), cioé

$$\|x^{(l)} - x^{(m)}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(l)} - x_i^{(m)}| \longrightarrow 0 \quad \text{per } l, m \to \infty.$$

Allora per ogni $i = 1, \ldots, n$ la successione $\{x_i^{(k)}\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, cioé

$$x_i^{(k)} \longrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \text{per } k \to \infty,\ i = 1, \ldots, n.$$

Risulta quindi (se $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_1$)

$$\|x^{(k)} - x\|_1 = \left\| x^{(k)} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e_i} \right\|_1$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - \lambda_i) \mathbf{e_i} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - \lambda_i| \longrightarrow 0 \quad \text{per } k \to \infty,$$

da cui segue la tesi. □

In base a quanto dimostrato risulta quindi che ogni spazio vettoriale reale (o complesso) di dimensione N è isomorfo a $\mathbb{R}^N$ (o $\mathbb{C}^N$); tutte le norme di uno spazio finito-dimensionale inducono la stessa topologia (la topologia euclidea), che è completa.

Corollario 1.4. *Un sottospazio vettoriale E di dimensione finita di uno spazio normato X è chiuso.*[14]

[14] Ricordiamo che un sottospazio metrico $E \subset X$ di uno spazio metrico completo X è completo se e solo se è chiuso in X.
Un sottoinsieme E di uno spazio metrico X è chiuso se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Esempio 1.6. *Se $X = C([0,1])$ ed E è l'insieme dei polinomi definiti in $[0,1]$*[15]*, E è un sottospazio vettoriale non chiuso; infatti, il limite uniforme di un polinomio non è detto che sia un polinomio. Per esempio, si ha $\sum_{n=0}^{k} \dfrac{x^n}{n!} \to e^x$ per $k \to \infty$, quindi la successione $\{x_k\}$ in E non è convergente in E.*
Risulta che la chiusura di E rispetto alla norma del max (che è quella che induce la convergenza uniforme) coincide con $C([0,1])$: il Teorema di approssimazione di Weierstrass afferma, infatti, che l'insieme dei polinomi $P([0,1])$ è denso in $C([0,1])$ (può essere formulato anche rimpiazzando $P([0,1])$ con l'insieme $P([a,b])$ dei polinomi nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e $C([0,1])$ con $C([a,b])$).

Corollario 1.5. *Sia X uno spazio normato, ed E un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita. Allora, $\forall x \in X$, esiste $x_0 \in E$ che realizza la distanza di x a E, cioé tale che $||x - x_0|| = d(x, E)$, dove $d(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y)$.*

Questo risultato può essere applicato allo spazio $C([a,b])$ alla luce del Teorema di approssimazione Weierstrass: per ogni funzione $x(t)$ continua in $[a,b]$ esiste un polinomio $x_0(t) \in P([a,b])$ di grado opportuno (diciamo n, e quindi $x_0(t)$ appartiene al sottospazio di dimensione finita $P^n([a,b])$[16] di $C([a,b])$) tale che $\max_{t \in [a,b]} |x(t) - x_0(t)| = ||x - x_0|| = d(x(t), P^n([a,b]))$, cioé un polinomio (di grado opportuno n) che dà la migliore approssimazione della funzione $x(t)$ rispetto a tutti gli altri polinomi di grado non superiore a n.

Definizione 1.3. *Si chiama* ***spazio di Hilbert*** *uno spazio vettoriale H dotato di prodotto scalare, tale che H sia completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare.*

Uno spazio di Hilbert viene in genere denotato con la lettera H.
Ricordiamo che, dato uno spazio vettoriale (reale) X, un prodotto

[15] Lo spazio dei polinomi $P([0,1])$ di grado qualunque ha dimensione infinita.
[16] Lo spazio dei polinomi $P^n([a,b])$ di grado non superiore a n ha dimensione pari a $n+1$ (è generato da $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$).

scalare è una forma bilineare (lineare in entrambe le variabili) $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:
i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \; \forall \, u, v \in X$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ è simmetrica);
ii) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se $u = 0$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definita positiva).

In uno spazio dotato di prodotto scalare si può infatti sempre introdurre una norma (detta **norma indotta dal prodotto scalare**) definita da

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad \forall \, u \in X.$$

Ricordiamo che il prodotto scalare soddisfa la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \quad \forall \, u, v \in H.$$

1.3 Disuguaglianze ausiliarie

Lemma 1.6 (disuguaglianza di Young)**.** *Siano p e q numeri reali, p, $q > 1$, legati dalla relazione*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

*p e q si dicono **esponenti coniugati**. Allora, $\forall \, a, b \in \mathbb{R}$, sussiste **la disuguaglianza** (di **Young**)*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{1.1}$$

Il segno di uguale vale se e solo se $a^p = b^q$.

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che, se a (o b) è nullo, la disuguaglianza è banale. Si può inoltre ritenere che a e b siano positivi. Sfruttiamo la convessità[17] della funzione esponenziale:

$$ab = e^{\log(ab)} = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q} = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\log b^q}$$

[17] Una funzione f di variabile reale definita su un intervallo si dice convessa se, $\forall \, x, y$ appartenenti a tale intervallo si ha $f[tx + (1-t)y] \leq tf(x) + (1-t)f(y) \; \forall \, t \in [0,1]$. Più in generale, si può definire una funzione convessa su un insieme convesso in uno spazio vettoriale reale.

$$\leq \frac{1}{p} e^{\log a^p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

La (1.1) diventa un'uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$. Infatti si ha

$$ab = a(b^q)^{\frac{1}{q}} = a\, a^{\frac{p}{q}} = a^{1+\frac{p}{q}} = a^p = a^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Osserviamo che, a volte, è più comodo scrivere la disuguaglianza di Young nella forma $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b,\ a, b \geq 0,\ \lambda \in [0,1]$, dove l'uguale vale se e solo se $a = b$.
Citiamo anche il seguente risultato.

Lemma 1.7. *(disuguaglianza di Young con ϵ).*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q, \qquad a, b > 0,\ \epsilon > 0,$$

con $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}}\, q^{-1}$.

Dimostrazione. Per dimostrarla basta esprimere $ab = \left((\epsilon p)^{\frac{1}{p}} a\right) \dfrac{b}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p}}}$ e usare la disuguaglianza di Young.

□

Lemma 1.8 (Disuguaglianza di Hölder)**.** *Siano $a_1, ..., a_n$ e $b_1, ..., b_n$ numeri reali arbitrari, e siano p e q esponenti coniugati. Allora sussiste la disuguaglianza*

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dimostrazione. Posto $A = (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ e $B = (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{\frac{1}{q}}$, si ha che, se $A = 0$ oppure $B = 0$, allora $a_k = 0$ o, rispettivamente, $b_k = 0$ per $k = 1, \ldots, n$, e la disuguaglianza è banale. Supponiamo allora che $A, B > 0$. Posto $a'_k = \dfrac{a_k}{A}$ e $b'_k = \dfrac{b_k}{B}$, dalla disuguaglianza di Young si ha

$$|a'_k b'_k| \leq \frac{|a'_k|^p}{p} + \frac{|b'_k|^q}{q},$$

e, sommando per k da 1 a n si trova

$$\sum_{k=1}^{n} |a'_k b'_k| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} |a'_k|^p}{p} + \frac{\sum_{k=1}^{n} |b'_k|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \; .$$

Da ciò segue che $\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq AB$, c.v.d. □

Osserviamo che la disuguaglianza di Hölder è valida anche se il numero degli addendi è infinito numerabile, cioé è valida la disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} , \tag{1.2}$$

dove la convergenza del membro a destra comporta la convergenza del membro a sinistra. Infatti, la disuguaglianza è dimostrata per le somme parziali delle serie che compaiono nella (1.2), e quindi il passaggio al limite per $n \to \infty$ conduce alla (1.2).

I teoremi che seguono vengono enunciati in un generico spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$,[18] ma verranno utilizzati nel seguito considerando, in

[18] Uno **spazio misurabile** è una terna $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ dove Ω è un insieme arbitrario, $\mathcal{M}$ è una $\sigma-$algebra in Ω e μ è una misura.
Una $\sigma-$**algebra** in Ω è una famiglia non vuota $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di Ω tale che:
i) $\emptyset \; , \Omega \in \mathcal{M}$;
ii) $\forall \, A, B \in \mathcal{M}$ si ha $A \setminus B \in \mathcal{M}$;
iii) $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M} \; \forall \, A_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2, \ldots$.
Dalla definizione di σ-algebra segue (usando le leggi di De Morgan) che, se $A_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2, \ldots$ allora anche $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$. Osserviamo, inoltre, che una $\sigma-$algebra può essere definita anche richiedendo nella i) che soltanto $\emptyset \in \mathcal{M}$ (o $\Omega \in \mathcal{M}$) e sostituendo la ii) con la richiesta che, se $A \in \mathcal{M}$, anche il suo complementare $A^C \in \mathcal{M}$. Dalle proprietà delle operazioni sugli insiemi si deduce che $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto alle operazioni fondamentali definite sugli insiemi, e in particolare rispetto all'unione e all'intersezione numerabile.
Una **misura** (detta a volte *misura positiva*) è una funzione $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e *numerabilmente additiva*, non negativa, cioé tale che, per qualunque famiglia numerabile di insiemi $A_i \in \mathcal{M}$ a due a due disgiunti si ha

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Gli elementi di $\mathcal{M}$ sono detti **insiemi misurabili**. La misura si dice **finita** se $\mu(\Omega) < \infty$; si dice $\sigma-$**finita** se Ω è rappresentabile come unione di una famiglia numerabile di insiemi $A_i \in \mathcal{M}$ tali che $\mu(A_i) < \infty \; \forall \, i \in \mathbb{N}$.
Un insieme $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$ è detto **insieme nullo** o **insieme di misura nulla**. Si dice che una proprietà è valida **quasi ovunque** (q.o.), o che vale per **quasi ogni** $x \in \Omega$, se è valida in Ω tranne che in un suo sottoinsieme di misura nulla.
Si può inoltre definire il concetto di *funzione misurabile* (una funzione tra due spazi misu-

particolare, il caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{M}$ è la famiglia di insiemi Lebesgue misurabili e μ è la misura di Lebesgue.

Lemma 1.9 (Disuguaglianza integrale di Hölder). *Siano $x(t)$ e $y(t)$ funzioni misurabili su uno spazio con misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, e siano p e q esponenti coniugati. Allora vale la disuguaglianza*

$$\int_\Omega |x(t)y(t)|d\mu \leq \left(\int_\Omega |x(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |y(t)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dimostrazione. Si può supporre che

$$0 < A^p = \int_\Omega |x(t)|^p d\mu < \infty, \quad 0 < B^q = \int_\Omega |y(t)|^q d\mu < \infty,$$

cioé che nessuno dei due integrali sia uguale a zero o a infinito, perché in tal caso la disuguaglianza da dimostrare sarebbe banale.
Posto $\widetilde{x}(t) = \dfrac{x(t)}{A}$ e $\widetilde{y}(t) = \dfrac{y(t)}{B}$, dalla disuguaglianza di Young segue che, $\forall t \in \Omega$,

$$|\widetilde{x}(t)\widetilde{y}(t)| \leq \frac{|\widetilde{x}(t)|^p}{p} + \frac{|\widetilde{y}(t)|^q}{q}$$

e, integrando, si trova

$$\int_\Omega |\widetilde{x}(t)\widetilde{y}(t)|d\mu \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\widetilde{x}(t)|^p d\mu + \frac{1}{q}\int_\Omega |\widetilde{y}(t)|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

da cui

$$\int_\Omega |x(t)y(t)|d\mu \leq AB,$$

c.v.d. □

Osserviamo che, come per la disuguaglianza nel caso delle somme, il fatto che gli integrali nel membro a destra siano finiti implica che anche l'integrale del membro a sinistra sia finito.

rabili è misurabile se per ogni insieme misurabile dello spazio di arrivo la controimmagine è un insieme misurabile nello spazio di partenza) e di *funzione integrabile* rispetto alla misura μ. Lo spazio delle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabili rispetto a μ si indica con $L^1(\Omega, \mu)$ e l'integrale di f in Ω con $\int_\Omega f\, d\mu$. Due funzioni che coincidono q.o. vengono identificate.

Se $p = 2$ (e quindi anche $q = 2$), la disuguaglianza di Hölder per la somma si riduce alla disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

mentre la disuguaglianza integrale di Hölder diventa

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |x(t)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |y(t)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}},$$

che non sono altro che che le disuguaglianze di Cauchy-Schwarz (talvolta note anche come *disuguaglianze di Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky*) per le somme e gli integrali.

Lemma 1.10 (Disuguaglianza di Hölder generalizzata)**.** *Siano p, q, r numeri reali positivi legati dalla relazione*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Allora, qualunque siano le funzioni misurabili $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ date sull'insieme Ω, è verificata la disuguaglianza

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)z(t)| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |x(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |y(t)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |z(t)|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Dimostrazione. Definiamo p' dalla relazione $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r}$. Allora, siccome $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, dalla disuguaglianza di Hölder si ha

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)z(t)| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |x(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |y(t)z(t)|^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Applicando nuovamente la disuguaglianza di Hölder con indici $\dfrac{q}{p'}$ e $\dfrac{r}{p'}$ ($\dfrac{p'}{q} + \dfrac{p'}{r} = 1$) si ottiene

$$\int_{\Omega} |y(t)z(t)|^{p'} d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |y(t)|^{p' \frac{q}{p'}} d\mu \right)^{\frac{p'}{q}} \left(\int_{\Omega} |z(t)|^{p' \frac{r}{p'}} d\mu \right)^{\frac{p'}{r}}$$

che, sostituita nella disuguaglianza precedente, dà la formula che si voleva ottenere. □

La disuguaglianza di Hölder generalizzata è valida anche per le somme. La disuguaglianza di Hölder nella forma più generale possibile è

$$\int_\Omega \left| \prod_{k=1}^{n} x_k(t) \right| d\mu \leq \prod_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega |x_k(t)|^{p_k} d\mu \right)^{\frac{1}{p_k}},$$

dove $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = 1$.

Lemma 1.11 (Disuguaglianza di Minkowsky). *Se $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono successioni numeriche reali, allora vale la disuguaglianza*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Dimostrazione. Si può supporre che le somme che compaiono nella disuguaglianza abbiano un numero finito di termini (il passaggio alle serie si effettua poi mediante il passaggio al limite). Inoltre, ci si può limitare al caso in cui $p > 1$ (per $p = 1$ la disuguaglianza segue dalla disuguaglianza triangolare per il modulo) e tutti gli a_k e b_k siano non negativi. Sotto tali ipotesi, considerando la somma per k cha va da 1 a n si ha

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1}.$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder ad ogni somma del secondo membro si trova (con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dal fatto che q è esponente coniugato con p si ha $q(p-1)=p$; quindi, moltiplicando entrambi i membri dell'ultima disuguaglianza per $[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p]^{-\frac{1}{q}}$, si ha

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

che è la disuguaglianza che volevamo dimostrare, essendo $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$.
La disuguaglianza è valida $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e quindi anche per $n \to \infty$. □

Lemma 1.12 (Disuguaglianza integrale di Minkowsky)**.** *Se $x(t)$ e $y(t)$ sono funzioni misurabili su Ω, vale la disuguaglianza*

$$\left(\int_\Omega |x(t)+y(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega |x(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |y(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \ge 1.$$

Dimostrazione. Per $p=1$ la disuguaglianza è banale. Consideriamo allora il caso $p>1$.
Se uno degli integrali a secondo membro è infinito, la disuguaglianza è evidente.
Se l'integrale e primo membro è infinito, sfruttiamo la disuguaglianza numerica ottenuta dalla (1.2), dove p e q sono esponenti coniugati, con due soli termini, e dove $(a_1,a_2)=(|a|,|b|)$ e $(b_1,b_2)=(1,1)$, cioé $|a_1b_1|=|a|\cdot 1$ e $|a_2b_2|=|b|\cdot 1$:

$$|a|+|b| \le (|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}(1^q+1^q)^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{1}{q}}(|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Sfruttando quest'ultima maggiorazione (elevata a p) si ricava

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x(t)+y(t)|^p d\mu &\le \int_\Omega (|x(t)|+|y(t)|)^p\, d\mu \\ &\le 2^{\frac{p}{q}}\left(\int_\Omega |x(t)|^p d\mu + \int_\Omega |y(t)|^p d\mu\right)\end{aligned}$$

e, quindi, almeno uno dei due integrali a secondo membro risulta infinito.
Pertanto, possiamo supporre che tutti gli integrali siano finiti, e la dimostrazione si effettua secondo lo schema della dimostrazione della disuguaglianza di Minkowsky per le somme. □

Osserviamo che le disuguaglianze di Hölder e di Minkowsky per successioni sono casi particolari delle rispettive disuguaglianze integrali. Per convincersene basta infatti prendere come spazio con misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ l'insieme dei numeri naturali, con la misura dei punti uguali all'unità.

Capitolo 2

Operatori lineari

Consideriamo due spazi vettoriali X e Y sul campo $\mathbb{R}$; un'applicazione $A : X \to Y$ si dice **operatore lineare** se A è lineare, cioé se $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \; \forall \, x, y \in X$ e $\forall \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se $Y = \mathbb{R}$, essa si dirà **forma lineare** o **funzionale lineare** (il primo termine è più spesso usato in geometria, il secondo in analisi).

Esempio 2.1. *Gli operatori* $A : C[0,1] \to C^1[0,1]$ *(*intergrale indefinito*) e* $B : C^1[0,1] \to C[0,1]$*(*derivata*) definiti rispettivamente da* $Ax(t) := \int_0^t x(s)\, ds$ *e* $Bx(t) := x'(t)$ *sono lineari.*
Gli operatori $Ax = \int_0^1 x(t)\, dt$, $x \in C[0,1]$ *e* $Bx := x'(0)$, $x \in C^1[0,1]$ *sono forme lineari.*

Siano X e Y spazi vettoriali normati. Un operatore lineare $A : X \to Y$ è detto **limitato** se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\|Ax\|_Y \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

La più piccola delle costanti M che soddisfano la precedente disuguaglianza è detta **norma** dell'operatore A, cioé

$$\|A\| = \inf\{M > 0 : \|Ax\| \leq M\|x\| \; \forall \, x \in X\}.^1$$

[1]Talvolta si definisce anche $\|A\| = \min\{M \geq 0 : \|Ax\| \leq M\|x\| \; \forall \, x \in X\}$; in tal caso il minimo esiste sempre dato che l'insieme considerato è chiuso, limitato, e non vuoto (si prende in considerazione anche il caso banale in cui la costante M sia nulla, il che equivale a dire che la norma di A è nulla.

La norma di un operatore A può essere definita in vari modi equivalenti; infatti si ha

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0,\ x\in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Inoltre, osservando che $A(\lambda x) = \lambda A(x)\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall\, x \in X$, segue che

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \left\| \frac{A(x)}{\|x\|} \right\| = \sup_{x\neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Ancora, poiché $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$ e poiché, $\forall x$ tale che $\|x\| \leq 1$ si ha $\|Ax\| \leq \|A\|$, si ha anche

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|. \tag{2.1}$$

Nel seguito useremo una di queste definizioni a seconda della convenienza.

Osserviamo che la limitatezza di un operatore A può essere espressa anche tramite la seguente definizione: *un operatore lineare è limitato se e solo se trasforma insiemi limitati*[2] *in X in insiemi limitati in Y.* Infatti, se A è limitato, preso $E \subset X$ limitato, si ha $\|x\| \leq k\ \forall x \in E \subset X$ per qualche k; allora $\|Ax\| \leq M\|x\| \leq kM$, che significa che l'immagine di E tramite A è limitato in Y. Viceversa, supponiamo che $A : X \to Y$ mandi insiemi limitati in insiemi limitati; per comodità, consideriamo la bolla chiusa unitaria (che è un insieme limitato $E \subset X$): $\forall\, x \in E$ si ha $\|x\| \leq 1$. Dall'ipotesi segue che, se $y \in A(E)$, allora esiste $M > 0$ tale che $\|y\| \leq M$ (l'immagine di E è limitata in Y). Consideriamo, ora, $x \in X$, $x \neq 0$; dato che $\frac{x}{\|x\|} \in E$, si ha

$$\|Ax\| = \left\| A\left(\frac{x\ \|x\|}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\|\ \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq M\|x\|,$$

da cui segue che A è limitato.

A questo punto possiamo dire che un operatore lineare si dice limitato se la sua norma è finita.

[2] Un insieme $E \subseteq X$ si dice limitato se il suo diametro $(\mathrm{diam}(E) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in E\})$ è finito, oppure se esiste un intorno di un punto $x \in X$ che contiene E.

Spesso ad essere chiamate funzionali lineari sono soltanto le forme lineari limitate. Inoltre, si sottolinea il fatto che un operatore sia "non limitato", quando si considera un operatore che non è limitato.

Si chiama operatore lineare **illimitato** (o **non limitato**) un operatore lineare A dallo spazio normato X allo spazio normato Y definito su un sottospazio vettoriale $D(A) \subset X$ di X, a valori in Y. L'insieme $D(A)$ è chiamato **dominio** dell'operatore A. Quindi, A è detto limitato se $D(A) = X$ (il suo dominio è l'intero spazio X) e se $\|Ax\| \leq M\|x\|$ per ogni $x \in X$ e per qualche M. Può accadere, cioé, che un operatore lineare illimitato sia, in realtà, un operatore limitato. Sembra un giro di parole, ma questa terminologia è di uso comune e non dovrebbe creare confusione.

Osserviamo anche che un operatore lineare limitato non è, in generale, una funzione limitata, a meno che l'operatore in questione non sia l'operatore nullo. Dato $A : X \to Y$ con X, Y spazi vettoriali normati, non nullo, la sua immagine $A(X)$ non può essere un insieme limitato di Y: infatti, sia $x_0 \in X$ tale che $Ax_0 \neq 0$; allora, dato che $A(tx_0) = tAx_0$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$, segue che $\sup_{x \in X} \|Ax\| = +\infty$. In effetti, A è limitato se $\sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M < \infty$ per ogni $x \in X$, ma con $x \neq 0$ (non per ogni $x \in X$).

Esempio 2.2. *Consideriamo l'operatore derivata $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$, dotando $C^1[0,1]$ non della norma usuale (lagrangiana), ma della norma del max, la stessa norma di $C[0,1]$. Per $x(t) = t^n$ si ha $Ax(t) = nt^{n-1}$, da cui*

$$\frac{\|Ax\|_C}{\|x\|_C} = \frac{\max_{t\in[0,1]} |x'(t)|}{\max_{t\in[0,1]} |x(t)|} = n \to \infty \quad \textit{per } n \to \infty.$$

Quindi l'operatore A è non limitato (osserviamo che $C^1[0,1]$ è uno spazio di dimensione infinita).
Considerando, invece, la norma usuale in $C^1[0,1]$ si ha

$$\frac{\|Ax\|_C}{\|x\|_{C^1}} = \frac{\max_{[0,1]} |x'(t)|}{\max_{[0,1]} |x'(t)| + \max_{[0,1]} |x(t)|} = \frac{n}{n+1} \leq 1.$$

Ricordiamo anche che $C^1[0,1]$ è di Banach con la norma lagrangiana ma non con la norma del max.

Vale la seguente

Proposizione 2.1. *Siano X, Y spazi vettoriali normati e sia X di dimensione finita. Allora ogni operatore lineare A da X in Y è limitato.*

Dimostrazione. Sia X di dimensione n, e sia $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ una sua base; se $x = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e_i}$, poiché in uno spazio normato di dimensione finita due qualunque norme sono equivalenti esiste una costante c indipendente da x tale che (usando anche la linearità di A) $\forall x \in X$ si abbia

$$\|Ax\| = \left\| A\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e_i}\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i A(\mathbf{e_i})\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|A(\mathbf{e_i})\|$$

$$\leq \max_{i=1,\dots,n} \|A(\mathbf{e_i})\| \sum_{i=1}^n |x_i| = M\|x\|_1 \leq Mc\|x\| = c_1\|x\|.$$

□

Osserviamo che se X ha dimensione infinita, l'operatore può non essere limitato, come mostrato nell'Esempio 2.2. Inoltre, può essere limitato o no a seconda della norma considerata nello spazio di partenza.

Un operatore $A : X \to Y$, con X e Y spazi vettoriali normati è detto **continuo** in x_0 se $x \to x_0$ in X implica $Ax \to Ax_0$ in Y;[3] A si dice continuo in X se è continuo in ogni punto di X. La definizione di continuità in un punto è analoga a quella data per funzioni reali di variabile reale, o a quella che si dà in uno spazio metrico (qui si usa la norma al posto della metrica): detto in termini di epsilon e delta, si ha che $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, se $\|x - x_0\| < \delta$, allora $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$.
A è detto **uniformemente continuo** in X se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che, $\forall\, x_1,\ x_2 \in X$ con $\|x_1 - x_2\| < \delta$ risulta $\|Ax_1 - Ax_2\| < \varepsilon$. Quindi, per ogni coppia di punti "vicini" in X, le loro immagini tramite l'operatore rimangono "vicine" in Y.

[3] Oppure, A è continuo in x_0 se, per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in X tale che $x_n \to x_0$ in X si abbia $Ax_n \to Ax_0$ in Y.

Esempio 2.3. *Consideriamo l'operatore integrale* $A : C[a, b] \to C^1[a, b]$ *che associa a* $f(t)$ *la sua funzione integrale* $F(t)$*:*

$$\|Af\|_{C^1[a,b]} = \max_{[a,b]} |F(t)| + \max_{[a,b]} |F'(t)| = \max_{[a,b]} \left| \int_a^t f(s)\, ds \right| + \max_{[a,b]} |f(t)|$$
$$\leq \max_{[a,b]} |f(t)| \, [(b - a) + 1] = M\|f\|_{C[a,b]}.$$

Risulta dunque che l'operatore è limitato. Vediamo se è continuo: sia $\{f_n\}$ *una successione di funzioni convergente uniformemente in* $C[a, b]$*. Allora si può passare al limite sotto il segno di integrale*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^t f_n(s)\, ds = \int_a^t f(s)\, ds,$$

da cui segue che Af_n *converge uniformemente ad* Af*, cioé l'operatore è continuo.*

La limitatezza di un operatore implica la sua uniforme continuità, come dimostra la seguente

Proposizione 2.2. *Se un operatore lineare è limitato, allora è uniformemente continuo. Se un operatore lineare è continuo in un punto, allora è limitato.*

Dimostrazione. Sia A limitato. Allora

$$\|Ax_1 - Ax_2\| \leq \|A\| \, \|x_1 - x_2\| < \epsilon$$

per ogni coppia di elementi x_1, $x_2 \in X$ tali che $\|x_1 - x_2\| < \dfrac{\epsilon}{\|A\|}$, cioé A è uniformemente continuo.

Sia ora A continuo in x_0; allora $\forall \epsilon > 0$ (qui scegliamo $\epsilon = 1$) esiste $\delta > 0$ tale che $\|Ax - Ax_0\| < 1 \; \forall x$ tale che $\|x - x_0\| < \delta$. Posto, per ogni $y \in X$, $y \neq 0$, $z = \dfrac{\nu y}{\|y\|}$, con $0 < \nu < \delta$, si ha

$$\frac{\nu}{\|y\|} Ay = Az = A(z + x_0) - Ax_0,$$

da cui

$$Ay = [A(z + x_0) - Ax_0]\nu^{-1}\|y\|.$$

Passando alle norme, essendo $\|z\| = \nu < \delta$, segue

$$\|Ay\| \leq \nu^{-1}\|A(z + x_0) - Ax_0\|\,\|y\| \leq \nu^{-1}\|y\|,$$

cioé A è limitato. $\square$

Data l'equivalenza tra i concetti di continuità e limitatezza di un operatore lineare, in molti testi un operatore A si definisce continuo se e solo se esiste una costante $M > 0$ tale che $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X\ \forall\, x \in X$. Intuitivamente, poiché da ciò risulta che l'operatore A non può "allungare" il vettore $\mathbf{x}$ su cui è applicato di un fattore maggiore di M, allora l'immagine $A(E)$ di un insieme E limitato è limitata. A tal proposito osserviamo che se l'operatore lineare A è un'isometria, cioé conserva le norme ($\|Ax\|_Y = \|x\|_X$), allora esso è un operatore limitato di norma unitaria.

Dati due spazi normati X e Y, con X sottospazio vettoriale di Y. Allora l'*immersione* di X in Y è *continua* se e solo se esiste una costante $M > 0$ tale che $\|x\|_Y \leq M\|x\|_X$ per ogni $x \in X$.

Esempio 2.4. *Sia $A : l^1 \to \mathbb{R}$ tale che*[4] $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$*,* $x = \{x_n\}$*; A è lineare. Definendo in l^1 la norma indotta dal considerare l^1 come sottospazio di l^∞, A non è continuo*[5] *(e quindi neanche limitato). Infatti, posto $z^{(k)} = \{z_n^{(k)}\}$, con $z_n^{(k)} = \dfrac{1}{k}$ per $n = 1, \ldots, k$, $z_n^{(k)} = 0$ per $n > k$ si ha $A(z^{(k)}) = 1\ \forall\, k$, mentre $\|z^{(k)}\|_\infty = \dfrac{1}{k} \to 0$ per $k \to \infty$.*

Siano X, Y spazi vettoriali normati (o, più in generale, spazi metrici o spazi topologici). $\mathcal{L}(X, Y)$ denota lo **spazio di tutti gli operatori lineari continui** da X in Y. Se $X = Y$ si pone $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$.

[4] l^1 è lo spazio delle successioni sommabili (si veda il Capitolo 4).

[5] l^∞ è lo spazio delle successioni limitate (si veda il Capitolo 4).

Se $Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ è detto **spazio duale** di X e si indica con X^*.[6] Indicando con f un generico funzionale lineare di X^*, la dualità tra X e X^*, (detta anche *prodotto scalare per la dualità*[7] $X^*,\ X$) su $X^* \times X$ che a (f, x) associa $f(x)$ si denota, in genere, con $f(x)$ o $\langle f, x\rangle$, $\forall\, f \in X^*$ e $\forall\, x \in X$.
La norma

$$\|f\| = (\|f\|_{X^*}) = \sup_{\|x\|\le 1,\ x\in X} |f(x)| = \sup_{\|x\|\le 1,\ x\in X} f(x)^8 \tag{2.2}$$

è detta **norma duale** su X^* (che coincide con la definizione (2.1)).

Proposizione 2.3. *Sia X uno spazio vettoriale normato e Y uno spazio di Banach. Allora $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma duale.*
In particolare, X^* è uno spazio di Banach (nonostante X non lo sia!).

Dimostrazione. Definendo le operazioni

$$(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx \quad A, B \in \mathcal{L}(X, Y),\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},$$

$\mathcal{L}(X, Y)$ ha la struttura di spazio vettoriale: risulta infatti che $\alpha A+\beta B$ è un operatore lineare. Esso è anche limitato: infatti si ha

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax + Bx\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \big(\|Ax\| + \|Bx\|\big) \le \|A\| + \|B\|;$$

inoltre

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = |\lambda|\|A\|.$$

Per verificare che quella che stiamo considerando è una norma osserviamo infine che, se $\|A\| = 0$, allora $\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\| = 0$, da cui $Ax = 0$

[6] A volte, in alcuni testi, lo spazio duale (topologico) viene denotato con X', mentre con X^* viene denotato il duale algebrico di X, cioé lo spazio delle applicazioni lineari dallo spazio vettoriale (non necessariamente normato) X sul suo campo $\mathbb{K}$.

[7] Questo termine è usato in [1], pag. 3, ma il nome non deve trarre in inganno: l'applicazione $\langle\, ,\rangle : X^* \times X \to \mathbb{R}$ definita da $\langle f, x\rangle = f(x)$ non è un prodotto scalare ed è più comunemente chiamata *dualità* tra E^* e E. Essa è, in effetti, una forma bilineare, come si può facilmente verificare.

[8] Nel caso di spazi reali (la definizione in spazi $(X, \mathbb{K})$ è analoga) il modulo è superfluo dato che (per la linearità di f) $f(\pm x) = \pm f(x)$, uno di questi due numeri è non negativo e si ha $\|-x\| = \|x\|$.

$\forall\, x \in X$, cioé $A \equiv 0$ (operatore identicamente nullo) e, viceversa, se $A = 0$, $\|A\| = 0$.
Mostriamo infine che $\mathcal{L}(X,Y)$ è completo. Sia $\{A_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$; $\forall\, x \in X$ si ha, per la linearità e per la limitatezza, $\|A_n x - A_m x\|_Y \leq \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}}\, \|x\|_X$; quindi $\{A_n x\}$ è di Cauchy in Y e, essendo Y completo, essa converge a un elemento $y \in Y$. Poniamo $y = Ax$; dalla linearità degli operatori A_n $\forall\, n$ segue la linearità di A (passando al limite in n).
Mostriamo ora che A è limitato. Sappiamo che $\{A_n\}$ è di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$; quindi $\forall \epsilon > 0$ $\exists N = N(\epsilon)$ tale che, $\forall\, n,\ m \geq N$ si abbia $\|A_n - A_m\| < \epsilon$; quindi, posto $m = N$, si ha $\|A_n\| < \|A_N\| + \epsilon\ \forall\, n \geq N$; allora

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\|\|x\| < \big(\|A_N\| + \epsilon\big)\|x\|,$$

e quindi A è limitato.
Vogliamo mostrare ora che $A_n \to A$ in $\mathcal{L}(X,Y)$. $\forall\, n \geq N$ si ha

$$\|A_n x - Ax\| = \lim_{m\to\infty} \|A_n x - A_m x\| \leq \lim_{m\to\infty} \|A_n - A_m\|\, \|x\| < \epsilon\|x\|,$$

da cui segue che, $\forall\, n \geq N$,

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A_n - A)x\| < \epsilon,$$

cioé $A_n \to A$ per $n \to \infty$.

□

Consideriamo ora X, Y, Z spazi vettoriali normati, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. L'operatore $BA \in \mathcal{L}(X,Z)$ definito da $(BA)x = B(Ax)$ è detto **operatore prodotto**. Esso è limitato: si ha

$$\|(BA)x\|_Z \leq \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|Ax\|_Y \leq \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X;$$

quindi $\|BA\| \leq \|B\|\, \|A\|$.
Osserviamo che, se anche esiste l'operatore BA, può non esistere l'operatore AB e, se anche esistono entrambi, l'operazione di composizione non è commutativa: in generale, $BA \neq AB$. Vale, invece, la proprietà associativa.

Esempio 2.5. *Siano* $X = Y = Z = C[0,1]$, $s \in [0,1]$*; siano* $Ax = s\int_0^1 tx(t)\,dt$, $Bx = sx(s)$*. Risulta*

$$ABx = s\int_0^1 t^2x(t)\,dt \neq s^2\int_0^1 tx(t)\,dt = BAx.$$

Sia $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e siano I_X e I_Y gli operatori identità su X e Y rispettivamente. L'operatore $A_d^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ è detto **inverso destro** di A se $AA_d^{-1} = I_Y$; l'operatore $A_s^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ è detto **inverso sinistro** di A se $A_s^{-1}A = I_X$. Se esistono sia l'inverso destro che l'inverso sinistro di A, essi coincidono; infatti

$$A_s^{-1} = A_s^{-1}(AA_d^{-1}) = (A_s^{-1}A)A_d^{-1} = A_d^{-1}.$$

In tal caso, posto $A^{-1} = A_d^{-1} = A_s^{-1}$, si dice che A è **invertibile** e A^{-1} è detto **operatore inverso** di A. Se, inoltre, $X = Y$, A e A^{-1} commutano: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_X$.

Osserviamo che se $A \in \mathcal{L}(X)$ è invertibile allora l'equazione $y = Ax$ ammette una sola soluzione $x = A^{-1}y$; infatti, se x_1 fosse un'altra soluzione, cioé $Ax_1 = y$, moltiplicando a sinistra per l'inverso si otterrebbe $x_1 = A^{-1}y$. In particolare, l'esistenza dell'inverso destro garantisce l'esistenza (l'operatore A è suriettivo), mentre l'esistenza dell'inverso sinistro garantisce l'unicità (l'operatore A è iniettivo).

Esempio 2.6. *Consideriamo l'operatore integrale* $A : C[a,b] \to C^1[a,b]$, $Af = F(t) = \int_a^t f(s)\,ds$*. L'equazione* $Af = F$ *ammette un'unica soluzione:* A *è iniettivo e suriettivo e il suo inverso* $A^{-1} : C^1[a,b] \to C[a,b]$, $A^{-1}F = F' = f$ *è l'operatore derivata; si ha*

$$\begin{aligned}\|A^{-1}F\|_C = \max_{t\in[a,b]}|f(t)| &\leq \max_{t\in[a,b]}|f(t)| + \max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^t f(s)\,ds\right| \\ &= \max_{t\in[a,b]}|F'(t)| + \max_{t\in[a,b]}|F(t)| = \|F\|_{C^1},\end{aligned}$$

quindi l'operatore inverso è limitato.

Esempio 2.7. *Siano* $X = Y = l^2$ *e* $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$, *con*[9] $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$*;* A *è lineare. Osserviamo che l'equazione* $Ax = y$ *non ammette esistenza dato che l'inversa destra non esiste: se, infatti, la applicassimo otterremmo* $x = A_d^{-1} y$*, da cui risulterebbe che la successione* x *ha zero come termine iniziale, mentre non è detto che sia così. Per verificare l'unicità poniamo* $Ax^1 = Ax^2$*, da cui* $A(x^1 - x^2) = (0, \ldots, 0)$*, cioé* $x^1 = x^2$*; quindi l'inversa sinistra di* A *esiste.*
L'operatore $B : l^2 \to l^2$ $Bx = (x_1, x_2, \ldots)$*, con* $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$*, invece, possiede solo inverso destro: infatti* $B = A_s^{-1}$*.*

2.1 Teorema di Helly-Hahn-Banach e conseguenze

Teorema 2.1 (Teorema di Helly-Hahn-Banach, forma analitica[10])**.** *Sia* E *uno spazio vettoriale reale e sia* $p : E \to \mathbb{R}$ *un'applicazione tale che:*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall\, \lambda > 0 \text{ e } \forall\, x \in E \text{ (positiva omogeneità)} \tag{2.3}$$

e

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall\, x, y \in E \text{ (subadditività).}^{11} \tag{2.4}$$

Siano $G \subset E$ *un sottospazio vettoriale di* E *e* g *un funzionale lineare su* G *tale che*

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in G. \tag{2.5}$$

Allora esiste un funzionale lineare f *su* E *che prolunga (che estende)* g*, cioé tale che*

$$g(x) = f(x) \quad \forall\, x \in G \tag{2.6}$$

e

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in E. \tag{2.7}$$

La dimostrazione del teorema precedente si basa sul Lemma di Zorn: *Ogni insieme non vuoto, ordinato e induttivo (cioé tale che ogni suo*

[9] l^2 è lo spazio delle successioni a quadrato sommabile (si veda il Capitolo 4).
[10] Esiste anche una forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach ([1], Capitolo 1.2), che riguarda la separazione di insiemi convessi.
[11] Talvolta un funzionale con queste proprietà è chiamato **funzionale di Minkowski**.

sottoinsieme totalmente ordinato ammette un maggiorante) contiene un elemento massimale (cioé un elemento maggiore o uguale di tutti gli altri elementi con cui è confrontabile). Il Lemma di Zorn è una conseguenza dell'Assioma di scelta.
Il Teorema di Helly-Hahn-Banach è noto maggiormente come Teorema di Hahn-Banach.

Ricordiamo che un insieme X si dice *(parzialmente) ordinato* se in esso è definito un *ordine (parziale)* o una *relazione d'ordine (parziale)* (spesso denotata con $\leq$ o $\preceq$), cioé una relazione binaria tra gli elementi appartenenti all'insieme che gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva. In un ordine parziale non è detto che due elementi dell'insieme siano confrontabili. Se, invece, per ogni coppia di elementi $x, y \in X$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (o entrambi!), allora l'ordine è detto *totale*, e l'insieme è detto *totalmente ordinato*.
Un sottoinsieme totalmente ordinato di un insieme parzialmente ordinato è detto anche *catena*. Sia A un sottoinsieme di un insieme ordinato X: un elemento $c \in X$ è detto *maggiorante* per A se $a \leq c \; \forall \, a \in A$. Un elemento $m \in X$ è detto elemento *massimale* di X se non c'è nessun elemento $x \in X$ tale che $m \leq x$, a meno che $m = x$. Osserviamo che un elemento massimale per X non é necessariamente un maggiorante per X.
Un insieme X si dice *induttivo* se ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato (catena) ammette un maggiorante.

Dimostriamo ora il Teorema di Hahn-Banach:

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$X = \left\{ h : D(h) \subset E \to \mathbb{R} : \begin{cases} D(h) \text{ è un sottospazio vettoriale di } E \\ h \text{ è lineare, } G \subset D(h) \\ h \text{ estende } g \text{ e } h(x) \leq p(x) \; \forall \, x \in D(h) \end{cases} \right\}$$

e definiamo su X la seguente relazione d'ordine:

$$(h_1 \leq h_2) \quad \Leftrightarrow \quad (D(h_1) \subseteq D(h_2) \text{ e } h_2 \text{ estende } h_1).$$

Osserviamo che X non è vuoto, dato che $g \in X$. Mostriamo che X è induttivo: sia A un sottoinsieme totalmente ordinato di X; esprimiamo $A = \{h_i\}_{i \in I}$ e poniamo

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i), \quad h(x) = h_i(x) \quad \text{se } x \in D(h_i) \text{ per qualche } i.$$

Risulta che h è ben definita; inoltre, $h \in X$ e h è un maggiorante per A. Per il Lemma di Zorn, esiste quindi un elemento massimale $f \in X$. Per dimostrare il teorema basta mostrare che $D(f) = E$.
Supponiamo per assurdo che $D(f) \neq E$ e sia $x_0 \notin D(f)$; poniamo $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$ e, per ogni $x \in D(f)$, poniamo $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$, $t \in \mathbb{R}$, dove la costante $\alpha \in \mathbb{R}$ deve essere scelta in modo tale che $h \in X$. Si deve, cioé, avere che

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \quad \forall\, x \in D(f) \text{ e } \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Dato che p è positivamente omogenea, basta verificare che

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) & \forall\, x \in D(f) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) & \forall\, x \in D(f). \end{cases}$$

In altre parole, occorre trovare α tale che

$$\sup_{y \in D(f)} [f(y) - p(y - x_0)] \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} [p(x + x_0) - f(x)];$$

α con questa proprietà esiste: risulta

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x) \quad \forall\, y \in D(f) \text{ e } \forall\, x \in D(f);$$

l'ultima relazione segue infatti dalla subadditività di p:

$$f(x) + f(y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

Si ha, allora, che $f \leq h$, che non è possibile essendo f massimale e $f \neq h$. $\square$

Osserviamo che i funzionali lineari su E verificano le (2.3) e (2.4); inoltre, se $\{f_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di funzionali lineari su E, allora anche $p(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ soddisfa (2.3) e (2.4). Se E è uno spazio vettoriale normato, la norma è positivamente omogenea e subadditiva.

Alcune tra le più semplici e famose applicazioni del Teorema di Helly, Hahn-Banach riguardano il caso in cui E sia uno spazio vettoriale normato.

Corollario 2.2. *Sia E uno spazio vettoriale normato e $G \subset E$ un sottospazio vettoriale di E. Se $g : G \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare continuo (cioé $g \in G^*$), allora esiste $f \in E^*$ che estende g e conserva la norma, cioé tale che*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1,\ x \in G} |g(x)| = \|g\|_{G^*}.$$

Dimostrazione. Usiamo il Teorema 2.1 con $p(x) = \|g\|_{G^*}\|x\|$. Essendo

$$|\langle g, x\rangle| = |g(x)| \leq \|g\|_{G^*}\|x\| \quad \forall\, x \in G,$$

posto $p(x) = \|g\|_{G^*}\|x\|$, dal Teorema di Helly-Hahn-Banach esiste $f \in E^*$ che prolunga g, cioé tale che $f(x) = g(x)\ \forall\, x \in G\ |f(x)| \leq p(x)$ $\forall\, x \in E$, cioé $|f(x)| \leq \|g\|_{G^*}\|x\|\ \forall\, x \in E$. Dunque si ha $\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\in E} |f(x)| \leq \|g\|_{G^*}$.
D'altra parte

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1,\ x \in E} |f(x)| \geq \sup_{\|x\| \leq 1,\ x \in G} |g(x)| = \|g\|_{G^*},$$

da cui la tesi.

□

Il Corollario 2.2 spiega, in particolare, come è fatto il duale del sottospazio G: i suoi elementi sono tutte e sole le restrizioni degli elementi di E^* a G.[12]

[12] A tal proposito citiamo citiamo anche il seguente risultato: *Sia E uno spazio vettoriale normato e G un suo sottospazio vettoriale. Allora l'insieme $G^\perp = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle = 0\ \forall\, x \in G\}$ (detto **ortogonale** di G in E^*) è un sottospazio chiuso di E^*.*

Dimostrazione. Il sottoinsieme $G^\perp$ di E^* è un sottospazio vettoriale: ogni combinazione lineare di elementi di $G^\perp$ è ancora un elemento di $G^\perp$. Inoltre, esso è chiuso: se f_n converge a f in E^*, allora $\langle f_n, x\rangle$ converge a $\langle f, x\rangle$ per ogni $x \in E$. □

Corollario 2.3. *Sia E uno spazio vettoriale normato. Allora,* $\forall\, x_0 \in E$ $\exists\, f_0 \in E^*$ *tale che* $\|f_0\| = \|x_0\|$ *e* $\langle f_0, x_0\rangle \ = \|x_0\|^2$.

Dimostrazione. Nel corollario precedente poniamo $G = \mathbb{R}x_0 = \{tx_0 : t \in \mathbb{R},\ x_0 \in E\}$: esso è un sottospazio vettoriale di E ($G \subset E$ e inoltre è lineare per come è costruito); consideriamo l'applicazione $g : G \to \mathbb{R}$ definita da $g(tx_0) = t\|x_0\|^2 \ \forall\, t \in \mathbb{R}$: essa è lineare ed è continua, infatti

$$\|g(tx_0)\|_{\mathbb{R}} = |g(tx_0)| = |t\|x_0\|^2| = |t|\|x_0\|^2 = \|x_0\|\,\|tx_0\|$$

e, dalla definizione di norma di un operatore, segue che $\|g\|_{G^*}$ è proprio $\|x_0\|$. Dal Corollario 2.2 esiste $f_0 \in E^*$ che estende g e conserva la norma, cioé tale che $f_0(x) = g(x)\ \forall\, x \in G$, da cui si ricava $\langle f_0, tx_0\rangle = t\|x_0\|^2\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, da cui $\langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2$. Inoltre, $\|f_0\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}$, da cui $\|f_0\| = \|x_0\|$. $\square$

Osserviamo che l'elemento f_0 del Corollario 2.3 non è, in generale, unico. Si può dimostrare l'unicità, per esempio, nel caso in cui E sia uno spazio di Hilbert.[13]
Per ogni $x_0 \in E$ si pone

$$F(x_0) = \left\{ f_0 \in E^* : \|f_0\| = \|x_0\| \text{ e } \langle f_0, x_0\rangle \ = \|x_0\|^2 \right\}; \tag{2.8}$$

l'applicazione $F : E \to E^*$ definita in (2.8) è dunque, in generale, una multifunzione, detta **mappa di dualità**.
Dal Corollario 2.3 segue anche che, se $f(x_0) = 0\ \forall\, f \in E^*$, allora $x_0 = 0$.

Corollario 2.4. *Sia E uno spazio vettoriale normato. Allora,* $\forall\, x \in E$ *si ha*

$$\|x\| = \sup_{\|f\|\le 1,\ f\in E^*} |\langle f, x\rangle| = \max_{\|f\|\le 1,\ f\in E^*} |\langle f, x\rangle|. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $x \neq 0$; per ogni $f \in E^*$, da $|\langle f, x\rangle| \le \|f\|\,\|x\|$, si ha $\sup_{f\in E^*,\ \|f\|\le 1} |\langle f, x\rangle| \le \|x\|$. D'altra parte, per il Corollario 2.3, esiste $f_0 \in E^*$ tale che $\|f_0\| = \|x\|$ e $\langle f_0, x\rangle \ = \|x\|^2$. Posto $f_1 = \dfrac{f_0}{\|x\|}$, si ha $\|f_1\| = 1$ e $\left\langle \dfrac{f_0}{\|x\|}, x \right\rangle = \|x\|$, cioé $\langle f_1, x\rangle \ = \|x\|$. $\square$

[13] Si ha unicità anche nel caso in cui $E = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, come si vedrà nel seguito.

Osserviamo che la formula (2.2) (che è una definizione) non deve essere confusa con la formula (2.9), che è un'enunciato. In generale, il sup in (2.2) non viene raggiunto.[14]

Corollario 2.5. *Sia E uno spazio vettoriale normato e $G \subset E$ un sottospazio vettoriale normato di E la cui chiusura è strettamente contenuta in E. Se $x_0 \in E \setminus \overline{G}$, allora esiste $f \in E^*$ tale che $f \neq 0$, $f(x) = 0 \ \forall x \in G$, $f(x_0) = 1$ e $\|f\| = \frac{1}{d}$, dove $d =$dist(x_0, G) (in particolare, si ha $f_{|G} = 0$ e $f(x_0) \neq 0$).*

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio vettoriale

$$G + \mathbb{R}x_0 = \{y : y = x + tx_0, \ x \in G, \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Posto $g(y) = t$ si ha $g(x) = 0 \ \forall x \in G$ e $g(x_0) = 1$; g è lineare e

$$|g(y)| = |t| = \frac{|t| \, \|y\|}{\|x + tx_0\|} = \frac{\|y\|}{\big\|x_0 - \big(-\frac{x}{t}\big)\big\|} \leq \frac{\|y\|}{d};$$

infatti $\big\|x_0 - \big(-\frac{x}{t}\big)\big\| = \mathrm{dist}\big(x_0, -\frac{x}{t}\big)$ e

$$d = \mathrm{dist}(x_0, G) = \inf_{x \in G} d(x_0, x) = \inf_{x \in G} \|x_0 - x\| \leq \left\|x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right)\right\|;$$

quindi $\|g\| \leq \frac{1}{d}$. Sia ora $\{x_n\}$ una successione in G tale che $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = d$; si ha $1 = |g(x_n - x_0)| \leq \|g\| \, \|x_n - x_0\|$, da cui segue, per $n \to \infty$, che $1 \leq \|g\| \, d$; confrontando le due disuguaglianze si ottiene $\|g\| = \frac{1}{d}$. Per il Corollario 2.2 si può estendere g a tutto E, e quindi segue la tesi.

□

Il corollario precedente viene dimostrato in genere tramite la seconda forma geometrica del teorema di Hahn-Banach ed è spesso usato per dimostrare teoremi di densità.
Concentriamoci sulla prima delle conclusioni: *Sia E uno spazio vettoriale normato e $G \subset E$ un suo sottospazio tale che $\overline{G} \neq E$. Allora*

[14]Esso viene raggiunto se E è uno spazio di Banach riflessivo e, viceversa, se E è uno spazio di Banach tale che $\forall f \in E^*$ si raggiunge il sup nella (2.2) , allora E è riflessivo (per la definizione di spazio riflessivo si veda nel seguito).

esiste $f \in E^*$, $f \not\equiv 0$, tale che $f(x) = 0 \ \forall\, x \in G$.
Per dimostrare che G è denso in E basta allora mostrare che ogni funzionale lineare continuo su E che si annulla su G deve annullarsi su tutto E. Dunque possiamo enunciare il seguente

Corollario 2.6. *Sia E uno spazio vettoriale normato e $G \subset E$ un suo sottospazio. Allora G è denso in E se e solo se l'unico elemento $f \in E^*$ che si annulla su G è il funzionale nullo.*

Dimostrazione. Se f è il funzionale nullo di E^*, $f(x) = 0 \ \forall\, x \in E$, allora dal Corollario 2.5, si ha che $\overline{G} = E$.
Viceversa, sia $\overline{G} = E$. Fissato $x \in E$, sia $\{x_n\}$ una successione in G convergente a x tale che $f(x_n) = 0 \ \forall\, n$ per qualche $f \in E^*$; dalla continuità di f segue che $x = 0$, e lo stesso ragionamento si può ripetere per ogni $x \in E$. Quindi $f \equiv 0$. □

Ora, per dare la definizione di spazio riflessivo, consideriamo uno spazio vettoriale normato E e sia E^* il suo spazio duale con la norma (duale)

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Il duale di E^* è detto **biduale** di E ed è denotato con E^{**}. Esso è uno spazio normato con la norma

$$\|\xi\|_{E^{**}} = \sup_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|, \quad \xi \in E^{**}.$$

Esiste una **iniezione canonica** $J : E \to E^{**}$ così definita: fissato $x \in E$, l'applicazione $J_x(f) = \langle f, x \rangle$, $\forall\, f \in E^*$, è un funzionale lineare continuo su E^*, cioé un elemento di E^{**}, che viene denotata anche con Jx. Si ha

$$\langle Jx, f \rangle_{E^{**}, E^*} = \langle f, x \rangle_{E^*, E} \quad \forall\, x \in E, \ \ \forall\, f \in E^*.$$

La linearità di f implica la linearità d J; inoltre, dal Corollario 2.4 si ha

$$\|Jx\|_{E^{**}} = \sup_{f \in E^*, \ \|f\| \leq 1} |\langle Jx, f \rangle| = \sup_{f \in E^*, \ \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|_E,$$

e quindi J è un'isometria.[15]
Anche nel caso in cui J non sia suriettivo da E in E^{**} risulta spesso conveniente identificare E col sottospazio $J(E)$ di E^{**} tramite J. In particolare, se J è suriettivo, cioé se $J(E) = E^{**}$, si dice che E è uno **spazio riflessivo**, e E e E^{**} possono essere identificati.
L'iniezione canonica $J : E \to E^{**}$ è detta anche **isomorfismo canonico**. Il fatto che J sia suriettiva da E a $J(E)$ implica tre fatti:
i) condizione necessaria affinché E sia riflessivo è che sia (isometricamente) isomorfo a E^{**} (ma non ogni spazio (isometricamente) isomorfo al suo biduale è riflessivo (si veda [3]);
ii) ogni spazio riflessivo è completo (perché è isometricamente isomorfo a un duale, che è completo);
iii) la chiusura di $J(E)$ in E^{**} è un completamento di E.

2.2 Principio di uniforme limitatezza

Richiamiamo ora un teorema classico che avrà un ruolo essenziale nel seguito.

Lemma 2.7 (Lemma (della categoria) di Baire)**.** *Sia X uno spazio metrico completo e $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di sottoinsiemi chiusi in X. Supponiamo che Int$(X_n) = \emptyset$ $\forall\, n \geq 1$. Allora Int$(\cup_{n=1}^{\infty} X_n) = \emptyset$.*

Osserviamo che spesso il Teorema della categoria di Baire viene usato nella forma seguente: *Siano X uno spazio metrico completo non vuoto e $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di sottoinsiemi chiusi tali che $\cup_{n=1}^{\infty} X_n = X$. Allora esiste un n_0 tale che Int$(X_{n_0}) \neq \emptyset$.*

Teorema 2.8 (Principio di uniforme limitatezza o Teorema di Banach-Steinhaus)**.** *Siano E e F due spazi di Banach e sia $\{T_i\}_{i\in I}$ una famiglia (non necessariamente numerabile) di operatori lineari continui da E in F (cioé $T_i \in \mathcal{L}(E, F)$). Se*

[15] Ricordiamo nuovamente che un'isometria tra due spazi vettoriali normati è un'applicazione lineare che conserva la norma. Le isometrie sono dunque funzioni continue e iniettive.

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty \quad \forall\, x \in E \tag{2.10}$$

allora

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty, \tag{2.11}$$

cioé esiste una costante $c > 0$ *tale che*

$$\|T_i x\| \le c\|x\| \quad \forall\, x \in E,\ \forall\, i \in I.$$

Osservazione 2.1. *Questo principio è notevole: permette di ottenere una stima globale (uniforme) a partire da una stima puntuale.*

Dimostrazione. Per ogni $n \ge 1$ sia

$$X_n = \{x \in E : \forall\, i \in I,\ \|T_i x\| \le n\};$$

X_n è chiuso e, dall'ipotesi (2.10), si ha $\cup_{n=1}^{\infty} X_n = E$. Dal Teorema delle categorie di Baire segue che $\mathrm{Int}(X_{n_0}) \ne \emptyset$ per qualche $n_0 \ge 1$. Siano $x_0 \in E$ (in particolare, $x_0 \in \mathrm{Int}(X_{n_0})$) e $r > 0$ tali che $B_r(x_0) \subset X_{n_0}$. Si ha

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \le n_0 \quad \forall\, i \in I \text{ e } \forall\, z \in B_1(0),$$

che conduce a

$$r\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le n_0 + \|T_i x_0\|,$$

da cui si ha la (2.11). □

Osservazione 2.2. *Ricordiamo che, in generale, il limite puntuale di una successione di funzioni continue non è necessariamente una funzione continua, quindi la linearità dei* T_i *qui svolge un ruolo essenziale. Dal teorema non segue, infatti, che* $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}} \to 0$ *(per qualche* T*) per* $n \to \infty$ *(nel caso particolare in cui* $I = \mathbb{N}$ *e la famiglia* $\{T_i\}$ *sia una successione di operatori).*

Corollario 2.9. *Siano E e F spazi di Banach e sia $\{T_n\}$ una successione di operatori lineari continui da E in F tali che, $\forall\, x \in E$, $T_n x$ converge per $n \to \infty$ a un limite che denotiamo con Tx. Allora:*
i) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$*;*
ii) $T \in \mathcal{L}(E,F)$*;*
iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Dimostrazione. i) Segue direttamente dal Teorema 2.8: essendo la successione $\{T_n x\}$ convergente, e quindi limitata ($\sup_n \|T_n x\| < \infty\ \forall\, x \in E$), esiste $c > 0$ tale che

$$\|T_n x\| \leq c\|x\| \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall\, x \in E. \tag{2.12}$$

ii) Passando al limite per $n \to \infty$ nella (2.12) si ha $\|Tx\| \leq c\|x\|$ $\forall\, x \in E$, e quindi T è limitato; T è anche lineare (segue dalla linearità dei T_n passando al limite), quindi $T \in \mathcal{L}(E,F)$.
iii) Si ha $\|T_n x\| \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}}\|x\|\ \forall\, x \in E$; passando al limite per $n \to \infty$ si trova $\|Tx\| \leq \|x\| \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}}\ \forall\, x \in E$ da cui, essendo $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1, x\in E} \|Tx\|$, segue $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$.

□

Corollario 2.10. *Sia G uno spazio di Banach e B un sottoinsieme di G. Se, per ogni $f \in G^*$ l'insieme*

$$f(B) = \langle f, B\rangle = \cup_{x\in B}\{\langle f, x\rangle\} \text{ è limitato (in } \mathbb{R}) \tag{2.13}$$

allora B è limitato in G.

Dimostrazione. Usiamo il Teorema di Banach-Steinhaus con $E = G^*$, $F = \mathbb{R}$ e $I = B$. $\forall\, b \in B$ poniamo $T_b(f) = \langle f, b\rangle\ \forall\, f \in E = G^*$; dall'ipotesi (2.13), valida per ogni $f \in G^*$, si ha $\sup_{b\in B} |T_b(f)| < \infty$ $\forall\, f \in G^*$. Dal Teorema 2.8 esiste una costante $c > 0$ tale che $|\langle f, b\rangle| \leq c\|f\|\ \forall\, f \in G^*$ e $\forall\, b \in B$. Quindi, dal Corollario 2.4 si ha $\|b\| = \sup_{\|f\|\leq 1,\ f\in G^*} |\langle f, b\rangle| \leq c\ \forall\, b \in B$. □

Il Corollario 2.10 afferma che per dimostrare che un insieme B è limitato basta "guardare" B tramite i funzionali lineari limitati. Questo è un procedimento familiare negli spazi a dimensione finita, dove i funzionali lineari sono le componenti rispetto a una data base. In un certo senso questo corollario rimpiazza l'uso di queste componenti in dimensione infinita. Talvolta la conclusione del Corollario 2.10 si esprime dicendo che un insieme è "debolmente limitato" se e solo se è "fortemente limitato" (si capirà meglio questa dicitura nel seguito).

Corollario 2.11. *Sia G uno spazio di Banach e B^* un sottoinsieme di G^*. Se, per ogni $x \in G$, l'insieme*

$$B^*(x) = \langle B^*, x \rangle = \{\langle f, x \rangle : \ f \in B^*\}^{16} \text{ è limitato (in } \mathbb{R}) \tag{2.14}$$

allora B^* è limitato in G^*.

Dimostrazione. Usiamo il Teorema di Banach-Steinhaus con $E = G$, $F = \mathbb{R}$ e $I = B^*$. $\forall\, b \in B^*$ poniamo $T_b(x) = \langle b, x \rangle \ \forall\, x \in G$; dall'ipotesi (2.14), valida per ogni $x \in G$, segue che $\sup_{b \in B^*} |\langle b, x \rangle| < \infty \ \forall\, x \in G$. Dal Teorema 2.8 esiste allora una costante $c > 0$ tale che $|\langle b, x \rangle| \leq c\|x\|$ $\forall\, b \in B^*$ e $\forall\, x \in G$. Dalla definizione di norma duale si ha $\|b\|_{B^*} = \sup_{\|x\| \leq 1,\ x \in G} |\langle b, x \rangle| \leq c \ \forall\, b \in B^*$.

□

2.3 Teorema della mappa aperta

Teorema 2.12 (Teorema della mappa aperta)**.** *Siano E e F due spazi di Banach e $T : E \to F$ un operatore lineare continuo e suriettivo. Allora esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$T(B_E(0, 1)) \supset B_F(0, c) \tag{2.15}$$

Il precedente teorema implica che l'immagine di un qualunque insieme aperto in E tramite T è un insieme aperto in F. Infatti, sia U aperto in E; fissato un punto $y_0 \in T(U)$ tale che $y_0 = T(x_0)$ per qualche $x_0 \in E$, sia $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset U$, cioé $x_0 + B(0, r) \subset U$. Allora risulta $y_0 + T(B(0, r)) \subset T(U)$ e, dalla (2.15), segue che $T(B(0, r)) \supset B(0, rc)$ e quindi che $B(y_0, rc) \subset T(U)$, cioé $T(U)$ è aperto.

[16] O, analogamente, l'insieme $\cup_{f \in B^*}\{\langle f, x \rangle\}$.

Corollario 2.13. *Siano E e F due spazi di Banach e $T : E \to F$ un operatore lineare continuo, iniettivo e suriettivo. Allora anche $T^{-1} : F \to E$ è continuo.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi che T sia iniettivo, usando la (2.15) segue che, se $x \in E$ è scelto in modo tale che $\|Tx\| < c$, allora $\|x\| < 1$. Dall'omogeneità segue allora che $\|x\| \leq \frac{1}{c}\|Tx\|\ \forall\, x \in E$, e quindi T^{-1} è continuo. $\square$

Corollario 2.14. *Sia E uno spazio vettoriale dotato di due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, di Banach rispetto a entrambe le norme ed esista una costante $C \geq 0$ tale che $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1\ \forall\, x \in E$.*
Allora le due norme sono equivalenti, cioé esiste una costante $c > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2\ \forall\, x \in E$.

Dimostrazione. Segue dal Corollario 2.13 con $E = (E, \|\cdot\|_1)$, $F = (E, \|\cdot\|_2)$ e $T = I$.

$\square$

Teorema 2.15 (Teorema del grafico chiuso)**.** *Siano E e F due spazi di Banach e sia $T : E \to F$ un operatore lineare. Se il grafico $G(T)$ di T è un insieme chiuso in $E \times F$, allora T è continuo.*

Osserviamo che l'implicazione inversa è ovvia: infatti il grafico di una qualunque applicazione continua (lineare o non lineare) è un insieme chiuso.

2.4 Topologie deboli

Sia X un insieme qualunque (senza nessuna struttura algebrica) e $\{Y_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici; data una famiglia di applicazioni $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ tali che, $\forall\, i \in I$, $\varphi_i : X \to Y_i$, vogliamo costruire una topologia su X che renda le φ_i continue; anzi, se possibile, vogliamo trovare una topologia $\mathcal{F}$ che sia "la più economica", cioé che abbia il numero minore di aperti. Si dimostra che, dotando X della topologia discreta (in cui ogni sottoinsieme di X é un aperto), ogni applicazione

φ_i risulta continua; naturalmente, però, questa topologia è ben lontana dall'essere "la più economica", dato che ha il maggior numero di aperti possibile.
Si dimostra che esiste sempre una (unica) topologia "più economica" su X per la quale ogni φ_i è continua: essa è chiamata **la topologia più debole**[17] (o, talvolta, *topologia iniziale*[18]) associata alla famiglia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$.
Esplicitamente, la topologia iniziale può essere vista come la topologia generata dagli insiemi $\varphi_i^{-1}(U_i)$, dove U_i è un aperto di Y_i per qualche i, che rispetto all'intersezione finita e all'unione arbitraria sia la meno fine.[19]

Consideriamo l'insieme X dotato della topologia iniziale $\mathcal{F}$ (la topologia più debole associata alla famiglia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$). Vale la seguente proprietà:

Proposizione 2.4. *Sia $\{x_n\}$ una successione in X. Allora $x_n \to x$ (in $\mathcal{F}$) se e solo se $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ $\forall\, i \in I$.*

Proposizione 2.5. *Siano Z uno spazio topologico e ψ un'applicazione da Z in X. Allora ψ è continua se e solo se $\varphi_i \circ \psi$ è continua da Z in Y_i $\forall\, i \in I$.*

Sia E uno spazio di Banach[20] e $f \in E^*$. Denotiamo con $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Al variare di f in E^* si ottiene una famiglia $\{\varphi_f\}_{f\in E^*}$ di funzioni da E in $\mathbb{R}$. Ignoriamo l'usuale topologia in E (associata alla norma in E) e definiamo una nuova topologia sull'insieme E come segue:

Definizione 2.1. *La **topologia debole** $\sigma(E, E^*)$ su E è la topologia più debole associata alla famiglia $\{\varphi_f\}_{f\in E^*}$ (nel senso detto prima con*

[17] La topologia che in analisi è chiamata *più debole* è quella che, in genere, in topologia è detta *meno fine*.
[18] Talvolta è chiamata anche *topologia limite* o *topologia proiettiva*.
[19] Per la costruzione di tale topologia, si veda [1], pag. 55.
[20] Si può dare la stessa definizione in uno spazio vettoriale normato E qualunque (o, più in generale, in uno spazio vettoriale topologico), ma seguiamo [1].

$X = E$, $Y_i = \mathbb{R}\ \forall\, i$ e $I = E^*$).[21]

Proposizione 2.6. *La topologia debole $\sigma(E, E^*)$ è di Hausdorff.*

Osserviamo che ogni φ_f è continua per la topologia usuale su E (quella associata alla norma $\|\ \|_E$), e quindi la topologia debole è più debole della topologia usuale. La topologia debole è cioé la topologia meno fine (cioé con meno aperti) che rende continui tutti gli elementi di E^*.

Data una successione $\{x_n\}$ di elementi di E, se x_n converge a x nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$ si dice che x_n **converge debolmente** a x in $\sigma(E, E^*)$ (o, più brevemente, che x_n converge debolmente a x in E), e si scrive $x_n \rightharpoonup x$. Per distinguerla dalla convergenza debole, a volte si chiama **convergenza forte** la convergenza in norma (cioé, si dice che $x_n \to x$ fortemente se $\|x_n - x\| \to 0$).
Si dimostra (usando Teorema di Helly-Hahn-Banach) l'unicità del limite debole.

Proposizione 2.7. *Sia $\{x_n\}$ una successione in E. Allora:*
i) $x_n \rightharpoonup x$ in $\sigma(E, E^*)$ se e solo se $f(x_n) \to f(x)\ \forall\, f \in E^*$;
ii) se $x_n \to x$ fortemente, allora $x_n \rightharpoonup x$;
iii) se $x_n \rightharpoonup x$, allora $\{\|x_n\|\}$ è limitata e $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$;[22]
iv) se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f$ in E^*, allora $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Dimostrazione. La i) segue dalla Proposizione 2.4 e dalla definizione di topologia debole.

La ii) segue da i); infatti $\forall\, f \in E^*$ si ha $|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq \|f\|\,\|x_n - x\|$. Inoltre, segue anche da fatto che la topologia debole è più debole della topologia forte.

[21] Negli spazi vettoriali topologici (tra cui gli spazi vettoriali normati), la topologia iniziale è chiamata, appunto, topologia debole ed è la topologia iniziale rispetto ai funzionali lineari continui (cioé i funzionali dello spazio duale).

[22] Questa proprietà si esprime spesso dicendo che la norma è *debolmente semicontinua inferiormente.*

Per provare la $iii)$ si usa uno dei corollari del Principio di uniforme limitatezza. Dall'ipotesi segue che $f(x_n) \to f(x)$ (per $n \to \infty$) $\forall f \in E^*$; allora, essendo la successione $\{\langle f, x_n \rangle\}_n$ convergente, essa è limitata, quindi si ha che $\forall f \in E^*$ l'insieme $\cup_{n \in \mathbb{N}} \{\langle f, x_n \rangle\}$ è limitato e, per il Corollario 2.10, anche l'insieme $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitato. Inoltre, passando al limite nella disuguaglianza

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\| \; \|x_n\|$$

si ottiene

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \; \liminf_n \|x_n\|.$$

Allora, per il Corollario 2.4 si ha

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \liminf_n \|x_n\|.$$

La $iv)$ segue dalla disuguaglianza

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| &\leq |\langle f_n - f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n - x \rangle| \\ &\leq \|f_n - f\| \; \|x_n\| + |\langle f, x_n - x \rangle|, \end{aligned}$$

usando anche $i)$ e $iii)$.

□

In uno spazio vettoriale normato di dimensione finita la topologia debole $\sigma(E, E^*)$ e la topologia usuale sono le stesse;[23] in particolare, le nozioni di convergenza forte e convergenza debole sono equivalenti. Vale infatti il

Teorema 2.16. *Sia E finito-dimensionale. Allora, una successione $\{x_n\}$ converge debolmente se e solo se converge fortemente.*

Dimostrazione. Nella Proposizione 2.9 abbiamo già mostrato che la convergenza forte implica la convergenza debole.
Dimostriamo il viceversa. Sia $x_n \rightharpoonup x$ e $\dim(E) = m$; allora $x =$

[23] Si veda [1, Proposizione 3.6], pag. 58.

$\sum_{i=1}^m a_i\mathbf{e_i}$ e $x_n = \sum_{i=1}^m a_i^{(n)}\mathbf{e_i}$, dove $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_m}\}$ è una base in E. Consideriamo i funzionali $f_i \in E^*$ tali che $f_i(x) = a_i$, $i = 1, \dots, m$, $\forall\, x \in E$. Dato che $x_n \rightharpoonup x$ in $\sigma(E, E^*)$, in particolare si ha che $f_i(x_n) \to f_i(x)$, cioé $a_i^{(n)} \to a_i$ in $\mathbb{R}$.[24] Detto $M = \max_{i=1,\dots,m} \|\mathbf{e_i}\|$, si ha

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{i=1}^m (a_i^{(n)} - a_i)\mathbf{e_i} \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^m |a_i^{(n)} - a_i| \|\mathbf{e_i}\| \leq M \sum_{i=1}^m |a_i^{(n)} - a_i|,$$

che tende a zero per $n \to \infty$.[25]

□

Osservazione 2.3. *Osserviamo che insiemi aperti (rispettivamente, chiusi) nella topologia debole sono sempre insiemi aperti (rispettivamente, chiusi) nella topologia forte. In ogni spazio di dimensione infinita la topologia debole è strettamente meno fine (cioé strettamente più debole, più "economica") della topologia forte: esistono, cioé, insiemi aperti (rispettivamente, chiusi) nella topologia forte che non sono aperti (rispettivamente, chiusi) nella topologia debole.*

Esempio 2.8. *La* sfera unitaria $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$, *con E infinito-dimensionale, non è mai chiusa nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$; più precisamente, risulta che la sua chiusura rispetto a $\sigma(E, E^*)$ è l'insieme $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.*[26]

Esempio 2.9. *Si trova che la bolla unitaria $U = \{x \in E : \|x\| < 1\}$, con E infinito-dimensionale, non è mai aperta nella topologia debole*

[24] Più in generale, vale il seguente risultato: *se $x_n \rightharpoonup x$, allora esiste una successione di combinazioni lineari finite degli x_n* (che in questo caso abbiamo indicato con $x_n = \sum_{i=1}^m a_i^{(n)} e_i$) *che converge fortemente ad x*. Risulta infatti che x appartiene alla chiusura dello spazio vettoriale generato dalla successione $\{x_n\}$, cioé alla chiusura dell'insieme delle combinazioni lineari finite degli x_n. Se così non fosse, come conseguenza del Teorema di Helly-Hahn-Banach (Corollario 2.3 con $\|x_0\| = 1$) esisterebbe $f \in E^*$, $f(x) = 1$, tale che $f(x_n) = 0\ \forall, n$, contro l'ipotesi che $f(x_n) \to f(x)\ \forall\, f \in E^*$.

[25] Una dimostrazione alternativa è fornita in [1], pag. 58.

[26] Si veda [1], pag. 59.

$\sigma(E, E^*)$. Supponiamo per assurdo che U sia debolmente aperto; allora il suo complementare $U^c = \{x \in E : \|x\| \geq 1\}$ è debolmente chiuso. Segue allora che anche $S = \{x \in E : \|x\| \leq 1\} \cap \{x \in E : \|x\| \geq 1\}$ è debolmente chiuso, che contraddice l'Esempio 2.8.

Osservazione 2.4. *In alcuni casi può accadere che la classe delle successioni debolmente convergenti coincida con la classe delle successioni fortemente convergenti (è quello che accade in l^1).*[27]

Osservazione 2.5. *In uno spazio di dimensione infinita la topologia debole non è MAI* metrizzabile. *Non esiste cioé nessuna metrica su E (e quindi nessuna norma) che induca su E la topologia debole $\sigma(E, E^*)$.*[28]

Abbiamo visto che un insieme debolmente chiuso è fortemente chiuso, mentre il viceversa è falso (in spazi vettoriali normati di dimensione infinita). È però utile sapere che per insiemi convessi[29] il concetto di "debolmente chiuso" equivale a "fortemente chiuso". Vale il[30]

Teorema 2.17. *Sia E uno spazio di Banach e C un sottoinsieme convesso di E. Allora C è chiuso nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$ se e solo se esso è chiuso nella topologia forte.*

Un altro importante risultato è il seguente:

Teorema 2.18. *Siano E e F due spazi di Banach e sia $T : E \to F$ un operatore lineare. Se T è continuo nelle topologie forti, allora T è continuo da E dotato della topologia debole $\sigma(E, E^*)$ a F dotato della topologia debole $\sigma(F, F^*)$, e viceversa.*

[27] Si veda l'osservazione 4 in [1], pag. 60.

[28] Si ha però che, se E^* è separabile, si può definire una norma su E che induce la topologia debole sugli insiemi limitati di E. Per maggiori dettagli si veda [1], pag. 60.

[29] Dato uno spazio vettoriale normato E, $C \subset E$ è convesso se, per ogni coppia di punti $x, y \in C$, l'insieme delle combinazioni lineari convesse $\{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$ è interamente contenuto in C.

[30] Per la dimostrazione ([1], pag. 60) si usa la forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach.

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 2.5, basta mostrare che, per ogni $f \in E^*$, l'applicazione $x \mapsto \langle f, Tx \rangle$ è continua da E con la topologia debole $\sigma(E, E^*)$ a $\mathbb{R}$. Ma tale applicazione è un funzionale lineare continuo su E, quindi è anche continuo nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$. Viceversa, supponiamo che T sia continuo da E con $\sigma(E, E^*)$ a F con $\sigma(F, F^*)$. Allora $G(T)$ è chiuso in $E \times F$ dotato della topologia prodotto $\sigma(E, E^*) \times \sigma(F, F^*)$, che coincide con la topologia $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$. Segue che $G(T)$ è fortemente chiuso (ogni insieme debolmente chiuso è fortemente chiuso). Dal Teorema del grafico chiuso segue allora che T è continuo da E dotato della topologia forte a F dotato della topologia forte. □

Osservazione 2.6. *Il precedente ragionamento mostra anche qualcos'altro: se T è un operatore lineare continuo da E con la topologia forte in F con la topologia debole, allora T è continuo da E in F con le topologie forti. Di conseguenza, per gli operatori lineari le seguenti proprietà di continuità sono le stesse: $S \to S$, $W \to W$, $S \to W$ (dove S sta per forte e W per debole). D'altra parte, davvero pochi operatori lineari sono continui $W \to S$: questo accade se e solo se T è continuo $S \to S$ e, inoltre, se dim$(R(T)) < \infty$.*[31]

Osserviamo anche che, in generale, applicazioni non lineari continue da E con la topologia forte a F con la topologia forte non sono continue da E con la topologia debole a F con la topologia debole.

2.5 La topologia debole*

Fin qui, possiamo considerare due topologie su E^*: la topologia usuale (topologia forte) associata alla norma di E^* e la topologia debole $\sigma(E^*, E^{**})$, che si ottiene in modo analogo a quanto fatto su E per definire $\sigma(E, E^*)$.
Vogliamo definire ora una terza topologia su E^*, chiamata **topologia debole*** e denotata con $\sigma(E^*, E)$ (qui * è messa per ricordare che questa topologia è definita solo sugli spazi duali). Per ogni $x \in E$ consideriamo il funzionale lineare $\varphi_x : E^* \to \mathbb{R}$ definito da $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$;

[31] R(T) indica l'immagine di T (si veda [1], pag. 43).

al variare di $x \in E$ si ottiene una famiglia $\{\varphi_x\}_{x\in E}$ di applicazioni da E^* in $\mathbb{R}$.

Definizione 2.2. *La* ***topologia debole**** $\sigma(E^*, E)$ *è la topologia più debole su* E^* *associata alla famiglia* $\{\varphi_x\}_{x\in E}$ *(nel senso detto nel paragrafo precedente con* $X = E^*$, $Y_i = \mathbb{R}\ \forall\, i$ *e* $I = E$*).*

Proposizione 2.8. *La topologia debole** *è di Hausdorff.*

Essendo $E \subset E^{**}$, è chiaro che la topologia debole* $\sigma(E^*, E)$ in E^* è più debole della topologia debole $\sigma(E^*, E^{**})$ in E^*; la topologia $\sigma(E^*, E)$ ha cioé meno insiemi aperti (rispettivamente, insiemi chiusi) della topologia $\sigma(E^*, E^{**})$, che a sua volta ha meno insiemi aperti (rispettivamente, insiemi chiusi) della topologia forte.

L'importanza delle topologie deboli sta nel fatto che una topologia più debole è una topologia con meno insiemi aperti, e quindi con più insiemi compatti.[32] Gli insiemi compatti hanno un ruolo fondamentale nella dimostrazione dei teoremi di esistenza.

Data una successione $\{f_n\}$ in E^*, se f_n converge a f nella topologia debole* si scrive $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$. Per non creare confusione, a volte si enfatizza $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $\sigma(E^*, E)$, $f_n \rightharpoonup f$ in $\sigma(E^*, E^{**})$ e $f_n \to f$ fortemente.
Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, il limite f è unico.

Proposizione 2.9. *Sia* $\{f_n\}$ *una successione in* E^**. Allora:*
i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *in* $\sigma(E^*, E)$ *se e solo se* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle\ \forall\, x \in E$*;*
ii) se $f_n \to f$ *fortemente, allora* $f_n \rightharpoonup f$ *in* $\sigma(E^*, E^{**})$*; se* $f_n \rightharpoonup f$ *in* $\sigma(E^*, E^{**})$*, allora* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *in* $\sigma(E^*, E)$*;*
iii) se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$*, allora* $\{\|f_n\|\}$ *è limitata e* $\|f\| \le \liminf_n \|f_n\|$*;*[33]

[32] Ricordiamo che un insieme si dice compatto se da ogni ricoprimento mediante aperti è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Dato uno spazio topologico X e $A \subset X$, un ricoprimento di A è una famiglia di sottoinsiemi $\{U_i\}_{i\in I}$ di X tale che $\bigcup_{i\in I} U_i \supset A$. Ricordiamo anche che un sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso (quindi, in un qualunque spazio metrico ogni compatto è chiuso).
Per convincersi che una topologia con meno aperti (e quindi più debole), abbia più insiemi compatti si vedano (piú avanti) i teoremi di Riesz e di Banach-Alouglu-Bourbaki.

[33] Questa proprietà afferma che la norma è *debolmente* semicontinua inferiormente.*

iv) se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $\sigma(E^*, E)$ e se $x_n \to x$ fortemente in E, allora $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

La dimostrazione delle proprietà precedenti è analoga a quella usata per dimostrare le proprietà nella convergenza debole.

Dimostrazione. i) Segue dalla definizione di convergenza nella topologia iniziale.

ii) Sia $f_n \to f$ in E^* (f_n converge fortemente a f). Per ogni $\xi \in E^{**}$ si ha

$$|\langle \xi, f_n \rangle - \langle \xi, f \rangle| = |\langle \xi, f_n - f \rangle| \leq \|\xi\| \, \|f_n - f\|.$$

Dato che $\|f_n - f\| \to 0$, segue che $\langle \xi, f_n \rangle \to \langle \xi, f \rangle \ \forall \, \xi \in E^{**}$ (cioé f_n converge debolmente a f).
Sia, ora, $f_n \rightharpoonup f$ in E^*; si ha (per il legame tra le dualità)

$$|\langle Jx, f_n \rangle - \langle Jx, f \rangle| = |\langle f_n, x \rangle - \langle f, x \rangle|$$

per ogni $Jx \in E^{**}$ e per ogni $x \in E$. Dato che $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$, segue la tesi.

iii) Essendo $\{\langle f_n, x \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, essa è limitata. Allora, per il Corollario 2.11, $\{f_n\}_n$ è limitata. Inoltre,

$$\langle f_n, x \rangle \leq \|f_n\| \|x\|;$$

passando al limite per $n \to \infty$ si ha

$$\langle f, x \rangle \leq \|x\| \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|;$$

per definizione di norma duale si trova

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle f, x \rangle \leq \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|.$$

iv) Si ha

$$|\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| = |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f_n, x \rangle + \langle f_n, x \rangle - \langle f, x \rangle|$$

$$\leq |\langle f_n, x_n - x\rangle| + |\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle| \leq \|f_n\| \, \|x_n - x\| + |\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle|$$

Il primo termine a ultimo membro tende a zero per $n \to \infty$ perché $\|x_n - x\| \to 0$, e il secondo termine perché f_n converge debolmente* a f. $\square$

Osserviamo che, assumendo soltanto che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $\sigma(E^*, E)$ (o che $f_n \rightharpoonup f$ in $\sigma(E^*, E^{**})$) e che $x_n \rightharpoonup x$ in $\sigma(E, E^*)$, allora non si può concludere, in generale, che $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ (è abbastanza semplice costruire un esempio negli spazi di Hilbert).

Osserviamo che la bolla chiusa unitaria B_{E^*} in E^*, che non è mai compatta nella topologia forte (a meno che la dimensione di E sia finita[34]), è invece sempre compatta nella topologia debole*.[35]

Riportiamo gli enunciati di due famosi teoremi:

Teorema 2.19 (di Riesz)**.** *Sia E uno spazio vettoriale normato tale che l'insieme B_E sia compatto. Allora E ha dimensione finita.*

Teorema 2.20 (di Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Sia E uno spazio vettoriale normato. Allora la bolla chiusa unitaria*

$$B_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\}$$

è compatta nella topologia debole $\sigma(E^*, E)$.[36]

La compattezza di B_{E^*} è la proprietà più importante della topologia debole*.

Quando lo spazio E ha dimensione finita le tre topologie (in E^*) (forte, debole e debole*) coincidono; infatti l'iniezione canonica $J : E \to E^{**}$ è suriettiva (essendo $\dim(E) = \dim(E^{**})$) e quindi $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$.

[34] Si veda il Teorema di Riesz in [1], pag. 160.

[35] Si veda il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki in [1], pag. 66.

[36] Una delle dimostrazioni di questo teorema identifica la bolla chiusa unitaria (con la topologia debole*) con un sottoinsieme chiuso di un prodotto di insiemi compatti con la topologia prodotto; dal Teorema di Tychonoff, tale prodotto é compatto, e quindi anche la bolla chiusa unitaria (chiusa in un compatto) é compatta.

2.6 Spazi riflessivi

Ricordiamo che uno spazio di Banach E si dice riflessivo se se l'iniezione canonica J è suriettiva. Quando E è riflessivo E e E^{**} vengono identificati.
Gli spazi di dimensione finita sono riflessivi (essendo $\dim(E) = \dim(E^*)$ $= \dim(E^{**})$). Gli spazi di Hilbert sono riflessivi.
Un importante esempio di spazio non riflessivo è lo spazio $C(K)$ delle funzioni continue su uno spazio metrico compatto K infinito.

Le topologie debole e debole* nel duale E^* di uno spazio riflessivo E coincidono; la topologia debole $\sigma(E^*, E^{**})$ in E^* è la topologia più debole che rende continue le funzioni $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in E^{**}}$, dove $\varphi_\xi : E^* \to \mathbb{R}$ è definita da $\varphi_\xi(f) = \langle \xi, f \rangle$ la topologia debole* $\sigma(E^*, E)$ in E^* è la topologia più debole che rende continue le funzioni $\{\varphi_x\}_{x \in E}$, dove $\varphi_x : E \to \mathbb{R}$ è definita da $\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$ $\forall f \in E^*$. Dato che E è riflessivo (cioé $E \simeq E^{**}$), si ha $\langle \xi, f \rangle = \langle f, x \rangle$ per ogni $f \in E^*$, e quindi le due topologie coincidono.

Osserviamo che per la definizione di riflessività è essenziale usare J; infatti si può costruire un esempio suggestivo di spazio non riflessivo tale che esista un'isometria suriettiva da E in E^{**} (si veda [3]).[37]
Prima di enunciare e dimostrare un importante teorema che riguarda gli spazi riflessivi, ricordiamo un altro notevole risultato.

Proposizione 2.10. *Siano E uno spazio vettoriale normato e $J : E \to E^{**}$ l'iniezione canonica di E nel suo biduale E^{**}. Allora J è un omeomorfismo topologico*[38] *di E con la topologia debole su $J(E)$*

[37] J è un isomorfismo isometrico di E in $J(E)$, quindi la condizione necessaria e sufficiente affinché E sia riflessivo è che sia isomorfo a E^{**}, ma tramite J, dato che non ogni spazio isomorfo al suo biduale è riflessivo.

[38] Ricordiamo che un *omeomorfismo* (topologico) tra due spazi topologici X e Y è un'applicazione $f : X \to Y$ continua, biunivoca e con inversa continua.
Due spazi omeomorfi possono dunque essere considerati lo stesso spazio dal punto di vista topologico. Si ha che A è aperto in X se e solo se $f(A)$ è aperto in Y; un omeomorfismo è quindi una corrispondenza biunivoca tra due spazi topologici che induce una corrispondenza biunivoca tra i loro aperti (e quindi anche tra i loro chiusi).

con la topologia indotta dalla topologia debole di E^{**}.*[39]

Teorema 2.21 (di Kakutani)**.** *Sia E uno spazio di Banach. Allora E è riflessivo se e solo se B_E è compatta nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$.*

Dimostrazione. Sia E riflessivo; allora $J(B_E) = B_{E^{**}}$. Dal Teorema 2.20 sappiamo che $B_{E^{**}}$ è compatta nella topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$; quindi basta mostrare che J^{-1} è continua[40] da E^{**} (dotato della topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$) a E (dotato della topologia $\sigma(E, E^*)$). Per la Proposizione 2.5, è sufficiente mostrare che, $\forall\, f \in E^*$ fissato, l'applicazione $\xi \mapsto \langle f, J^{-1}\xi\rangle_{E^*,E}$ è continua su E^{**}, $\forall\, \xi \in E^{**}$, (dotato della topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$). Poiché $\langle f, J^{-1}\xi\rangle_{E^*,E} = \langle \xi, f\rangle_{E^{**},E^*}$ ed essendo la funzione $\xi \mapsto \langle \xi, f\rangle$ effettivamente continua (è un funzionale lineare continuo per definizione) su E^{**} per la topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$,[41] segue che B_E è compatta nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$.
Viceversa, sia B_E compatta nella topologia $\sigma(E, E^*)$. Osserviamo che l'iniezione canonica $J : E \to E^{**}$ è sempre continua da $\sigma(E, E^*)$ in $\sigma(E^{**}, E^*)$ poiché, $\forall\, f \in E^*$ fissato, l'applicazione $x \mapsto \langle Jx, f\rangle = \langle f, x\rangle$ è continua rispetto a $\sigma(E, E^*)$ (si veda la Proposizione 2.10). Dall'ipotesi segue che $J(B_E)$ è compatta (e quindi chiusa)[42] in E^{**} rispetto alla topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$. D'altra parte, dal Lemma di Goldstine[43] $J(B_E)$ è denso in $B_{E^{**}}$ rispetto alla stessa topologia. Segue allora che $J(B_E) = B_{E^{**}}$; sia, ora, $\xi \in E^{**}$, ξ non nullo; allora $\xi/\|\xi\|_{E^{**}} \in B_{E^{**}}$ e, quindi $\xi/\|\xi\|_{E^{**}} \in J(B_E)$, cioé esiste $x \in B_E$ tale che $Jx = \xi/\|\xi\|_{E^{**}}$. Dunque si ha $\xi = \|\xi\|_{E^{**}} Jx = J(\|\xi\|_{E^{**}} x)$, da cui segue che $\xi \in J(E)$. Questo mostra che $J : E \to E^{**}$ è suriettiva, e quindi E è riflessivo.

□

Osserviamo che $J(B_E)$ è chiusa in $B_{E^{**}}$ nella topologia forte. Infatti, se $\xi_n = J(x_n) \to \xi$ allora la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy in B_E (dato

[39] Per la dimostrazione si veda, per esempio, [2], pag. 203.

[40] Ricordiamo che l'immagine di un compatto tramite un'applicazione continua è compatta.

[41] Il fatto che J^{-1} sia continua da E^{**} in E con le topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$ e $\sigma(E, E^*)$ rispettivamente segue direttamente dalla Proposizione 2.10.

[42] Un compatto in una topologia di Hausdorff è chiuso.

[43] Si veda [1], pag. 69: *Sia E uno spazio di Banach. Allora $J(B_E)$ è denso in $B_{E^{**}}$ rispetto alla topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$, e di conseguenza $J(E)$ è denso in E^{**} nella topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$.*

che J è un'isometria, e quindi conserva le norme e dato che la convergenza forte non è altro che la convergenza in norma), e quindi $x_n \to x$ (E è di Banach) e $\xi = Jx$. Segue che $J(B_E)$ non è denso nella topologia forte a meno che $J(B_E) = B_{E^{**}}$, cioé a meno che E non sia riflessivo.

Teorema 2.22 (di compattezza debole sequenziale)**.** *Sia E uno spazio di Banach riflessivo. Allora da ogni successione limitata in E è possibile estrarre una sottosuccessione convergente rispetto alla topologia debole $\sigma(E, E^*)$.*

Teorema 2.23 (di Eberlein-Šmulian)**.** *Sia E uno spazio di Banach tale che ogni successione limitata in E ammetta una sottosuccessione debolmente convergente (in $\sigma(E, E^*)$). Allora E è riflessivo.*

Per chiarire meglio il legame tra gli ultimi tre teoremi enunciati ricordiamo che, se X è uno spazio metrico, X è compatto se e solo se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente (cioé sequenzialmente compatto, o compatto per successioni).
Esistono spazi topologici compatti in cui da qualche successione non si può estrarre nessuna sottosuccessione convergente.
Se X è uno spazio topologico con la proprietà che ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente, allora X non è necessariamente compatto.
Quindi, mentre in uno spazio metrico la nozione di compattezza e compattezza per successioni sono equivalenti, in uno spazio topologico generale le due nozioni non sono confrontabili: esistono spazi topologici compatti ma non compatti per successioni e anche spazi topologici compatti per successioni ma non compatti.

Altre importanti proprietà degli spazi riflessivi sono le seguenti:

Proposizione 2.11. *Sia E uno spazio di Banach riflessivo e sia $M \subset E$ un sottospazio vettoriale chiuso. Allora M è riflessivo (con la norma indotta da E).*

Dimostrazione. Lo spazio M (dotato della norma di E) ha a priori due distinte topologie deboli: la topologia indotta da $\sigma(E, E^*)$ e la sua topologia debole $\sigma(M, M^*)$. In effetti queste due topologie sono le stesse (dato che, dal Teorema di Helly-Hahn-Banach, ogni funzionale lineare continuo su M è la restrizione a M di un funzionale lineare continuo su E). Dal Teorema di Kakutani, dobbiamo mostrare che B_M è compatta nella topologia $\sigma(M, M^*)$ o, equivalentemente, nella topologia $\sigma(E, E^*)$; sempre per il Teorema 2.21 B_E è compatta nella topologia $\sigma(E, E^*)$ (dato che è E riflessivo); inoltre, M risulta chiuso in tale topologia per il Teorema 2.17 (essendo chiuso nella topologia forte per ipotesi). Quindi si conclude che B_M è compatta nella topologia $\sigma(E, E^*)$, da cui la tesi.[44] $\square$

Corollario 2.24. *Uno spazio di Banach E è riflessivo se e solo se il suo duale E^* è riflessivo.*

Dimostrazione. Sia E riflessivo. L'idea è semplice: intuitivamente, dato che $E^{**} = E$, allora $E^{***} = E^*$.
Sia J l'isomorfismo canonico da E a E^{**}; fissato $\varphi \in E^{***}$, l'applicazione $x \mapsto \langle \varphi, Jx \rangle$ è un funzionale lineare continuo su E (chiamiamolo f, $f \in E^*$). Allora

$$\langle \varphi, Jx \rangle_{E^{***}, E^{**}} = \langle f, x \rangle_{E^*, E} \quad \forall\, x \in E$$

ma si ha anche

$$\langle \varphi, Jx \rangle_{E^{***}, E^{**}} = \langle Jx, f \rangle_{E^{**}, E^*} \quad \forall\, x \in E.$$

[44] Forniamo un'altra dimostrazione del fatto che ogni sottospazio chiuso M di uno spazio riflessivo E sia riflessivo (si veda [2], pag. 115): siano $J : E \to E^{**}$ e $J_M : M \to M^{**}$ le iniezioni canoniche degli spazi E e M rispettivamente. Sia $\xi_M \in M^{**}$ e definiamo $\xi : E^* \to \mathbb{R}$ come $\xi(f) = \langle \xi_M, f_{|M} \rangle$ per ogni $f \in E^*$; osserviamo che $\xi \in E^{**}$, quindi $\xi = Jx$ per qualche $x \in E$. Si ha dunque

$$\langle f, x \rangle = \langle \xi, f \rangle = \langle \xi_M, f_{|M} \rangle \quad \forall\, f \in E^*. \tag{2.16}$$

Mostriamo che $x \in M$: per assurdo, se $x \notin M$, per il Corollario 2.5 del Teorema di Helly-Hahn- Banach, esiste $g \in E^*$ che si annulla su M (cioé tale che $\langle \xi_M, g_{|M} \rangle = 0$) e tale che $\langle g, x \rangle \neq 0$. Ma ciò contraddice la (2.16), quindi $x \in M$. Mostriamo ora che $\xi_M = J_M x$: sia $f_0 \in E^*$; per il Corollario 2.2 del Teorema di Helly-Hahn- Banach, esiste $h \in E^*$ che prolunga f_0. Dalla (2.16) si ha allora

$$\langle \xi_M, f_0 \rangle = \langle \xi_M, h_{|M} \rangle = \langle h, x \rangle = \langle f_0, x \rangle.$$

Dall'arbitrarietà di f_0 segue che $\xi_M = J_M x$.

Allora, essendo J suriettiva, segue che

$$\langle \varphi, \xi \rangle_{E^{***},E^{**}} = \langle \xi, f \rangle_{E^{**},E^{*}} \quad \forall \xi \in E^{**},$$

che significa che l'iniezione canonica da E^* a E^{***} è suriettiva, e quindi che E^* è riflessivo.
Viceversa, sia E^* riflessivo (cioé $J : E^* \to E^{***}$ è suriettiva). Dal passaggio precedente sappiamo che E^{**} (duale di E^*) è riflessivo. Osserviamo che $J(E)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di E^{**} (nella topologia forte): $J(E) \subset E^{**}$ è di Banach essendo isometricamente isomorfo a E, ed E^{**} è di Banach essendo uno spazio duale[45]. Allora, dalla Proposizione 2.11 segue che $J(E)$ è riflessivo. Essendo $J(E)$ riflessivo e J un'isometria suriettiva da E a $J(E)$, segue che[46] E è riflessivo, cioé che $J(E) = E^{**}$. $\square$

2.7 Spazi separabili

Ricordiamo che uno spazio metrico E si dice **separabile** se esiste un sottoinsieme $D \subset E$ numerabile denso.

Gli spazi di dimensione finita sono separabili. Lo spazio $C(K)$ è separabile.

Proposizione 2.12. *Sia E uno spazio metrico separabile e $F \subset E$ un sottoinsieme qualunque. Allora anche F è separabile.*

Teorema 2.25. *Sia E uno spazio di Banach tale che E^* sia separabile. Allora E è separabile.*

Osserviamo che il viceversa non è vero.

[45]Ricordiamo nuovamente che *dato uno spazio metrico X e $E \subset X$, allora E è un sottospazio metrico completo di X se e solo se è chiuso in X.*

[46]Se E e F sono due spazi di Banach e T é un'isometria suriettiva da E in F, allora E è riflessivo se e solo se F è riflessivo.

Teorema 2.26. *Sia E uno spazio di Banach. Allora E è riflessivo e separabile se e solo se E^* è riflessivo e separabile.*

Le proprietà di separabilità sono strettamente legate alla metrizzabilità delle topologie deboli.[47] Valgono i seguenti risultati:

Teorema 2.27. *Sia E uno spazio di Banach separabile. Allora B_{E^*} è metrizzabile nella topologia debole* $\sigma(E^*, E)$.*
Viceversa, se B_{E^*} è metrizzabile nella topologia debole $\sigma(E^*, E)$ allora E è separabile .*

Teorema 2.28. *Sia E uno spazio di Banach tale che E^* sia separabile. Allora B_E è metrizzabile nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$.*
Viceversa, se B_E è metrizzabile nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$, allora E^* è separabile .

I precedenti teoremi conducono al

Corollario 2.29. *Sia E uno spazio di Banach separabile e sia $\{f_n\}$ una successione limitata in E^*. Allora esiste una sottosuccesione $\{f_{n_k}\}$ che converge nella topologia debole* $\sigma(E^*, E)$.*

Il Corollario 2.29 può essere in un certo senso considerato come una "versione sequenziale" del Teorema di Banach-Alaouglu-Bourbaki: la bolla chiusa unitaria B_{E^*} del duale E^* di uno spazio vettoriale normato separabile E è sequenzialmente debolmente* compatta (in questo caso compattezza debole* e compattezza sequenziale coincidono).

2.8 Spazi uniformemente convessi

[47] Si veda [1], pag 74.

Definizione 2.3. *Uno spazio di Banach E è detto* ***uniformemente convesso*** *se* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *tale che* $\forall\, x, y \in E$ *con* $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ *e* $\|x - y\| > \varepsilon$ *risulta* $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta$.

L'uniforme convessità è una proprietà geometrica (esprime la "rotondità") della bolla unitaria: infatti, preso un segmento di lunghezza $\varepsilon > 0$ (che non sia cioé un segmento degenere) nella bolla unitaria, allora il suo punto medio deve stare all'interno della bolla di raggio $1 - \delta$ per qualche $\delta > 0$ (cioé, se il suo punto medio è molto vicino al bordo della bolla, il segmento deve necessariamente essere molto corto); in particolare, quindi, la sfera unitaria deve essere "tonda" e non può includere nessun segmento.

Esempio 2.10. *In $E = \mathbb{R}^2$ la norma euclidea è uniformemente convessa, mentre la norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ e la norma $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ non lo sono.*
Gli spazi di Hilbert sono uniformemente convessi.

Teorema 2.30 (di Milmann-Pettis)**.** *Ogni spazio di Banach uniformemente convesso è riflessivo.*[48]

Osserviamo che l'uniforme convessità è una proprietà geometrica della norma; una norma equivalente a una norma uniformemente convessa non necessariamente è uniformemente convessa (come mostrato nell'Esempio 2.10). D'altra parte, la riflessività è una proprietà topologica: uno spazio riflessivo rimane tale per norme equivalenti. Questa è un notevole aspetto del Teorema di Milman-Pettis che una proprietà geometrica implichi una proprietà topologica. L'uniforme convessità è spesso usata come strumento per provare la riflessività, ma non è lo strumento definitivo (esistono dei misteriosi spazi riflessivi che ammettono norme equivalenti non uniformemente convesse).

[48]Per la dimostrazione si veda [1], pag. 77 (anch'essa fa uso del Lemma di Goldstine).

Proposizione 2.13. *Sia E uno spazio di Banach uniformemente convesso e sia $\{x_n\}$ una successione in E tale che $x_n \rightharpoonup x$ in $\sigma(E, E^*)$ e $\limsup_n \|x_n\| \leq \|x\|$. Allora $x_n \to x$ fortemente.*

Capitolo 3

Spazi L^p

Gli spazi L^p sono i cosiddetti **spazi di Lebesgue**. Essi sono un esempio di spazio normato (completo) e godono di diverse proprietà.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile secondo Lebesgue. Denotiamo con $\mathcal{L}(\Omega)$ (o $L^1(\Omega)$ o $L(\Omega)$) la classe delle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabili secondo Lebesgue in Ω e con $\int_\Omega f\,dx$, o semplicemente con $\int_\Omega f$, l'integrale di Lebesgue di f in Ω. La misura di Ω viene denotata con $|\Omega|$.[1] Quando ciò non genera confusione, $L^1(\Omega)$ viene denotato semplicemente con L^1.

Tra i risultati più importanti di teoria dell'integrazione ricordiamo il Lemma di Fatou, Teorema di Beppo Levi (o della convergenza monotona), il Teorema di Lebesgue o della convergenza dominata, il Teorema di Fubini e il Teorema di Tonelli.[2]

Definizione 3.1. *Sia Ω un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$, ed $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile.*[3] *Fissato $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, diciamo che*

[1] I risultati che seguono possono essere enunciati anche in un generico spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Inoltre, si possono considerare gli spazi $L^p(\Omega)$ anche per funzioni a valori complessi.

[2] Si veda [1], pag. 90; osserviamo che tali teoremi possono essere formulati in maniera leggermente diversa a seconda del testo preso in considerazione.

[3] Una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ è misurabile (secondo Lebesgue) se e solo se ogni insieme di sopralivello è misurabile, cioé se l'insieme $\{x \in \Omega : f(x) > c\}$ è misurabile per ogni $c \in \mathbb{R}$.

$f \in L^p(\Omega)$ se

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty,$$

cioé se $|f(x)|^p$ è integrabile in Ω.

Proposizione 3.1. *$L^p(\Omega)$, $\forall\, 1 \leq p < \infty$, è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in L^p(\Omega)$, è evidente, dalle proprietà degli integrali, che $\alpha f \in L^p(\Omega)$.
Il fatto che, se f, $g \in L^p(\Omega)$ anche $f+g \in L^p(\Omega)$ segue immediatamente dalla disuguaglianza integrale di Minkowsky (Lemma 1.12), oppure per via diretta, osservando che

$$|f+g|^p \leq \big(|f|+|g|\big)^p \leq (2\max\{|f|,|g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

Ora, integrando su Ω primo e ultimo membro della precedente espressione, dall'ipotesi che $\int_\Omega |f|^p\, dx < \infty$ e $\int_\Omega |g|^p\, dx < \infty$, segue la tesi.
$\square$

Osserviamo che $L^p(\Omega)$ per $p = 1$ coincide con l'insieme delle funzioni integrabili secondo Legesgue (che verrà indicato, pertanto, indifferentemente con $\mathcal{L}(\Omega)$ o con $L^1(\Omega)$ o con $L(\Omega)$), in quanto l'integrabilità e l'integrabilità assoluta coincidono nell'integrale di Lebesgue. Anche per $p > 1$, se ciò non genera confusione si scrive semplicemente L^p (quando è chiaro quale sia l'insieme in cui si opera).
Inoltre, sottolineiamo che date due qualunque funzioni $f, g \in L^p(\Omega)$, dire che $f = g$ in Ω significa dire che $f = g$ q.o. (quasi ovunque) in Ω, cioé due funzioni coincidono se coincidono a meno di un insieme di misura nulla (due funzioni q.o. coincidenti vengono identificate). $L^p(\Omega)$ risulta essere quindi uno spazio formato da classi di equivalenza di funzioni, essendo l'uguaglianza q.o. una relazione di equivalenza. Un elemento f di $L^p(\Omega)$ è un rappresentante di una qualunque altra funzione coincidente con f in quasi tutti i punti di Ω.

Proposizione 3.2. *$L^p(\Omega)$, $\forall\, 1 \le p < \infty$, è uno spazio normato rispetto alla norma*

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p(\Omega).$$

Dimostrazione. Si ha $\|f\|_p \ge 0$; inoltre, $\|f\|_p = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o. (coerentemente con la relazione di equivalenza introdotta sopra, la funzione 0 è la classe di equivalenza delle funzioni q.o. nulle in Ω).
La proprietà $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ $\forall f \in L^p(\Omega)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ è evidente.
Infine, la disuguaglianza triangolare non è altro che la disuguaglianza integrale di Minkowski (Lemma 1.12).

□

Definizione 3.2. *Sia Ω un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$, e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile.*[4] *Si chiama* ***estremo superiore essenziale*** *di f in Ω la quantità*

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega f := \inf\{M \in \mathbb{R}^* : f(x) \le M \text{ q.o. in } \Omega\},$$

dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.[5]
Diciamo che $f \in L^\infty(\Omega)$ (cioé che f è ***essenzialmente limitata****) se*

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| = \inf\{M \in \mathbb{R}^* : |f(x)| \le M \text{ q.o. in } \Omega\} < +\infty.$$

Come sarà dimostrato più avanti, l'uguaglianza scritta sopra definisce una norma in L^∞. Anche L^∞ risulta essere un insieme quoziente rispetto alla relazione di coincidenza di funzioni q.o.

Il sup essenziale può anche essere denotato con "sup ess"; spesso viene definito, equivalentemente, come

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf\left\{M \in \mathbb{R}^*, M \ge 0 : |\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}| = 0\right\};$$

segue allora che la norma in L^∞ può essere espressa come

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : |\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}| = 0\} = \inf_{E_0} \sup_{\Omega \setminus E_0} |f(x)|,$$

[4] Spesso si considerano anche funzioni a valori in $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

[5] Ricordiamo che per convenzione si pone $\inf \emptyset = +\infty$. Analogamente si può definire l'estremo inferiore essenziale come $\operatorname{infess}_\Omega f = \sup\{m \in \mathbb{R} : f(x) \ge m \text{ q.o. in } \Omega\}$, convenendo che $\sup \emptyset = -\infty$.

al variare di E_0 fra i sottoinsiemi di Ω di misura nulla.
Osserviamo che l'$\inf_{E_0}$, il più piccolo dei maggioranti, è, più precisamente, un minimo; in tal caso infatti, essendo il sup ess finito, vale la seguente

Proposizione 3.3. *Sia $f \in L^\infty(\Omega)$. Allora esiste $\widetilde{E}_0 \subset \Omega$, con $|\widetilde{E}_0| = 0$, tale che $\|f\|_\infty = \sup_{\Omega \smallsetminus \widetilde{E}_0} |f(x)|$.*

Dimostrazione. Dalle proprietà dell'estremo inferiore e dalla definizione di $\|\cdot\|_\infty$ segue che $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, E_n \subset \Omega$, con $|E_n| = 0$, tale che

$$\sup_{\Omega \smallsetminus E_n} |f(x)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{n}. \tag{3.1}$$

Posto $\widetilde{E}_0 = \cup_n E_n$, si ha, per le proprietà di subadditività numerabile della misura di Lebesgue, $|\widetilde{E}_0| = |\cup_n E_n| \leq \sum_n |E_n| = 0$, da cui, usando il fatto che $\sup_A \leq \sup_B$ se $A \subseteq B$ e dalla (3.1) si ha

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{\Omega \smallsetminus \widetilde{E}_0} |f(x)| \leq \sup_{\Omega \smallsetminus E_n} |f(x)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene la tesi. □

Quindi, se $f \in L^\infty(\Omega)$ (cioé $\|f\|_\infty = L < \infty$), allora $|f(x)| \leq L$ (cioé $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$) q.o. in Ω.[6]

Osserviamo anche che

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega f \leq \sup_\Omega f,$$

essendo $\sup_\Omega f = \inf\{M \in \mathbb{R}^* : f(x) \leq M\ \forall\, x \in \Omega\}$.
Risulta dunque che una funzione limitata è essenzialmente limitata.
Se f è continua in Ω, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ aperto, allora il sup ess coincide col sup. Infatti, sia $\sup_\Omega f = L$; allora $\forall\, \epsilon > 0$ esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $f(x_0) > L - \epsilon$ se $L \in \mathbb{R}$, oppure $f(x_0) > \epsilon$ se $L = +\infty$. Dalla continuità di f, per il Teorema della permanenza del segno esiste un intorno aperto di x_0, contenuto in Ω e di misura positiva, in cui le disuguaglianze precedenti continuano a valere, e quindi si ha $\operatorname{ess\,sup}_\Omega f = \sup_\Omega f$.

[6] Si veda l'Osservazione 1 in [1], pag. 91.

Esempio 3.1. *Consideriamo la successione di funzioni* $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^*$ *definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \neq \dfrac{1}{n} \\ n & se\ x = \dfrac{1}{n} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Essa è una successione di funzioni limitate, che converge puntualmente alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \neq 0 \\ +\infty & se\ x = 0; \end{cases}$$

essa non è limitata in $[0,1]$ *(infatti* $\sup f = +\infty$*), ma è essenzialmente limitata nello stesso intervallo, essendo* $\operatorname{ess\,sup} f = 0$.

Esempio 3.2. *Per la funzione* $f = \dfrac{1}{x}$ $x \in (0,1)$*, si ha* $\operatorname{ess\,sup} f = \sup f = +\infty$.
Data la funzione di Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

si ha $\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}} |f| = 0$*, mentre* $\sup_{\mathbb{R}} |f| = 1$.
La funzione di Dirichlet non è altro che la funzione caratteristica dei numeri razionali $\mathbb{Q}$*. La funzione indicatrice di numeri irrazionali è invece la seguente (talvolta è questa ad essere chiamata funzione di Dirichlet)*

$$g(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

in tal caso si ha $\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}} |g| = 1 = \sup_{\mathbb{R}} |g|$.

Proposizione 3.4. $L^\infty(\Omega)$ *è uno spazio normato rispetto alla norma* $\|f\|_\infty$*, detto* ***spazio delle funzioni essenzialmente limitate in*** Ω.

Dimostrazione. Per come è definita, $\|f\|_\infty \geq 0$. Se f è q.o. nulla in Ω, allora il suo sup ess in Ω è zero e, viceversa, se $\|f\|_\infty = 0$, allora esiste un $E_0 \subset \Omega$, con $|E_0| = 0$, tale che $\sup_{\Omega \setminus E_0} |f| = 0$, cioé $f = 0$

q.o. in Ω. Quindi la classe di equivalenza delle funzioni q.o. nulle in Ω è l'elemento neutro dello spazio vettoriale.
Inoltre, dalle proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore, $\forall f \in L^\infty(\Omega)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\|\alpha f\|_\infty = \inf_{E_0} \sup_{\Omega \setminus E_0,\ |E_0|=0} |\alpha f| = |\alpha| \|f\|_\infty.$$

Infine, $\forall E_0 \subset \Omega,\ |E_0| = 0$ si ha

$$\begin{aligned} \|f+g\|_\infty = \inf_{E_0} \sup_{\Omega \setminus E_0} |f+g| &\leq \sup_{\Omega \setminus E_0} |f+g| \\ &\leq \sup_{\Omega \setminus E_0} |f| + \sup_{\Omega \setminus E_0} |g|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Inoltre, ragionando come nella Proposizione 3.3, $\forall \varepsilon > 0\ \exists E_1,\ E_2 \subset \Omega$, con $|E_1| = |E_2| = 0$ tali che

$$\sup_{\Omega \setminus E_1} |f| < \|f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sup_{\Omega \setminus E_2} |g| < \|g\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3}$$

Allora, posto $E_1 \cup E_2 = E_0$ nella (3.2), si ottiene, usando la (3.3),

$$\|f+g\|_\infty \leq \sup_{\Omega \setminus E_1} |f| + \sup_{\Omega \setminus E_2} |g| < \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \varepsilon,$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue la tesi.[7]

□

Proposizione 3.5. *$L^\infty(\Omega)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $L^\infty(\Omega)$, cioé tale che, fissato un intero $k \geq 1$, esiste $N = N(k)$ tale che $\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{k}$ se $n, m \geq N(k)$. Allora esiste un insieme $E_k \subset \Omega$, con $|E_k| = 0$ tale che, $\forall x \in \Omega \setminus E_k$ e $\forall n, m \geq N(k)$, si abbia

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{k}. \tag{3.4}$$

Posto $E = \cup_k E_k$, dalla subadditività numerabile della misura di Lebesgue $|E| \leq \sum_k |E_k|)$ segue che anche E ha misura nulla, e la precedente relazione vale $\forall x \in \Omega \setminus E$. Inoltre, dalla (3.4) si ha che $\{f_n(x)\}$ è una

[7] In [1] (Teorema 4.7 a pag. 93) la disuguaglianza triangolare per la norma è provata utilizzando la disuguaglianza di Hölder in $L^p(\Omega)$ (si veda più avanti).

successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, e quindi $f_n(x)$ converge a una data funzione $f(x)$ in $\Omega \setminus E$. Passando al limite nella (3.4) per $m \to \infty$ si ottiene che, fissato $k \geq 1$, esiste $N = N(k)$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$$

$\forall\, x \in \Omega \setminus E$ e $\forall\, n \geq N(k)$. Ma allora f_n converge a f uniformemente in $\Omega \setminus E$, e tale funzione limite f è limitata. Quindi $f \in L^\infty(\Omega \setminus E)$ e, ponendo $f = 0$ in E si ha $f \in L^\infty(\Omega)$. Inoltre risulta $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ $\forall\, n \geq N(k)$, cioé f_n converge a f in $L^\infty(\Omega)$.

□

Enunciamo e dimostriamo ora la disuguaglianza integrale di Hölder specificatamente per funzioni appartenenti agli spazi L^p.

Teorema 3.1 (Disuguaglianza di Hölder)**.** *Siano $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, con p, $q \in [1, \infty]$ esponenti coniugati. Allora $fg \in L^1(\Omega)$, e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\, \|g\|_q$.*
Se p, $q \in (1, \infty)$, l'uguaglianza vale se e solo se $|f|^p \|g\|_q^q = |g|^q \|f\|_p^p$ q.o. in Ω.

Dimostrazione. Analizziamo prima i casi limite: se $p = 1$ e $q = \infty$ (il viceversa è analogo), maggiorando $|g|$ col suo sup ess, banalmente si ottiene $\int_\Omega |fg|\, dx \leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f|\, dx = \|f\|_1\, \|g\|_\infty$.
Osserviamo anche che la disuguaglianza è ovvia se f o g sono q.o. nulle.
In generale, utilizzando la disuguaglianza di Young (Lemma 1.6) con $a = |f|$ e $b = |g|$ si ha

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Da questa relazione, integrando primo e secondo membro su Ω si trova

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \frac{1}{p} \int_\Omega |f|^p\, dx + \frac{1}{q} \int_\Omega |g|^q\, dx,$$

da cui segue che $fg \in L^1(\Omega)$ (essendo $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$). Quindi risulta

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q.$$

Posto λf (con $\lambda > 0$) al posto di f si ha

$$\lambda \int_\Omega |fg|\, dx \leq \frac{\lambda^p}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q,$$

da cui

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q\lambda} \|g\|_q^q.$$

Posto $\lambda = \dfrac{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}}{\|f\|_p}$ si trova

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \frac{1}{p} \|f\|_p \|g\|_q^{q\frac{p-1}{p}} + \frac{1}{q} \|f\|_p \|g\|_q^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Dato che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (e quindi $q = \dfrac{p}{p-1}$), segue la tesi.
Poiché nella disuguaglianza di Young l'uguale vale se e solo se $a^p = b^q$, avendo posto $a = \lambda|f|$ con $\lambda = \dfrac{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}}{\|f\|_p}$, segue che vale l'uguaglianza se e solo se $\dfrac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \dfrac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$.

□

Osserviamo che, in generale, l'integrale di un prodotto non è minore o uguale del prodotto degli integrali. Per esempio $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \in L^1([0,1])$, ma $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} \notin L^1([0,1])$.

Teorema 3.2 (Diguguaglianza di Hölder generalizzata)**.** *Siano* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, *con* p_i, $r \in \mathbb{R}$, $p_i, r \in [1, \infty]$ *tali che* $\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{p_i} = \dfrac{1}{r}$. *Allora* $\prod_{i=1}^n f_i \in L^r(\Omega)$, *e* $\| \prod_{i=1}^n f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}$.

Dimostrazione. Si dimostra per induzione.

□

Come già osservato nella Nota 4, dalla disuguaglianza di Hölder (Teorema 3.1) segue in maniera diretta la disuguaglianza triangolare per la norma in L^p: infatti, $\forall\, f, g \in L^p(\Omega)$ risulta

$$\|f+g\|_p^p = \int_\Omega |f+g|^p\, dx = \int_\Omega |f+g|^{p-1} |f+g|\, dx$$

$$\leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f|\,dx + \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g|\,dx$$
$$\leq \|f\|_p\,\||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p\,\||f+g|^{p-1}\|_q.$$

Infatti, essendo p e q esponenti coniugati, si ha $|f+g|^{p-1} \in L^q(\Omega)$: da $p-1 = \frac{p}{q}$ segue che $\int_\Omega \left(|f+g|^{p-1}\right)^q\,dx = \int_\Omega |f+g|^p\,dx < \infty$. Quindi

$$\|f+g\|_p^p \leq \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\||f+g|^{p-1}\|_q;$$

essendo

$$\||f+g|^{p-1}\|_q = \left(\int_\Omega \left(|f+g|^{p-1}\right)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} = \left[\left(\int_\Omega |f+g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{p-1},$$

si ha cioé

$$\|f+g\|_p^p \leq \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\|f+g\|_p^{p-1}$$

da cui, dividendo primo e ultimo membro per $\|f+g\|_p^{p-1}$ si ottiene $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

In molti casi si considerano gli spazi $L^p(\Omega)$ nel caso in cui Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$; inoltre, ricordiamo che $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura σ-finito, con $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, si denota lo spazio delle (classi di) funzioni misurabili $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che $|f|^p$ sia integrabile, con la norma $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. Quando non viene specificato diversamente, si intende che lo spazio di misura sia quello costruito mediante la misura di Lebesgue.
In particolare, si possono considerare le funzioni continue come classi di funzioni misurabili: a una funzione continua si associa la classe che la contiene (la corrispondenza è iniettiva), dando così senso all'intersezione $L^p(\Omega) \cap C(\Omega)$; tale intersezione è l'insieme delle (classi di) funzioni di $L^p(\Omega)$ che hanno un (unico) rappresentante continuo o, in modo equivalente, l'insieme delle funzioni f continue tali che $|f|^p$ sia integrabile. Lo stesso si può fare con lo spazio $L^\infty(\Omega)$ (consideriamo sempre sempre il caso in cui Ω sia limitato).

Esempio 3.3. *La funzione* $f(x) = 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, *mentre non appartiene a* $L^p(\mathbb{R})$, *per* $1 \leq p < \infty$, *essendo il suo integrale divergente.*

Esempio 3.4. *La funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \log x & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$$

non appartiene allo spazio $L^\infty([0,1])$, *non essendo essenzialmente limitata in tale intervallo, mentre* $f(x) \in L^p([0,1])\ \forall\, p \in [1,\infty)$: *infatti, poiché per* x *che tende a zero il logaritmo di* x *tende a infinito più lentamente di qualunque potenza negativa di* x, *per qualche* $\epsilon_0 > \delta > 0$ *si ha*

$$\int_0^1 |\log x|^p\, dx = \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 |\log x|^p\, dx$$

$$\leq \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^{\epsilon_0} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + \int_{\epsilon_0}^1 |\log x|^p\, dx = \sqrt{\epsilon_0} + K_p < \infty.$$

I precedenti forniscono un esempio di funzione in L^∞ ma non in L^p, e un esempio di funzione in L^p ma non in L^∞. Introduciamo allora delle ipotesi in modo da poter confrontare meglio questi due spazi.

Proposizione 3.6. *Siano* $|\Omega| < \infty$ *e* $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
i) Se $f \in L^q(\Omega)$, *allora* $f \in L^p(\Omega)$ *(cioé* $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$*) e*

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q,$$

ii) Se $f \in L^\infty(\Omega)$, *allora*

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

iii) Se $f \in L^p(\Omega)\ \forall\, p \in [1,\infty)$ *e se esiste* $k > 0$ *tale che* $\|f\|_p \leq k$ $\forall\, p \in [1,\infty)$, *allora* $f \in L^\infty(\Omega)$ *e* $\|f\|_\infty \leq k$.

Dimostrazione. i) Questa implicazione segue dalla disuguaglianza di Hölder. Infatti, poiché le costanti sono integrabili su insiemi di misura finita, possiamo scrivere

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \cdot 1 \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dal fatto che $f \in L^q(\Omega)$ si ha $\int_\Omega |f|^q \, dx < \infty$, cioé $|f|^q \in L^1(\Omega)$ e $\int_\Omega |f|^q \, dx = \int_\Omega (|f|^p)^{\frac{q}{p}} \, dx < \infty$. Allora considerando $|f|^p \in L^{\frac{q}{p}}$ e $1 \in L^{\frac{q}{q-p}}$ (osserviamo che $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q-p}{q} = 1$), si ha

$$\|f\|_p \leq \left(\left(\int_\Omega (|f|^p)^{\frac{q}{p}} \, dx \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{q-p}} \, dx \right)^{\frac{q-p}{q} \cdot \frac{1}{p}} = \|f\|_q |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

ii) Dalla i) (con $q = \infty$) si ha che, $\forall \, p \in [1, \infty)$,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{p}}.$$

Tale disuguaglianza si conserva passando al limite:

$$\limsup_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty. \tag{3.5}$$

D'altra parte, dal fatto che $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ q.o. in Ω ed essendo f essenzialmente limitata, $\forall \, \varepsilon > 0$ esiste $A \subset \Omega$, $|A| > 0$, tale che $|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon \; \forall \, x \in A$ e, quindi

$$\int_\Omega |f|^p \, dx \geq \int_A |f|^p \, dx \geq |A| (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p,$$

cioé $\|f\|_p \geq |A|^{\frac{1}{p}} (\|f\|_\infty - \varepsilon)$; allora, per l'arbitrarietà di ε,

$$\liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty. \tag{3.6}$$

Confrontando le (3.5) e (3.6) si ha la tesi.

iii) Se, per assurdo, $f \notin L^\infty(\Omega)$, allora esistono $k_1 > k$ e $A \subset \Omega$, con $|A| > 0$, tali che, $\forall \, x \in A$, $|f(x)| \geq k_1$. Il ragionamento precedente implica $\liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq k_1$, il che è assurdo dal momento che, per ipotesi, $\|f\|_p \leq k < k_1 \; \forall \, p \in [1, \infty)$. Da ciò segue anche che $\|f\|_\infty \leq k$. □

Come mostrano gli Esempi 3.3 e 3.4, l'ipotesi che la misura dell'insieme Ω sia finita non è eliminabile.
Osserviamo che per la funzione $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, non vale nemmeno la ii) della proposizione precedente.

A conferma del fatto che quando $|\Omega| = +\infty$ gli spazi L^p non sono confrontabili consideriamo il seguente

Esempio 3.5. *La funzione* $f(x) = \chi_{[0,1]} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ *e*[8] $f(x) \notin L^2(\mathbb{R}^+)$*;* $g(x) = \chi_{[1,+\infty)} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \notin L^1(\mathbb{R}^+)$ *e* $g(x) = \chi_{[1,+\infty)} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \notin L^2(\mathbb{R}^+)$*. Invece* $\chi_{[0,1]} \dfrac{1}{x} \notin L^1(\mathbb{R}^+)$ *e* $\chi_{[1,+\infty)} \dfrac{1}{x} \in L^2(\mathbb{R}^+)$*.*

Vale, però, la seguente **disuguaglianza di interpolazione** per gli spazi L^p:

Proposizione 3.7. *Sia* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$*, con* $1 \leq p < q \leq \infty$*. Allora* $\forall\, r \in (p, q)$ *si ha:*
i) $f \in L^r(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q},\ \alpha \in (0,1);$$

ii) se $q = \infty$ *si ha*

$$\lim_{r \to \infty} \|f\|_r = \|f\|_\infty.$$

Dimostrazione. i) Scriviamo la relazione $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$ come $1 = \dfrac{1}{p/(\alpha r)} + \dfrac{1}{q/[(1-\alpha) r]}$ e osserviamo che

$$\|f\|_r = \left(\int_\Omega |f|^{\alpha r} |f|^{(1-\alpha) r}\, dx \right)^{\frac{1}{r}};$$

[8] La funzione $\chi_X : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, dove X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, rappresenta la *funzione caratteristica* di X, definita come $\chi_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{se } x \notin X. \end{cases}$

dato che $\int_\Omega (|f|^{\alpha r})^{\frac{p}{\alpha r}} < \infty$, $|f|^{\alpha r} \in L^{\frac{p}{\alpha r}}(\Omega)$; inoltre, da $\int_\Omega \left(|f|^{(1-\alpha)r}\right)^{\frac{q}{(1-\alpha)r}} < \infty$ segue che $|f|^{(1-\alpha)r} \in L^{\frac{q}{(1-\alpha)r}}(\Omega)$. Usando dunque la disuguaglianza di Hölder si trova

$$\|f\|_r \le \left[\left(\int_\Omega (|f|^{\alpha r})^{\frac{p}{\alpha r}}\, dx\right)^{\frac{\alpha r}{p}}\right]^{\frac{1}{r}} \left[\left(\int_\Omega \left(|f|^{(1-\alpha)r}\right)^{\frac{q}{(1-\alpha)r}}\, dx\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}}\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left[\left(\int_\Omega |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\alpha} \left[\left(\int_\Omega |f|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{1-\alpha} = \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}.$$

ii) Ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 3.6 ii) per arrivare alla (3.6), si trova

$$\liminf_{r\to\infty} \|f\|_r \ge \|f\|_\infty; \tag{3.7}$$

se $q = \infty$ si ha $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p}$, cioé $\alpha = \frac{p}{r}$ e $1 - \alpha = \frac{r-p}{r}$. Dalla relazione $\|f\|_r \le \|f\|_\infty^{\frac{r-p}{r}} \|f\|_p^{\frac{p}{r}}$ per $r > p$, per $r \to \infty$ si ha

$$\limsup_{r\to\infty} \|f\|_r \le \|f\|_\infty. \tag{3.8}$$

Dalle (3.7) e (3.8) segue la tesi. □

La disuguaglianza di interpolazione a volte è enunciata considerando anche il caso $p = q$ ($1 \le p \le q \le \infty$). Allora $f \in L^r(\Omega)$ $\forall\, r \in [p, q]$ e $\|f\|_r \le \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$ per $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0, 1]$.

Teorema 3.3. *$L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Per $p = \infty$ la tesi segue dalla Proposizione 3.5.
Sia $p \in [1, \infty)$. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$; dobbiamo mostrare che $\{f_n\}$ è convergente in $L^p(\Omega)$. Basta mostrare allora che f_n ammette una sottosuccessione convergente.
Dalla nostra successione $\{f_n\}$ estraiamo allora una sottosuccessione procedendo nel seguente modo: sappiamo per ipotesi che $\|f_n - f_m\|_p \to 0$ per n, $m \to \infty$ (cioé $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N(\varepsilon)$ tale che, $\forall\, n, m \ge N$ si abbia $\|f_n - f_m\|_p \le \varepsilon$), quindi esiste un indice n_1 tale che, $\forall\, m \ge n_1$ si abbia (scegliamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$) $\|f_{n_1} - f_m\|_p \le \frac{1}{2}$; per lo stesso motivo, esiste un

indice $n_2 \geq n_1$ tale che $\forall\, m \geq n_2$ risulti $\|f_{n_2} - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^2}$, e così via. Quindi esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$ tale che

$$\|f_{n_k} - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall\, k \geq 1. \tag{3.9}$$

Per semplificare la notazione indichiamo $\{f_{n_k}\}$ con $\{f_k\}$. Ora poniamo

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - f_{k+1}(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$g_n(x)$ è cioé la ridotta n-esima di una serie a termini positivi; inoltre la successione $\{g_n(x)\} \in L^p(\Omega)$ (per come è definita) e si ha (usando la (3.9)

$$\|g_n\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \| |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \|_p$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \| |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

cioè

$$\|g_n\|_p \leq 1. \tag{3.10}$$

La successione di funzioni $\{g_n(x)\}$ è una successione di funzioni monotona non decrescente ($g_n \leq g_{n+1}$ q.o. in Ω); inoltre, gli integrali $\int_\Omega |g_n(x)|^p \, dx$ costituiscono una successione monotona non decrescente di numeri reali; da quanto osservato (dato che una successione monotona ammette limite) esistono (finiti o infiniti) i limiti

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |g_n(x)|^p \, dx; \tag{3.11}$$

indichiamo con $g(x)$ ($\in [0, \infty]$) il primo limite e osserviamo che sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Beppo Levi. Allora si può passare al limite sotto il segno di integrale e si ricava che $g(x) \in L^p(\Omega)$ e $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |g_n(x)|^p \, dx = \int_\Omega |g(x)|^p \, dx$. Infatti, dalla (3.10) segue che $\int_\Omega |g(x)|^p \, dx < \infty$, anzi ricaviamo $\int_\Omega |g(x)|^p \, dx \leq 1$. Quindi $g_n(x) \to g(x)$ q.o. in Ω e tale limite è q.o. finito ($g(x) \in L^p(\Omega)$). D'altra parte, osserviamo che per $m \geq n \geq 2$ si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)|$$

$$\leq |f_n(x) - f_{n+1}(x)| + |f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{m-1}(x) - f_m(x)|$$

$$\leq g(x) - \sum_{k=1}^{n-1} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| - \sum_{k=m}^{\infty} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

(sfruttando l'espressione di $g_n(x)$ e il fatto che $g_n(x)$ è la somma parziale n-esima di una serie che converge q.o. a $g(x)$). Passando al limite per $n \to \infty$ (e quindi anche per $m \to \infty$) a primo e ultimo membro della precedente espressione, dato che l'ultimo membro tende a zero q.o. si ottiene $\lim_{n,m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = 0$ per q.o. $x \in \Omega$. Allora $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy per q.o. $x \in \Omega$ e $f_n(x)$ tende a un limite finito $f(x)$ q.o. in Ω. Allora, maggiorando ancora (ricordiamo che $g_n(x)$ è una somma di termini non negativi) nella disuguaglianza appena usata si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq g(x)$$

da cui, passando al limite per $m \to \infty$, si ricava per $n \geq 2$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq g(x) \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{3.12}$$

In particolare si ha $|f(x)| \leq |f_n(x)| + g(x)$, da cui, elevando a p e sfruttando la maggiorazione usata anche per mostrare la disuguaglianza triangolare delle norme, dal fatto che $f_n \in L^p(\Omega)\ \forall\, n$ e $g \in L^p(\Omega)$ segue che anche $f \in L^p(\Omega)$.
Consideriamo ora la successione (di funzioni integrabili) $\{|f_n - f|^p\}$; si ha $|f_n - f|^p \leq g^p$ q.o. in Ω, $g^p \in L^1(\Omega)$ e $|f_n - f|^p \to 0$ q.o. in Ω per $n \to \infty$. Allora, per il Teorema della convergenza dominata si ha $\int_\Omega |f_n - f|^p\, dx \to 0$ per $n \to \infty$, cioé $\|f_n - f\|_p \to 0$ per $n \to \infty$, cioé f_n converge a f in $L^p(\Omega)$, c.v.d.

$\square$

Il precedente teorema è noto come **Teorema di Riesz** (o Teorema di Riesz-Fischer[9] o Teorema di Fischer-Riesz), anche se la sua formulazione più nota è quella della completezza dello spazio $L^2(\Omega)$ (cioé per $p = 2$).
La convergenza in $L^p(\Omega)$ è detta anche **convergenza in media di indice** (o **ordine**) p (in $L^1(\Omega)$ si parla di convergenza in media integrale);

[9]Una dimostrazione si trova anche, per esempio, in [5].

per $p = 2$ si ottiene la convergenza in media quadratica: f_n converge a f in media quadratica se

$$\int_\Omega |f_n(x) - f(t)|^2 \, dx \to 0 \quad \text{per} \qquad n \to \infty.$$

Le funzioni f appartenenti a $L^2(\Omega)$ sono spesso chiamate **funzioni a quadrato sommabile**. In questo spazio si può definire il prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg \, dx$ che induce proprio la norma in $L^p(\Omega)$ per $p = 2$; $L^2(\Omega)$, con tale prodotto scalare, è uno spazio di Hilbert.

Teorema 3.4. *Siano $\{f_n\}$ una successione in $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tale che $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Allora esistono una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$ e una funzione $h \in L^p(\Omega)$ tale che:*
i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.o. in Ω;
ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ q.o. in Ω $\forall\, k$.

Dimostrazione. Per $p = \infty$, per ipotesi $\operatorname{ess\,sup}_\Omega |f_n - f| \to 0$ per $n \to \infty$; quindi, per definizione di estremo superiore essenziale, $f_n \to f$ q.o. in Ω per $n \to \infty$, e quindi anche f_{n_k} converge a f q.o. in Ω, da cui segue la i). Inoltre, essendo f_n limitata $\forall\, n$, la conclusione ii) è ovvia.

Sia $1 \leq p < \infty$. Dato che una successione $\{f_n\}$ convergente in $L^p(\Omega)$ è di Cauchy in $L^p(\Omega)$, possiamo tornare indietro alla dimostrazione del Teorema 3.3 e considerare una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ (che denotiamo con $\{f_k\}$) tale che $\|f_k - f_{k+1}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$ $\forall\, k \geq 1$ e quindi tale che $f_k(x)$ tenda q.o. a un limite $f^*(x)$, con $f^* \in L^p(\Omega)$ (a priori, infatti, occorre distinguere f e f^*). Inoltre, dalla (3.12) si ha $|f^*(x) - f_k(x)| \leq g(x)$ q.o. in Ω $\forall\, k$, con $g \in L^p(\Omega)$. Ragionando come prima, dal Teorema di Lebesgue si trova che $f_k \to f^*$ in $L^p(\Omega)$. Allora $f = f^*$ q.o. in Ω, da cui segue la *i*).
Inoltre, sempre dalla (3.12) segue che $|f_k(x)| \leq |f^*(x)| + g(x)$ $\forall\, k$, da cui segue la *ii*).

$\square$

Dalle dimostrazioni precedenti segue anche il

Teorema 3.5. *Sia $f_n \in L^p(\Omega)$. Se $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ e $f_n(x) \to g(x)$ q.o. in Ω, allora $f(x) = g(x)$ in $L^p(\Omega)$.*

Osservazione 3.1. *Gli spazi $L^p(\Omega)$ possono essere definiti anche per $0 < p < 1$: si dirà che $f \in L^p(\Omega)$ se f è misurabile in Ω e $|f|^p$ è integrabile in Ω; $L^p(\Omega)$ è uno spazio vettoriale, e si può dimostrare che, se $p \in (0,1)$, $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$ **non** è una norma (la disuguaglianza triangolare vale esattamente in senso opposto).*

3.1 Riflessività, separabilità e duale

A. Caso $1 < p < \infty$

Proposizione 3.8 (Disuguaglianze di Clarkson)**.** *i) Prima disuguaglianza di Clarkson: $\forall\, p \in [2,+\infty)$ e $\forall\, f, g \in L^p$ si ha*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \le \frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right).$$

ii) Seconda disuguaglianza di Clarkson: $\forall\, p \in (1,2]$ e $\forall\, f\,, g \in L^p$ si ha

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \le \left(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

dove q è l'esponente coniugato di p.

Dimostrazione. i) È sufficiente dimostrare che (per come è definita $\|\cdot\|_p$)

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \le \frac{1}{2}\left(|a|^p + |b|^p\right) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

Prima di tutto osserviamo che $\forall\, \alpha, \beta \ge 0$ si ha

$$\alpha^p + \beta^p \le (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}} \quad ; \tag{3.13}$$

infatti, posto $t = \dfrac{\alpha}{\beta} \ge 0$, $\beta \ne 0$, consideriamo la funzione

$$h(t) = t^p + 1 - (t^2+1)^{\frac{p}{2}};$$

si ha $h(0) = 0$ e, essendo $p \geq 2$,

$$h'(t) = pt\left[t^{p-2} - (t^2+1)^{\frac{p-2}{2}}\right] \leq 0;$$

dunque $h(t)$ è non crescente, e quindi vale la (3.13). Posto $\alpha = \left|\dfrac{f+g}{2}\right|$ e $\beta = \left|\dfrac{f-g}{2}\right|$ si trova

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|^p \leq \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^2 + \left|\frac{f-g}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$= \left(\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(|f|^p + |g|^p\right),$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che la funzione $t \mapsto t^{\frac{p}{2}}$ è convessa per $p \geq 2$. Integrando su Ω primo e ultimo membro dell'ultima relazione si ottiene la tesi.

ii) La seconda disuguaglianza di Clarkson è più complicata da dimostrare. Anche in [1] si fa riferimento al testo di E. Hewitt e K. Stromberg (1965).

□

Teorema 3.6. $\forall\, 1 < p < \infty$ L^p *è riflessivo.*

Dimostrazione. Dalle disuguaglianze di Clarkson segue che L^p è uniformemente convesso.
Per $2 \leq p < \infty$, se $\|f\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$, $\|f-g\|_p > \epsilon > 0$, si ha (usando la disuguaglianza *i*))

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \leq -\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p + \frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

$$\leq -\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p + 1 = 1 - \frac{\|f-g\|_p^p}{2^p} < 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p,$$

da cui

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p < \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

cioé $\left\|\dfrac{f+g}{2}\right\|_p < 1-\delta$, con $\delta = 1-\left[1-\left(\dfrac{\epsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$. La tesi ora segue dal Teorema di Milman-Pettis.
Per $1 < p \leq 2$ si usa la disuguaglianza *ii*): se $\|f\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$, $\|f-g\|_p > \epsilon > 0$, si ha

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q \leq \left(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leq 1 - \frac{\|f-g\|_p^q}{2^q} < 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q,$$

da cui

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p < \left[1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}},$$

cioé $\left\|\dfrac{f+g}{2}\right\|_p < 1-\delta$, con $\delta = 1-\left[1-\left(\dfrac{\epsilon}{2}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}$. Si conclude come nel caso precedente.

□

Diamo una seconda dimostrazione della riflessività di L^p per $1 < p \leq 2$.

Dimostrazione. Sia $1 < p < \infty$. Consideriamo l'operatore $T : L^p \to (L^q)^*$ così definito: fissato $u \in L^p$, l'applicazione da L^q in $\mathbb{R}$ data dalla corrispondenza $f \mapsto \int_\Omega uf$ è un funzionale lineare continuo su L^q e definisce quindi un elemento di $(L^q)^*$, che indichiamo con Tu. Si ha cioé

$$\langle Tu, f\rangle = \int_\Omega uf \quad \forall\, f \in L^q.$$

Vogliamo dimostrare che

$$\|Tu\|_{(L^q)^*} = \|u\|_p \quad \forall\, u \in L^p. \tag{3.14}$$

Dalla disuguaglianza di Hölder si ha

$$|\langle Tu, f\rangle| = \left|\int_\Omega uf\right| \leq \int_\Omega |uf| \leq \|u\|_p \, \|f\|_q \quad \forall\, f \in L^q,$$

e quindi

$$\|Tu\|_{(L^q)^*} = \sup_{\|f\|\leq 1,\, f\in L^q} |\langle Tu, f\rangle| \leq \|u\|_p. \tag{3.15}$$

D'altra parte, posto $f_0 = |u|^{p-2}u$ (osserviamo che $f_0 = 0$ se $u = 0$) si ha $f_0 \in L^q$; infatti, sfruttando il fatto che p e q sono esponenti coniugati, si ha $\int_\Omega |f_0|^q = \int_\Omega |u|^{(p-1)q} = \int_\Omega |u|^p < \infty$; inoltre

$$\|f_0\|_q = \left(\int_\Omega |f_0|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left[\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} = \|u\|_p^{\frac{p}{q}} = \|u\|_p^{p-1}.$$

Allora

$$\langle Tu, f_0\rangle = \int_\Omega uf_0 = \int_\Omega u\,|u|^{p-2}\,u = \|u\|_p^p$$

da cui

$$\|Tu\|_{(L^q)^*} = \sup_{\|f\|\leq 1,\, f\in L^q} |\langle Tu, f\rangle| \geq \frac{\langle Tu, f_0\rangle}{\|f_0\|_q} = \|u\|_p. \tag{3.16}$$

Confrontando le (3.15) e (3.16) si ha la (3.14). Quindi T è un'isometria da L^p a $(L^q)^*$; segue che $T(L^p)$ è un sottospazio chiuso di $(L^q)^*$, dato che L^p è di Banach.
Sia, ora, $1 < p \leq 2$. Ricordando che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha $q = \frac{p}{p-1} \geq 2$; allora, dalla dimostrazione precedente della riflessività, sappiamo che L^q è riflessivo per $q \in [2, \infty)$ e quindi, per il Corollario 2.24, anche $(L^q)^*$ è riflessivo. Allora, per la Proposizione 2.11 anche $T(L^p)$ è riflessivo ma, essendo L^p e $T(L^p)$ isometrici, anche L^p è riflessivo.

□

Teorema 3.7 (di rappresentazione di Riesz)**.** *Siano* $1 < p < \infty$ *e* $\Phi \in (L^p)^*$. *Allora esiste un unico elemento* $u \in L^q$ *tale che*

$$\langle \Phi, f\rangle = \int_\Omega uf \quad \forall f \in L^p.$$

Inoltre

$$\|\Phi\|_{(L^p)^*} = \|u\|_q.$$

Dimostrazione. Fissato $u \in L^q$, consideriamo l'operatore $T : L^q \to (L^p)^*$ così definito da $\langle Tu, f\rangle = \int_\Omega uf\ \forall f \in L^p$. Procedendo come nella dimostrazione precedente, dalla disuguaglianza di Hölder si ha $|\langle Tu, f\rangle| \leq \|u\|_q \|f\|_p\ \forall f \in L^p$ da cui segue $\|Tu\|_{(L^p)^*} \leq \|u\|_q$. D'altra parte, ponendo $f = |u|^{q-2}u$ e ragionando come nella dimostrazione del teorema precedente, si trova $\|Tu\|_{(L^p)^*} \geq \|u\|_q$. In definitiva risulta

$\|Tu\|_{(L^p)^*} = \|u\|_q$. Dunque T è un'isometria di L^q su un sottospazio chiuso $T(L^q)$ del duale di L^p.
Per concludere basta provare che $T(L^q)$ è denso in $(L^p)^*$. Sia $h \in (L^p)^{**}$ tale che $\langle h, Tu\rangle = 0\ \forall\, u \in L^q$; ricordando che, essendo L^p riflessivo, esso può essere identificato col suo biduale $(L^p)^{**}$, si ha

$$\langle h, Tu\rangle = \langle Tu, h\rangle = \int_\Omega hu \quad \forall\, u \in L^q.$$

Posto $u = |h|^{p-2}\, h$, si trova $0 = \langle h, Tu\rangle = \int_\Omega |h|^p = \|h\|_p^p$, da cui segue che $h = 0$. La conclusione segue usando il Corollario 2.5.

□

Il Teorema di rappresentazione di Riesz stabilisce un risultato molto importante: ogni funzionale lineare continuo Φ su L^p, $1 < p < \infty$, può essere rappresentato "concretamente" come un integrale tramite un elemento $u \in L^q$.
Inoltre l'applicazione $\Phi \mapsto u$, che è lineare, isometrica e suriettiva, permette di identificare lo spazio "astratto" $(L^p)^*$ con L^q, $\forall\, 1 < p < \infty$. Si ha, cioè

$$(L^p)^* = L^q.$$

Diamo la seguente

Definizione 3.3. *Uno spazio misurabile Ω $((\Omega, \mathcal{M}, \mu))$ è detto **separabile** se esiste una famiglia numerabile $\{E_n\}$ di elementi di $\mathcal{M}$ tale che la σ-algebra generata da $\{E_n\}$ coincida con $\mathcal{M}$ (cioé, $\mathcal{M}$ è la più piccola σ-algebra contenente tutti gli E_n).*

Esempio 3.6. *Lo spazio ($\mathbb{R}^N$, σ-algebra di Borel) è uno spazio misurabile separabile. Infatti si può scegliere come famiglia $\{E_n\}$ una qualunque famiglia numerabile di insiemi aperti tale che ogni insieme aperto di $\mathbb{R}^N$ possa essere espresso come unione degli E_n. Più in generale, se Ω è uno spazio metrico separabile e la σ-algebra $\mathcal{M}$ è costituita dagli insiemi di Borel (cioé, $\mathcal{M}$ è la σ-algebra generata dagli insiemi aperti in Ω), allora Ω è uno spazio misurabile separabile.*

Teorema 3.8. *Sia Ω uno spazio misurabile separabile. Allora $L^p(\Omega)$ è separabile $\forall\, 1 \le p < \infty$.*

Da questo teorema segue che $L^p(\mathbb{R}^N)$ è separabile, e anche $L^p(\Omega)$ $\forall\, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile. Infatti esiste un'isometria canonica da $L^p(\Omega)$ a $L^p(\mathbb{R}^N)$ (l'estensione si fa ponendo $f = 0$ fuori da Ω). Allora $L^p(\Omega)$ può essere identificato con un sottospazio di $L^p(\mathbb{R}^N)$ e quindi anche $L^p(\Omega)$ è separabile per la Proposizione 2.12.

B. Caso $p = 1$

Il Teorema di rappresentazione di Riesz vale anche per $p = 1$:

Teorema 3.9. *Sia $\Phi \in (L^1)^*$. Allora esiste un unico elemento $u \in L^\infty$ tale che*

$$\langle \Phi, f \rangle = \int_\Omega uf \quad \forall\, f \in L^1.$$

Inoltre

$$\|u\|_\infty = \|\Phi\|_{(L^1)^*}.$$

Dunque vale l'identificazione $(L^1)^* = L^\infty$.

Osserviamo che L^1 non è mai riflessivo tranne nel caso banale in cui Ω consiste di un numero finito di atomi[10] (in tal caso L^1 è di dimensione finita[11]).

Il Teorema 3.8 vale anche per $p = 1$, quindi ci dice che anche L^1 è separabile.

C. Caso $p = \infty$

Dal Teorema di rappresentazione di Riesz per $p = 1$, sappiamo che $L^\infty = (L^1)^*$; essendo uno spazio duale, L^∞ possiede quindi alcune interessanti proprietà:

i) la bolla chiusa unitaria B_{L^∞} è compatta nella topologia debole* $\sigma(L^\infty, L^1)$ (segue dal Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki);

ii) Se Ω è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ e $\{f_n\}$ è una successione limitata in $L^\infty(\Omega)$, allora esistono una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ e una funzione $f \in L^\infty(\Omega)$ tale che $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$ nella topologia debole* $\sigma(L^\infty, L^1)$

[10]Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurabile; un sottoinsieme misurabile $\omega \subseteq \Omega$ è detto **atomo** se $0 < \mu(\omega) < \infty$ e se non esiste nessuna partizione di ω in due insiemi misurabili entrambi di misura positiva. Qualche esempio di atomo si può trovare in [2].

[11]Si veda [1], pag. 101.

(è una conseguenza del Corollario 2.29 e del Teorema 3.8).

Invece L^∞ non è riflessivo tranne nel caso in cui Ω sia costituito da un numero finito di atomi; se per assurdo non fosse così, infatti, anche L^1 dovrebbe essere riflessivo (in quanto duale di uno spazio riflessivo).

Mostriamo ora che $(L^\infty)^* = (L^1)^{**}$ contiene strettamente L^1: infatti esistono funzionali lineari continui Φ su L^∞ che NON possono essere rappresentati come

$$\langle \Phi, f\rangle = \int_\Omega uf \quad \forall\, f \in L^\infty \text{ e qualche } u \in L^1.$$

Descriviamo un esempio "concreto" di tale funzionale.

Esempio 3.7. *Sia $\Phi_0 : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definito da $\Phi_0(f) = f(0)$; prendiamo come spazio di partenza $C[0,1]$ dato che una funzione continua su un compatto è (essenzialmente) limitata*[12] *(cioé $C[0,1]$ con la norma usuale è un sottospazio chiuso di $L^\infty[0,1]$). Il funzionale Φ_0 è lineare e continuo su $C[0,1]$ con la norma del max: infatti esso ha norma finita in $C[0,1]^*$; inoltre, per il Teorema di Helly-Hahn-Banach esso può essere esteso a un funzionale lineare continuo su $L^\infty[0,1]$. Si ha*

$$\langle \Phi_0, f\rangle = f(0) \quad \forall\, f \in C[0,1]; \tag{3.17}$$

supponiamo per assurdo che esista $u \in L^1[0,1]$ tale che

$$\langle \Phi_0, f\rangle = \int_\Omega uf \quad \forall\, f \in L^\infty[0,1]. \tag{3.18}$$

Sia $\{f_n\}$ una successione in $C[0,1]$ con $f_n(0) = 1$, $\|f_n\| = 1\ \forall\, n$ e tale che $f_n(x) \to 0$ in $\mathbb{R}$ per $x \in (0,1)$ (per esempio, $f_n(x) = (1-x)^n$ soddisfa queste condizioni); allora $\langle \Phi_0, f_n\rangle = f_n(0) = 1 \to 1$ per $n \to \infty$ mentre, per il Teorema di Lebesgue, si ha $\langle \Phi_0, f_n\rangle = \int_0^1 uf_n \to 0$ per $n \to \infty$.

[12] Oppure di potrebbe prendere, più in generale, $C_c(\mathbb{R}^N)$.

Risulta, infine, che L^∞ non è separabile tranne nel caso in cui Ω sia costituito da un numero finito di atomi.

Alla luce di quanto visto, enunciamo ora alcuni risultati riguardanti le topologie deboli negli spazi L^p.
Dal Teorema di rappresentazione di Riesz si deduce che $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ se e solo se $\forall\, u \in L^q(\Omega)$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n u = \int_\Omega f u.$$

Inoltre, $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $L^\infty(\Omega)$ se e solo se $\forall\, u \in L^1(\Omega)$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n u = \int_\Omega f u.$$

Invece, $f_n \rightharpoonup f$ in $L^\infty(\Omega)$ se e solo se $\forall\, \Phi \in (L^\infty)^*(\Omega)$ si ha $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ in $\mathbb{R}$.

In $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, la topologia debole $\sigma(L^p, L^q)$ coincide con la topologia debole* $\sigma(L^q, L^p)$ (essendo L^p riflessivo per $1 < p < \infty$).

In $L^\infty(\Omega)$ la topologia debole* $\sigma(L^\infty, L^1)$ è strettamente meno fine della topologia debole $\sigma(L^\infty, (L^\infty)^*)$ (dato che $(L^\infty)^*$ contiene strettamente L^1).

In $L^p(\Omega)$, $1 < p \le \infty$, la bolla chiusa unitaria $B_p = \{f : \|f\|_p \le 1\}$ è compatta per successioni rispetto alla topologia debole $\sigma(L^p, L^q)$ (per il Corollario 2.29 e per il Teorema 2.22), cioé da ogni successione $\{f_n\}$ in B_p è possibile estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che

$$\lim_{n_k\to\infty} \int_\Omega f_{n_k} u = \int_\Omega f u \quad \forall\, u \in L^q(\Omega).$$

Infatti $L^q(\Omega)$, $1 \le q < \infty$, è separabile e $L^p = (L^q)^*$.
Invece B_1 non è compatto per successioni rispetto alla topologia debole, dato che L^1 non è riflessivo e si può dimostrare che non è uno spazio duale.

Il seguente fornisce un esempio di successione (nello spazio L^p con $p = 2$) debolmente convergente ma non fortemente convergente.

Esempio 3.8. *Consideriamo la successione* $\{f_n\}$ *definita da* $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$*. Essa converge debolmente a* $f = 0$ *in* $L^2(0,\infty)$*, cioé* $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ *per* $n \to \infty$ *per ogni* $\Phi \in (L^2(0,\infty))^* = L^2(0,\infty)$*. Infatti, per il Teorema di rappresentazione di Riesz, ogni funzionale lineare continuo* $\Phi \in L^2(0,\infty)$ *può essere rappresentato come un integrale tramite un'unica funzione* $g \in L^2(0,\infty)$*:*

$$\langle \Phi, f_n \rangle = \int_0^\infty g f_n \, dx.$$

Per la disuguaglianza di Hölder il prodotto $gf_n \in L^1(0,\infty)$ *per ogni* n*; inoltre si ha* $\int_0^\infty |gf_n| \, dx \le \|g_2\|_2 \|f_n\|_2 = \left(\int_0^\infty |g|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$*, essendo* $\|f_n\|_2 = 1$*; allora la successione* $\{gf_n\}$ *è una successione di funzioni integrabili in* $(0,\infty)$ *e ammette una maggiorante integrabile (*g^2*); dato che* $gf_n = g\chi_{n,n+1} \to 0$ *q.o. in* $(0,\infty)$ *per* $n \to \infty$*, dal Teorema di Lebesgue della convergenza dominata segue che* $\int_0^\infty g f_n \, dx \to 0$*, cioé che* $\Phi(f_n) \to 0$ *per* $n \to \infty$*.*
D'altra parte, $\{f_n\}$ *non converge fortemente a zero in* $L^2(0,\infty)$*, dato che* $\|f_n - f\|_2 = \|f_n\|_2 = 1 \not\to 0$ *per* $n \to \infty$*.*

Come precedentemente osservato, le conseguenze del Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki nel caso degli spazi L^p, $1 < p < \infty$, possono essere "lette" da diversi punti di vista. Sapere che la bolla chiusa unitaria in $(L^p)^*$ sia debolmente* compatta ci dice, da un lato, che per ogni successione $\{f_n\}$ in L^p, $1 < p < \infty$, tale che $\|f_n\|_p \le c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per qualche costante $c > 0$ (cioé per ogni successione limitata in L^p), esiste una sottosuccessione debolmente convergente in L^p. Dal fatto che L^p è riflessivo per $1 < p < \infty$, ciò è affermato dal Teorema 2.22 di compattezza debole sequenziale. D'altra parte, essendo L^q separabile per $1 < q < \infty$, per il Corollario 2.29, ogni successione limitata in $(L^q)^*(= L^p)$ ammette una sottosuccessione debolmente* convergente, cioé convergente nella topologia debole* $\sigma((L^q)^*, L^q)$ (che coincide con la topologia $\sigma((L^p, (L^p)^*)$, debole di L^p).

Il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki in L^p non vale, invece, per $p = 1$, come mostra il seguente

Esempio 3.9. *Sia* $f_n(x) = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$*;* $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $\|f_n\|_1 = 1$ *per ogni* n*, quindi tale successione è limitata. Supponiamo per assurdo che una qualche sua sottosuccessione (che indichiamo ancora con* f_n*) converga debolmente a una certa* $f \in L^1(\mathbb{R})$*. Allora, scegliendo* $g = sgn(f)\chi_{\{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}}$ *(dove* $sgn(f)$ *indica la funzione segno di* f*) con* $0 \notin [a,b]$*,* g *è essenzialmente limitata in* $\mathbb{R}$ *e (per definizione di convergenza debole) si avrebbe*

$$\int_a^b |f|\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n g\, dx.$$

Dato che $0 \notin [a,b]$*, si otterrebbe* $\int_a^b |f|\, dx = 0$*, cioé* f *q.o. nulla in ogni intervallo limitato* $[a,b]$ *che non contiene* 0*, e quindi* $f = 0$ *q.o. in* $\mathbb{R}$*. Dunque* f_n *convergerebbe debolmente a* f *q.o. nulla.*
D'altra parte, anche la funzione costante $g = 1$ *sta in* $L^\infty(\mathbb{R})$ *e si ha* $\int_{\mathbb{R}} f_n\, dx = 1$ *per ogni* n*, quindi* $\int_{\mathbb{R}} 1 \cdot f_n\, dx \not\to 0$ *per* $n \to \infty$*.*

L'esempio precedente mostra anche che esistono successioni di funzioni convergenti q.o. ma non debolmente convergenti.

Definiamo ora $C_c(\mathbb{R}^N)$, lo spazio delle **funzioni continue a supporto**[13] **compatto**:

$$C_c(\mathbb{R}^N) = \{f \in C(\mathbb{R}^N) : f(x) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus K,\ K\text{compatto}\}.$$

Vale il seguente

Teorema 3.10 (di densità)**.** *Lo spazio* $C_c(\mathbb{R}^N)$ *è denso in* $L^p(\mathbb{R}^N)$ $\forall\, 1 \leq p < \infty$*:*

$$\forall\, f \in L^p(\mathbb{R}^N)\ \text{e}\ \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, g \in C_c(\mathbb{R}^N)\ \text{tale che}\ \|f - g\|_p < \epsilon.$$

[13] Definiamo $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Citiamo anche un altro risultato che è utile conoscere. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Ricordiamo che $C(\Omega)$ rappresenta lo spazio delle funzioni continue in Ω, $C^k(\Omega)$ rappresenta lo spazio delle funzioni derivabili k ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) volte con continuità in Ω, $C^\infty(\Omega) = \cap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$ rappresenta lo spazio delle funzioni infinitamente (o indefinitamente) derivabili con continuità in Ω. Inoltre, se $C_c(\Omega)$ rappresenta lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto in Ω, $C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.[14]
Ricordiamo, inoltre, che se $f \in C^1(\Omega)$ è definito il gradiente di f $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_N} \right)$. Se $f \in C^k(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, è un multi-indice di lunghezza $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \leq k$, si ha $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f$.
Allo spazio $C^\infty(\Omega)$ delle funzioni indefinitamente derivabili (rispetto a tutte le variabili) appartengono i polinomi $P(x)$, le funzioni razionali $\frac{P(x)}{Q(x)}$, dove $Q(x)$ è un polinomio che non si annulla in Ω, le funzioni $\sin P(x)$, $\cos P(x)$, $e^{P(x)}$, $\log P(x)$ con $P(x) > 0$ in Ω, ecc.
Nel caso delle funzioni $C_c^\infty(\Omega)$, il supporto può anche essere più grande dell'insieme di definizione: per esempio, se $f(x) > 0$ in Ω, allora $\mathrm{supp}(f) = \overline{\Omega}$. Le funzioni analitiche, tra cui i polinomi, stanno in $C^\infty(\Omega)$ ma non in $C_c^\infty(\Omega)$ (a meno che non si consideri la funzione identicamente nulla). Infatti, se una funzione analitica ha tutte le derivate nulle in un punto, allora è costante in tutto l'insieme in cui è analitica.

Un altro importantissimo risultato di densità è il seguente:

Teorema 3.11 (di densità). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Allora $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ $\forall\, 1 \leq p < \infty$.*

[14]Sottolineiamo che in molti testi quest'ultimo spazio viene denotato con $C_0^\infty(\Omega)$. Non è affatto banale trovare esempi di funzioni di classe $C^\infty(\Omega)$ che abbiano supporto contenuto in Ω; infatti, dato che la funzione e le sue derivate di qualunque ordine devono essere nulle sul bordo $\partial\Omega$ e in una "strisciolina" contenente $\partial\Omega$, il raccordo tra $f \neq 0$ e $f = 0$ deve essere tale che f sia di classe C^∞.

Enunciamo il seguente teorema, che contiene la definizione di convoluzione.

Teorema 3.12 (di Young)**.** *Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$. Allora, per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile in $\mathbb{R}^N$ e si definisce il* ***prodotto di convoluzione di*** *f* ***per*** *g*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Inoltre $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p$.

Dimostrazione. Se $p = \infty$ si ha

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dy \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dy$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$; passando al sup ess a primo e ultimo membro si ha $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$.
Sia $p = 1$; posto $F(x,y) = f(x-y)g(y)$, per q.o. $y \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dx$$

$$= |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx = |g(y)| \|f\|_1 < \infty;$$

inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty;$$

essendo soddisfatte entrambe le ipotesi del Teorema di Tonelli, segue che $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Dunque è soddisfatta anche l'ipotesi del Teorema di Fubini, da cui segue che $\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|\,dy < \infty$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$. Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty,$$

cioé

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy \right| dx = \|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Sia $1 < p < \infty$; per q.o. x fissato in $\mathbb{R}^N$ si ha

$$|f(x-y)|\,|g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|; \tag{3.19}$$

osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(x-y)|^{\frac{1}{q}}\right)^q dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dy < \infty,$$

quindi $|f(x-y)|^{\frac{1}{q}} \in L^q_y(\mathbb{R}^N)$ (rispetto a y); inoltre si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|\right)^p dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy < \infty;$$

dato che $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, cioé $g^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora, da quanto mostrato nel punto precedente segue che $fg^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e, usando la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|\right)^p dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^p\,dy = \|f\|_1\,\|g^p\|_1 < \infty,$$

cioé $|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N)$. Applicando la disuguaglianza di Hölder nella (3.19) si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy$$

$$\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(x-y)|^{\frac{1}{q}}\right)^q dy\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|\right)^p dy\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left\|f^{\frac{1}{q}}\right\|_q \left\|f^{\frac{1}{p}}g\right\|_p = \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

da cui, elevando a p:

$$|(f \star g)(x)|^p \leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}}\,(|f| \star |g|^p)(x). \tag{3.20}$$

Poiché $f, |g|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$, dal caso $p = 1$ segue che $f \star |g|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\|f \star |g|^p\|_1 \leq \|f\|_1\,\|g^p\|_1$. Allora $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e, integrando in $\mathbb{R}^N$ nella (3.20) si ha

$$\|f \star g\|_p^p \leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}}\,\|f \star |g|^p\|_1 \leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}}\,\|f\|_1\|g\|_p^p,$$

cioé (elevando a $\frac{1}{p}$)

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \|g\|_p = \|f\|_1 \|g\|_p.$$

□

Risulta spesso utile la seguente

Proposizione 3.9. *Siano* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$. *Posto,* $\forall f$ *su* $\mathbb{R}^N$, $\check{f}(x) = f(-x)$, *si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f \star g)h = \int_{\mathbb{R}^N} g(\check{f} \star h).$$

Il prodotto di convoluzione gode di varie proprietà.
a) *Commutatività*: $(f\star g)(x) = (g\star f)(x)$; verifichiamolo nel caso $N = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\, dy = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(z)g(x-z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\, dy,$$

dove, nel secondo passaggio, è stato effettuato il cambio di variabile $x - y = z$ e, nell'ultimo, si posto y al posto di z.
b) *Distributività*: $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$.
c) *Associatività*: $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$.
d) *Associatività rispetto al prodotto per uno scalare*: $\alpha(f \star g) = (\alpha f) \star g = f \star (\alpha g)$.

Esempio 3.10. *Date* $f(x) = e^{-x}$ *e* $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, *si ha*

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)} \chi_{[0,1]}(y)\, dy$$

$$= \int_0^1 e^{-x+y}\, dy = e^{-x+1} - e^{-x} = e^{-x}[e - 1].$$

Date $f(x) = e^{-x^2}$ *e* $g(x) = x$, *si ha (sfruttando la commutatività per comodità)*

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}(x - y)\, dy$$

$$= x\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy - \int_{\mathbb{R}} ye^{-y^2}\, dy = x\sqrt{\pi} + \frac{1}{2}\left[e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = x\sqrt{\pi}.$$

Supporto e convoluzione.
Il **supporto** $\mathrm{supp}(f)$ di una funzione f è la chiusura dell'insieme $\{x : f(x) \neq 0\}$ o, analogamente, il complementare dell'insieme aperto più grande in cui f si annulla.
Questa nozione non è adeguata quando si ha a che fare con classi di equivalenza di funzioni, come nel caso degli spazi L^p. Abbiamo bisogno, allora, di una definizione "intrinseca", cioé $\mathrm{supp}(f)$ e $\mathrm{supp}(g)$ devono essere gli stessi (o devono differire di un insieme nullo) se $f = g$ q.o.
La definizione usuale, infatti, non avrebbe senso, per esempio, per $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ su $\mathbb{R}$.

Proposizione 3.10 (Definizione di supporto)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione qualunque. Consideriamo la famiglia $\{\omega_i\}_{i\in I}$ di tutti gli insiemi aperti di $\mathbb{R}^N$ tale che, $\forall\, i \in I$, $f = 0$ q.o. su ω_i. Posto $\omega = \cup_{i\in I}\omega_i$, allora $f = 0$ q.o. su ω. Per definizione, supp(f) è il complementare di ω in $\mathbb{R}^N$.*

Dimostrazione. Dato che l'insieme I non è necessariamente numerabile, il fatto che $f = 0$ su ω non è ovvio, ma ci si può ricondurre al caso numerabile nel modo seguente. Esiste una famiglia numerabile $\{O_n\}$ di aperti di $\mathbb{R}^N$ tali che ogni aperto di $\mathbb{R}^N$ sia l'unione di un certo numero di tali insiemi O_n: $\omega_i = \cup_{n\in A_i} O_n$ e $\omega = \cup_{n\in B} O_n$, dove $B = \cup_{i\in I} A_i$. Essendo $f = 0$ q.o. su ogni insieme O_n con $n \in B$, si conclude che $f = 0$ q.o. su ω. □

Osserviamo che, se $f = g$ q.o. su $\mathbb{R}^N$, allora $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(g)$; quindi si può parlare del supporto di $f \in L^p$ senza specificare quale rappresentante della classe di equivalenza si stia considerando.
Inoltre, se f è continua in $\mathbb{R}^N$ allora la nuova definizione di supporto coincide con quella solita.
Vista la definizione, quando si parla di supporto per funzioni in $f \in$

$L^p(\Omega)$, $\mathrm{supp}(f)$ si può chiamare anche *supporto essenziale*. Se f è continua il supporto essenziale coincide con quello ordinario.

Proposizione 3.11. *Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Allora*[15]

$$supp(f \star g) \subseteq \overline{supp(f) + supp(g)}.^{16}$$

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \mathbb{R}^N$ tale che la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ sia integrabile. Si ha

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{[x-\mathrm{supp}(f)\,]\cap\,\mathrm{supp}(g)} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Se $x \notin \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$, allora $[x - \mathrm{supp}(f)] \cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$ e $(f \star g)(x) = 0$. Allora

$$(f \star g)(x) = 0 \text{ q.o. su } [\mathrm{supp}(f)\ + \mathrm{supp}(g)]^C.$$

In particolare,

$$(f \star g)(x) = 0 \text{ q.o. su } \mathrm{Int}\big[(\mathrm{supp}(f)\ + \mathrm{supp}(g))^C\big]$$

e quindi il supporto di $f \star g$ è contenuto in $\overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$. $\square$

Osserviamo che se f e g hanno entrambe supporto compatto, allora anche $f \star g$ ha supporto compatto, mentre $f \star g$ non ha necessariamente supporto compatto se una sola tra f e g ha supporto compatto.

Definizione 3.4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e sia $1 \leq p \leq \infty$. Si dice che una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R} \in L^p_{loc}(\Omega)$ se $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$.*

Gli spazi $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ sono detti spazi di funzioni **localmente integrabili** (in particolare per $p = 1$, altrimenti **localmente p-integrabili**). Osserviamo che se $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ allora $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

[15] Ricordiamo che, dato uno spazio vettoriale V e $A, B \subset V$, si definisce (la *somma di Minkowsky*) $A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$.

[16] Si osservi che in [1] il simbolo di inclusione sottintende che valga anche l'uguaglianza.

Proposizione 3.12. *Siano* $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$*. Allora il prodotto di convoluzione* $(f \star g)(x)$ *è ben definito per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$ *e si ha* $f \star g \in C(\mathbb{R}^N)$*.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$ la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile in $\mathbb{R}^N$; quindi $(f \star g)(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ (non solo per q.o. x).
Sia $\{x_n\}$ una successione tale che $x_n \to x$ per $n \to \infty$ e sia K un insieme compatto fissato in $\mathbb{R}^N$ tale che $(x_n - \mathrm{supp}(f)) \subset K\ \forall\, n$. Allora si ha $f(x_n - y) = 0\ \forall\, n$ e $\forall\, y \notin K$. Dato che le funzioni continue su un compatto sono uniformemente continue, dall'uniforme continuità di f segue che

$$|f(x_n - y) - f(x-y)| \leq \epsilon_n \chi_K(y) \quad \forall\, n \text{ e } \forall\, y \in \mathbb{R}^N$$

con $\epsilon_n \to 0$ per $n \to \infty$. Allora, moltiplicando la precedente disuguaglianza per $|g(y)|$ e usando la lipschitzianità del modulo si ricava

$$|f(x_n - y)g(y)| - |f(x-y)g(y)|$$

$$\leq |f(x_n - y) - f(x-y)|\,|g(y)| \leq \epsilon_n \chi_K(y)|g(y)|;$$

integrando primo e ultimo membro su $\mathbb{R}^N$ si trova

$$|(f \star g)(x_n) - (f \star g)(x)| \leq \epsilon_n \int_K |g(y)|\, dy;$$

passando al limite per $n \to \infty$ il secondo membro tende a zero, e la definizione di continuità è soddisfatta.

$\square$

Proposizione 3.13. *Siano* $f \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$ *(*$k \geq 1$*) e* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$*. Allora* $f \star g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$D^\alpha(f \star g) = (D^\alpha f) \star g \quad \forall\, \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k.$$

In particolare, se $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$*, allora* $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$*.*

Dimostrazione. Si dimostra per induzione, quindi consideriamo solo il caso $k = 1$. Dato $x \in \mathbb{R}^N$, mostriamo che $f \star g$ è derivabile in x e che

$\nabla(f \star g)(x) = (\nabla f) \star g(x)$. Sia $h \in \mathbb{R}^N$ con $\|h\| < 1$. Per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\begin{aligned} &|f(x+h-y) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y)| \\ = &\left| \int_0^1 [h \cdot \nabla f(x+sh-y) - h \cdot \nabla f(x-y)]\, ds \right| \leq \|h\| \varepsilon(\|h\|), \end{aligned}$$

con $\varepsilon(\|h\|)$ per $\|h\| \to 0$ (essendo ∇f uniformemente continuo su $\mathbb{R}^N$). Sia K un insieme compatto fissato in $\mathbb{R}^N$ sufficientemente grande, tale che $x + B_1(0) - \mathrm{supp}(f) \subset K$. Si ha

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y) = 0 \quad \forall\, y \notin K \quad \text{e} \quad \forall\, h \in B_1(0)$$

e quindi

$$\begin{aligned} &|f(x+h-y) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y)| \\ &\leq \|h\| \varepsilon(\|h\|) \chi_K(y) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^N,\ \forall\, h \in B_1(0). \end{aligned}$$

Si conclude che per $h \in B_1(0)$ si ha

$$|(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x) - h \cdot (\nabla f \star g)(x)| \leq \|h\| \varepsilon(\|h\|) \int_K |g(y)|\, dy.$$

Segue che $f \star g$ è derivabile in x e $\nabla(f \star g)(x) = (\nabla f) \star g(x)$. $\square$

3.2 Mollificatori

Definizione 3.5. *Una successione di* ***mollificatori***[17] $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$ *è una qualunque successione di funzioni su* $\mathbb{R}^N$ *tale che*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \mathit{supp}(\rho_n) \subset \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \ \mathit{su}\ \mathbb{R}^N.$$

Esistono infinite successioni di mollificatori. Di solito una successione di mollificatori viene generata a partire da una (singola) funzione $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\mathrm{supp}(\rho) \subset \overline{B_1(0)}$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1$, $\rho \geq 0$ su $\mathbb{R}^N$, non identicamente nulla. In genere come funzione "di partenza" si prende

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}} & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

[17]La parola deriva dall'inglese: *to mollify* significa addolcire, rendere liscio. I mollificatori vengono anche chiamati "regolarizzatori".

Il supporto di $\rho(x)$ è la bolla [18] chiusa $\overline{B_1(0)}$, $\rho(x) \geq 0$ e, effettivamente, $\rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$; ρ è una funzione radiale (il suo valore dipende cioé solo dal raggio $\|x\|$ della bolla). A partire da $\rho(x)$ si ottiene una successione di mollificatori ponendo $\rho_n(x) = Cn^N \rho(nx)$, dove $C = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx}$ è la costante di normalizzazione.[19] Verifichiamolo almeno per $N = 1$:

$$\rho(nx) = \begin{cases} e^{\frac{1}{n^2x^2-1}} & \text{se } |nx| < 1 \\ 0 & \text{se } |nx| \geq 1, \end{cases}$$

da cui segue che $\text{supp}(\rho(nx)) = \overline{B_{\frac{1}{n}(0)}}$; inoltre, col cambio di variabili $nx = t$ si ha $\int_{\mathbb{R}} \rho(nx)\, dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)\, dt$.
I mollificatori sono chiamati così perché sono utili per costruire approssimazioni regolari di funzioni L^p (sono una sorta di "regolarizzatori"). Tali approssimazioni si costruiscono tramite il prodotto di convoluzione: data $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, si considera la successione definita da

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) f(y)\, dy, \tag{3.21}$$

cioé il prodotto di convoluzione di ρ_n e f. Per il Teorema di Young, tale integrale è ben definito. Anche quando $f \in L^p(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato, si pone $f = 0$ fuori da Ω e si considera l'integrale esteso a $\mathbb{R}^N$.
Verifichiamo che la successione $f_n(x)$ è continua; per n fissato, calcoliamo il

$$\lim_{h\to 0} f_n(x+h) = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x+h-y) f(y)\, dy.$$

Vorremmo poter passare al limite sotto il segno di integrale: osserviamo che, essendo $\rho_n(x)$ continua, si ha

$$\lim_{h\to 0} \rho_n(x+h-y) f(y) = \rho_n(x-y) f(y)$$

[18] Più in generale, si può considerare

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leq \|x\| \leq r, \end{cases}$$

$r > 1$, definita nella bolla $B_r(0)$, che sta in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Ponendo $\rho_\lambda(x) = \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, con $\lambda > 0$, sin ottiene un'altra funzione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, con supporto $\overline{B_\lambda(0)}$; operando una traslazione, si può poi considerare la funzione $\rho_\lambda(x - x_0) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, con supporto $\overline{B_\lambda(x_0)}$.

[19] Spesso un **mollificatore** viene indicato con $\varphi(x)$; se φ è un mollificatore, lo sono anche le funzioni $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-N} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, $0 < \epsilon \leq 1$.

per q.o. $y \in \mathbb{R}^N$; inoltre, dato che $\rho_n(x)$ ha anche supporto limitato, essa è limitata, quindi $|\rho_n(x+h-y)f(y)| \leq M|f(y)|$, che è indipendente da h e sta in $L^1(\mathbb{R}^N)$ per q.o. $y \in \mathbb{R}^N$. Per il Teorema di Lebesgue si può dunque passare al limite sotto il segno di integrale, da cui si ricava

$$\lim_{h\to 0} f_n(x+h) = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{h\to 0} \rho_n(x+h-y)f(y)\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)f(y)\,dy = f_n(x).$$

La successione f_n è derivabile rispetto a ogni variabile. Per semplicitá, poniamoci nel caso $N = 1$, e studiamo il

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho_n(x+h-y) - \rho(x-y)}{h} f(y)\,dy.$$

Anche qui vorremmo poter passare al limite sotto il segno di integrale: essendo $\rho_n(x)$ di classe C^∞, si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\rho_n(x+h-y) - \rho(x-y)}{h} f(y) = \rho_n'(x-y)f(y);$$

inoltre, per il Teorema di valor medio di Lagrange,

$$\left| \frac{\rho_n(x+h-y) - \rho(x-y)}{h} f(y) \right| = |\rho_n'(x+\theta h-y)f(y)| \leq M_1|f(y)|,$$

dove M_1 indica il massimo di $|\rho_n'(x)$; applicando nuovamente il Teorema di Lebesgue, si trova

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n'(x-y)f(y)\,dy = f_n'(x).$$

Nel caso $N > 1$, analogamente di trova

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x-y)f(y)\,dy = f_n'(x), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Procedendo in modo analogo si dimostra che le derivate parziali di f_n sono continue e che tutte le derivate parziali di qualunque ordine sono continue, cioé $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Sia $f \in L^p(\Omega)$, con Ω aperto limitato; in particolare, sia $N = 1$ e $\Omega = (a, b)$. Mostriamo che il supporto di f_n è contenuto in Ω: in

$$f_n(x) = \int_a^b \rho_n(x-y)f(y)\,dy,$$

poniamo $x - y = -z$; ricordando che ρ_n è pari si ha

$$f_n(x) = \int_{a-x}^{b-x} \rho_n(z) f(x+z)\, dz;$$

dato che il supporto di ρ_n l'intervallo $\left[-\frac{1}{n}\,,\frac{1}{n}\right]$, tale integrale è nullo per $b - x < -\frac{1}{n}$ e $a - x > \frac{1}{n}$, cioé quando x è esterno all'intervallo $\left[a - \frac{1}{n}\,, b + \frac{1}{n}\right]$.
Precisamente, vale il seguente risultato.

Proposizione 3.14. *Sia $f \in C(\mathbb{R}^N)$. Allora $\rho_n \star f \to f$ uniformemente per $n \to \infty$ sui compatti di $\mathbb{R}^N$.*

Dimostrazione. Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un insieme compatto fissato. Dato $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ ($\delta = \delta(K, \epsilon)$) tale che

$$|f(x-y) - f(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in K \text{ e } \forall\, y \in B_\delta(0).$$

Per $x \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$(\rho_n \star f)(x) - f(x) = (\rho_n \star f)(x) - f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y) - f(x)] \rho_n(y)\, dy = \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} [f(x-y) - f(x)] \rho_n(y)\, dy.$$

Per $n > \frac{1}{\delta}$ e $x \in K$ si ha $|(\rho_n \star f)(x) - f(x)| \le \epsilon \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \rho_n(y)\, dy = \epsilon$.
Passando al sup per $x \in K$ si ha la convergenza uniforme.

□

I seguenti risultati mostrano che la convoluzione conserva le proprietà "migliori" delle funzioni coinvolte nel prodotto, cioé la loro massima regolarità.

Teorema 3.13. *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty$. Allora $\rho_n \star f \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $n \to \infty$.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che la successione definita in (3.21) converge a f in $L^p(\mathbb{R}^N)$.
Dato $\epsilon > 0$, fissiamo una funzione $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - f_1\|_p < \epsilon$ (ricordiamo che $C_c(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$). Dalla Proposizione 3.14

sappiamo che $(\rho_n \star f_1) \to f_1$ uniformemente in ogni insieme compatto di $\mathbb{R}^N$, cioé $\sup|\rho_n \star f_1 - f_1| \to 0$ per $n \to \infty$ (dove il sup è fatto sul supporto di $\rho_n \star f_1 - f_1$), da cui

$$\sup|(\rho_n \star f_1) - f_1|^p \to 0 \tag{3.22}$$

per $n \to \infty$. D'altra parte, dalla Proposizione 3.11

$$\operatorname{supp}(\rho_n \star f_1) \subset \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)} + \operatorname{supp}(f_1) \subset \overline{B_1(0)} + \operatorname{supp}(f_1), \tag{3.23}$$

che è un insieme compatto fissato. Allora, dalla (3.23) segue che $\operatorname{supp}(\rho_n \star f_1) - \operatorname{supp}(f_1) \subset \overline{B_1(0)}$ e quindi dalla (3.22) $\int_{B_1(0)} |(\rho_n \star f_1) - f_1|^p \to 0$, cioé

$$\|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p \to 0 \tag{3.24}$$

per $n \to \infty$. Scrivendo ora

$$\begin{aligned}(\rho_n \star f) - f &= (\rho_n \star f) - (\rho_n \star f_1) + (\rho_n \star f_1) - f_1 + f_1 - f \\ &= [\rho_n \star (f - f_1)] + [(\rho_n \star f_1) - f_1] + [f_1 - f]\end{aligned}$$

(dove è stata sfruttata la distributività del prodotto di convoluzione) segue che (dal Teorema di Young)

$$\begin{aligned}\|(\rho_n \star f) - f\|_p &\leq \|\rho_n\|_1 \|f - f_1\|_p + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p + \|f_1 - f\|_p \\ &= 2\|f - f_1\|_p + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p.\end{aligned}$$

Passando al lim sup nella relazione precedente e sfruttando la (3.24) si ricava

$$\limsup_{n\to\infty} \|(\rho_n \star f) - f\|_p \leq 2\epsilon \quad \forall \epsilon > 0;$$

d'altra parte, usando la semicontinuità inferiore della norma si ricava

$$\lim_{n\to\infty} \|(\rho_n \star f) - f\|_p = 0.$$ [20]

$\square$

[20] Si potrebbero fare i passaggi in maniera più esplicita, di fatto rifacendo i passaggi della dimostrazione del Teorema di convoluzione di Young. Consideriamo la differenza

$$f_n(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) f(y)\, dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} [f(y) - f(x)] \rho_n(x-y)\, dy = \int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} [f(x+z) - f(x)] \rho_n(z)\, dz,$$

Dal Teorema 3.13 segue il seguente risultato di densità; infatti, abbiamo appena mostrato che, data $f \in L^p(\mathbb{R}^N$, si può costruire una successione f_n ($f_n = \rho_n \star f$) che converge a f in $L^p(\mathbb{R}^N$.

Corollario 3.14. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Allora $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ $\forall\, 1 \leq p < \infty$.*

Le funzioni di L^p sono molto numerose, molto di più delle funzioni derivabili con continuità. L'insieme delle funzioni derivabili con continuità ha la potenza del continuo $\mathcal{C}$, mentre l'insieme delle funzioni con potenza integrabile ha cardinalità $2^{\mathcal{C}}$. Ciononostante, una funzione di L^p può sempre essere approssimata con funzioni C_c^∞.
Una funzione continua (in un compatto) può essere approssimata con

---

dove sono state usate le proprietà di ρ_n e si è effettuato il cambio di variabili $x - y = -z$. Si ha

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} [f(x+z) - f(x)]\rho_n(z)\,dz \right| \\ &\leq \int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} |f(x+z) - f(x)| \rho_n(z)^{\frac{1}{p}} \rho_n(z)^{1-\frac{1}{p}}\,dz \\ &\leq \left(\int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} |f(x+z) - f(x)|^p \rho_n(z)\,dz \right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, è stata usata la disuguaglianza d Hölder, dato che ρ_n sta in L^p per qualunque p, considerando $|f(x+z) - f(x)|\rho_n(z)^{\frac{1}{p}} \in L^p$, $\rho_n(z)^{1-\frac{1}{p}} \in L^q$ e osservando che $\|\rho_n(z)^{\frac{1}{q}}\|_q = 1$. Elevando a p primo e ultimo membro si trova

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq \int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} |f(x+z) - f(x)|^p \rho_n(z)\,dz$$

da cui, integrando su Ω e scambiando l'ordine di integrazione (Teorema di Fubini-Tonelli)

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p\,dx &\leq \int_\Omega dx \int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} |f(x+z) - f(x)|^p \rho_n(z)\,dz \\ &= \int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} \rho_n(z)\,dz \int_\Omega |f(x+z) - f(x)|^p\,dx.\end{aligned}$$

Dalla continuità per traslazioni degli spazi L^p, si ha che , preso $\sigma > 0$, esiste $\epsilon_0(\sigma) > 0$ tale che, se $|z| < \epsilon_0$, si ha $\int_\Omega |f(x+z) - f(x)|^p\,dx < \sigma$. Dato che z varia nella bolla $B\left(0, \frac{1}{n}\right)$, basta prendere il raggio della bolla abbastanza piccolo, cioé $\frac{1}{n} < \epsilon_0$. La precedente disuguaglianza conduce allora a

$$\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p\,dx < \sigma \int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} \rho_n(z)\,dz = \sigma,$$

cioé

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p\,dx = 0.$$

un polinomio di grado opportuno; se la funzione è anche analitica, come polinomio si può prendere lo sviluppo di Taylor troncato fino a un certo ordine, che dipende dal grado di approssimazione desiderato. Se la funzione è continua e anche derivabile, si può considerare il suo sviluppo in serie di Fourier, che a sua volta può essere approssimato con un polinomio. Se la funzione è soltanto continua, prima la si può approssimare con una funzione C^1 tramite la convoluzione, poi approssimarla con uno sviluppo in seni e coseni, e da questa approssimare con lo sviluppo di Taylor.

La Proposizione 3.14 segue anche dal Teorema 3.13, usando la dimostrazione contenuta nella nota 19. Per $\frac{1}{n} < \epsilon_0 = \frac{\mathrm{dist}(K,\partial\Omega)}{2}$ si trova

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} |f(x+z) - f(x)|\rho_n(z)\, dz. \tag{3.25}$$

Dato che f è continua nell'insieme chiuso e limitato $\overline{\Omega}_{-\epsilon}$, dove $\Omega_{-\epsilon} = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, \partial\Omega) \geq \epsilon_0\}$ (tale insieme ha distanza positiva dal bordo di Ω), essa è uniformemente continua in tale insieme. Quindi, $\forall\, \sigma > 0$ $\exists\, \delta_\sigma > 0$ tale che, se $|z| < \delta_\sigma$ e x nel compatto K fisato contenuto in Ω, si ha $|f_n(x) - f(x)| < \sigma$. Sostituendo nella (3.25), per $\frac{1}{n} < \delta_\sigma$ e per ogni $x \in K$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} \sigma\rho_n(z)\, dz = \sigma.$$

Una conseguenza di questo fatto è che se $f \in L^p(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato, la successione f_n definita in (3.21) converge a f q.o. in Ω. Infatti, $\forall\, \sigma > 0$ esiste $I \subset \Omega$, con $|I| < \sigma$, tale che f sia continua in $\Omega \setminus I$ e, per il teorema precedente della convergenza uniforme sui compatti, $f_n \to f$ uniformemente in $\Omega \setminus I$. Dato che σ è arbitrario, cioò significa che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \Omega$ tranne, al piú, in un sottoinsieme di misura nulla (l'idea è sempre quella di togliere da Ω un insieme che contiene i punti di discontinuità della funzione).

Corollario 3.15. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che $\int_\Omega uf = 0\ \forall\, f \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora $u = 0$ q.o. in Ω.*

Dimostrazione. Sia $g \in L^\infty(\Omega)$ tale che supp(g) sia un insieme compatto contenuto in Ω. Poniamo $g_n = \rho_n \star g$, in modo tale che $g_n \in C_c^\infty(\Omega)$ se n è sufficientemente grande. Allora

$$\int_\Omega u g_n = 0 \quad \forall n. \tag{3.26}$$

Dato che, dal Teorema 3.13, $g_n \to g$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$, per il Teorema 3.4 esiste una sottosuccessione (che denotiamo ancora con g_n), tale che $g_n \to g$ q.o. in $\mathbb{R}^N$. Inoltre si ha $\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Passando al limite per $n \to \infty$ nella (3.26), per il Teorema della convergenza dominata si ottiene

$$\int_\Omega u g = 0. \tag{3.27}$$

Sia K un compatto contenuto in Ω; scegliamo come g la funzione[21]

$$g = \begin{cases} \mathrm{sgn}(u) & \text{su } K \\ 0 & \text{su } \mathbb{R}^N \setminus K. \end{cases}$$

Dalla (3.27) segue che $\int_K |u| = 0$ e, quindi, si ha $u = 0$ q.o. su K. Dato che questo vale per ogni compatto $K \subset \Omega$, si conclude che $u = 0$ q.o. in Ω.

□

3.3 Criterio di compattezza forte in L^p

È importante capire quando una famiglia di funzioni in $L^p(\Omega)$ abbia chiusura compatta in $L^p(\Omega)$ (per la topologia forte).
Il Teorema di Ascoli-Arzelà risponde a questo interrogativo nello spazio $C(K)$ delle funzioni continue su uno spazio metrico compatto K a valori in $\mathbb{R}$:

Teorema 3.16 (di Ascoli-Arzelà)**.** *Siano (K, d) uno spazio metrico compatto e $\mathcal{H}$ un sottoinsieme limitato di $C(K)$. Se $\mathcal{H}$ è uniformemente continuo, cioé*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \textit{tale che } d(x_1, x_2) < \delta \ \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \ \forall f \in \mathcal{H}$$

allora la chiusura di $\mathcal{H}$ in $C(K)$ è compatta.

[21] Indichiamo con sgn(u) la funzione *segno* di u.

Ricordiamo anche la formulazione del Teorema 3.16 in $C[a, b]$:
sia $\{f_n(t)\}$ *una successione di funzioni appartenente allo spazio* $C^0([a, b])$ *tale che:*
i) $\{f_n\}$ *è equilimitata, cioé esiste una costante* M*, indipendente da* n *e da* t*, tale che*

$$|f_n(t)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad e \quad \forall t \in [a, b];$$

ii) $\{f_n\}$ *è equicontinua, cioé* $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta(\epsilon) > 0$ *(indipendente da* n*) tale che, per ogni coppia di punti* t_1, t_2 *tali che* $|t_1 - t_2| < \delta$ *si abbia* $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \epsilon$.
Allora esiste una sottosuccessione convergente in $C[a, b]$.

Il teorema seguente e i suoi corollari sono "versioni L^p" del Teorema 3.16.

Teorema 3.17 (di Kolmogorov-Riesz-Fréchet)**.** *Sia* $\mathcal{F}$ *un insieme limitato in* $L^p(\mathbb{R}^N)$*,* $1 \leq p < \infty$*. Se*

$$\lim_{h \to 0} \|f(x + h) - f(x)\|_p = 0 \quad \textit{uniformemente in } f \in \mathcal{F},$$

cioé $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *tale che,* $\forall\, h \in \mathbb{R}^N$ *con* $\|h\| < \delta$ *si abbia* $\|f(x + h) - f(x)\|_p < \epsilon\ \forall\, f \in \mathcal{F}$*, allora la chiusura di* $\mathcal{F}_{|\Omega}$ *in* $L^p(\Omega)$ *è compatta per ogni insieme misurabile* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *di misura finita (dove* $\mathcal{F}_{|\Omega}$ *rappresenta la restrizione ad* Ω *delle funzioni in* $\mathcal{F}$*).*

Definizione 3.6. *Sia* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*; fissato* $x \in \mathbb{R}^N$*, l'operatore* τ_h *definito come*

$$\tau_h f(x) = f(x + h) \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^N$$

*è detto **operatore di traslazione**.*

La seguente proposizione esprime la cosiddetta "invarianza per traslazioni" degli spazi L^p.

Proposizione 3.15. $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$ *si ha* $\|\tau_h f\|_p = \|f\|_p$.

Dimostrazione. Siano $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p$. Si ha

$$\|\tau_h f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\tau_h f|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h)|^p \, dx;$$

posto $x + h = y$ (la matrice jacobiana del cambio di variabile è la matrice identica) si ricava

$$\|\tau_h f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p \, dy = \|f\|_p^p.$$

Sia, ora, $p = \infty$; si ha (usando lo stesso cambio di variabile)

$$\|\tau_h f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^N} |\tau_h f(x)| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+h)| = \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}^N} |f(y)| = \|f\|_\infty.$$

□

Vale anche la proprietà di "continuità per traslazioni" degli spazi L^p.

Proposizione 3.16. *$\forall\, 1 \leq p < \infty$ l'operatore τ_h è continuo in L^p, cioé*

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$

Se $p = \infty$, f è uniformemente continua se e solo se

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_\infty = 0.$$

Dimostrazione. Sia $f \in L^p(\Omega)$. Fissato $x \in \Omega$, dobbiamo mostrare che

$$\lim_{h \to 0} \int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

Nel caso in cui Ω sia limitato, potrebbe capitare che $x + h$ sia esterno a Ω; allora si pone convenzionalmente $f = 0$ fuori da Ω (f continua ad appartenere a L^p).
Se f è uniformemente continua (cioé, $\forall \epsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0$ tale che, per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$ con $|x - y| < \delta$ si ha $|f(x) - f(y)| < \epsilon$), la differenza $|f(x+h) - f(x)|$ si può rendere minore di ϵ fissato, pur di prendere $|x + h - x| = |h| < \delta(\epsilon)$. In questo caso quindi si ha

$$\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < \epsilon^p \int_\Omega dx = \epsilon^p |\Omega|,$$

che tende a zero per $\epsilon \to 0$, e la tesi segue immediatamente.
Se f è continua, ponendola uguale a zero fuori da Ω si crea una discontinuità sulla frontiera, quindi occorre porre $f = 0$ anche su $\partial\Omega$. L'idea è allora quella di togliere da Ω un insieme piccolo a piacere, che contenga tutti i punti di discontinuità. Nella parte rimanente la funzione può essere discontinua, ma comunque integrabile.

Inoltre si usa una disuguaglianza algebrica, valida per ogni coppia di numeri reali non negativi a, b:

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{3.28}$$

Per $p = 2$ la disuguaglianza è vera, negli altri casi si considera la funzione di due variabili $g(a,b) = (a+b)^p - 2^{p-1}(a^p + b^p)$, si trova che ha un massimo per $a = b$, e negli altri punti si ha $g(a,b) \leq 0$. Oppure si può considerare la funzione $f(t) = t^p$, $p \geq 1$; essendo $f'(t) = pt^{p-1}$ e $f''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geq 0$, si trova che $f(t)$ è convessa. Per la proprietà delle funzioni convesse (l'ordinata del punto che ha ascissa nel punto medio tra a e b è minore o uguale alla somma delle ordinate di a e b), si ha $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2}$.

Sia I un sottoinsieme misurabile qualunque di Ω; scriviamo

$$\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx$$
$$= \int_I |f(x+h) - f(x)|^p \, dx + \int_{\Omega \setminus I} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx.$$

Dalla (3.28) si ha

$$\int_I |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \leq 2^{p-1} \int_I (|f(x+h)|^p + |f(x)|^p) \, dx$$
$$= 2^{p-1} \left(\int_I (|f(x+h)|^p \, dx + \int_I (|f(x)|^p \, dx \right).$$

Sia $\epsilon > 0$; per il Teorema dell'assoluta continuità dell'integrale[22] esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $I \subset \Omega$ con $|I| < \delta$ si abbia

$$\int_I (|f(x)|^p \, dx < \frac{\epsilon}{2^{p+1}}.$$

[22] Il Teorema (dell'assoluta continuità dell'integrale) afferma: *se* $f \in L^p(\Omega)$ *(cioé se* $|f|^p$ *è integrabile),* $\forall \epsilon \; \exists \delta > 0$ *tale che, se* $|I| < \delta$*, allora* $\int_I |f|^p \, dx < \epsilon$.

Nella maggiorazione si può far comparire 2^{p+1} a denominatore, tanto se vogliamo che ϵ sia piccolo, a maggior ragione lo sarà la quantità che compare a secondo membro della precedente disuguaglianza. Inoltre, per $|I| < \delta$ si ha anche

$$\int_I (|f(x+h)|^p \, dx < \frac{\epsilon}{2^{p+1}} \,,$$

dato che la misura dell'insieme I è invariante per traslazioni: l'integrale di $f(x+h)$ su I è uguale all'integrale di $f(x)$ su $I_h = I+h$, ma $|I_h| = |I|$. Dunque si ha

$$\int_I |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < 2^{p-1} \left(\frac{\epsilon}{2^{p+1}} + \frac{\epsilon}{2^{p+1}} \right) = \frac{\epsilon}{2} \,. \tag{3.29}$$

Rimane da stimare l'integrale $\int_{\Omega \setminus I} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx$; ora, se $x \in \Omega \setminus I$, non è detto che $x+h$ vi appartenga; allora, anziché considerare l'insieme I, mettiamoci in un insieme più piccolo.
Usiamo il Teorema della quasi continutità[23]: in corrispondenza di δ esiste un insieme misurabile J[24] con $|J| < \frac{\delta}{2}$, tale che f sia uniformemente continua in $\Omega \setminus J = F$; dato che $|J| < \frac{\delta}{2}$, $|F| > |\Omega| - \frac{\epsilon}{2}$. Cerchiamo ora gli $x \in F$ tali che anche $x+h \in F$. In corrispondenza dell'ϵ fissato scegliamo η tale che, per $|h| < \eta$, $x \in F$ tale che anche $x+h \in F$, si abbia (sfruttando la continuità uniforme di f)

$$|f(x+h) - f(x)| < \left(\frac{\epsilon}{2|\Omega|} \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{3.30}$$

Indichiamo con $F_h = F \cap (F-h)$ l'insieme dei punti $x \in F$ con $x+h \in F$;[25] la misura di F_h tende alla misura di F per $|h| \to 0$. Sia allora $|h| < \eta$, con η sufficientemente piccolo tale che $|F_h| > |F| - \frac{\delta}{2} > |\Omega| - \delta$. Se $I = \Omega \setminus F_h$, allora $|I| < \delta$; quindi, usando la (3.29) su I e (3.30) su $\Omega \setminus I = F_h$, per $|h| < \eta$ si ha

$$\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx$$

[23]Teorema (della quasi continutità): *Se $f \in L^p(\Omega)$, $\forall\, \delta > 0$ esiste un insieme misurabile $I \subset \Omega$, con $|I| < \delta$, tale che f sia uniformemente continua in $\Omega \setminus I$.* In realtà, questo teorema vale per tutte le funzioni misurabili.

[24]L'insieme J esiste e "raccoglie" tutti i punti di discontinuità della funzione.

[25]L'idea è quella di eliminare da F i punti vicini al bordo. Tale insieme dipende da h, dato che, se h diminuisce, la misura di F_h aumenta; se $h = 0$, $|F| = |F_h|$.

$$= \int_I |f(x+h) - f(x)|^p \, dx + \int_{\Omega \setminus I} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2|\Omega|} \cdot |\Omega \setminus I| < \epsilon,$$

da cui la tesi. □

Capitolo 4

Spazi l^p

Consideriamo l'insieme $\mathbf{s}$ di tutte le successioni numeriche reali, il cui generico elemento sarà indicato con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) = \{x_n\}$; esso forma uno spazio vettoriale con le operazioni

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$$

e

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots),$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \mathbf{s}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Gli elementi $\mathbf{e}^1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $\mathbf{e}^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $\mathbf{e}^3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$, e così via sono una base per $\mathbf{s}$ ($\mathbf{s}$ è uno spazio a dimensione infinita).[1]
In $\mathbf{s}$ si può inoltre definire una distanza

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \, ;$$

si verificano facilmente i primi due assiomi di una metrica; la disuguaglianza triangolare deriva invece dal fatto che la funzione $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ è crescente per $t \geq 0$, e quindi $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ sussiste la disuguaglianza numerica

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|} \, .$$

[1] Alcuni riferimenti per i contenuti di questo capitolo si possono trovare in [4], oppure in [2].

Quindi, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\,\frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|} &= \frac{1}{2^n}\,\frac{|x_n - z_n + z_n - y_n|}{1+|x_n - z_n + z_n - y_n|}\\ &\le \frac{1}{2^n}\left[\frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n-z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1+|z_n-y_n|}\right],\end{aligned}$$

da cui, moltiplicando per $\dfrac{1}{2^n}$ e sommando in n (osserviamo che la quantità $\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} < 1$) segue che

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \rho(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z},\mathbf{y}) \quad \forall\,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbf{s}.$$

Consideriamo ora la successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{s}$,

$$\mathbf{x}^k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots), \quad k = 1, 2, \ldots;$$

diciamo che $\mathbf{x}^k$ converge a $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \ldots)$ in $\mathbf{s}$ se e solo se

$$\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n^{(0)} \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

cioé la convergenza di una successione di punti in $\mathbf{s}$ è una convergenza per coordinate: ogni coordinata del punto $\mathbf{x}^{(k)}$ converge verso la rispettiva coordinata del punto limite $\mathbf{x}^{(0)}$ e, in generale, non c'è convergenza uniformemente rispetto a n. Infatti, osservando che la serie che definisce $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$ è a termini non negativi, segue che ogni singolo termine è limitato superiormente dalla serie stessa; quindi dalla disuguaglianza

$$\frac{1}{2^n}\,\frac{|x_n^{(k)} - x_n^{(0)}|}{1+|x_n^{(k)} - x_n^{(0)}|} \le \rho(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(0)}) \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

segue che, se $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}^{(0)}$ per $k \to \infty$ nella metrica ρ, allora $x_n^{(k)} \to x_n^{(0)}$, $\forall\, n = 1, 2, \ldots$. Viceversa, se $x_n^{(k)} \to x_n^{(0)}$ per $k \to \infty$ $\forall\, n$, allora dato che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\frac{|x_n^{(k)} - x_n^{(0)}|}{1+|x_n^{(k)} - x_n^{(0)}|} = \rho(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(0)})$$

converge uniformemente rispetto a k (osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\frac{|x_n^{(k)} - x_n^{(0)}|}{1+|x_n^{(k)} - x_n^{(0)}|} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$\forall\, k$), è lecito passare al limite termine a termine, e poiché ogni termine della serie tende a zero, allora $\rho(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(0)}) \to 0$ per $k \to \infty$.

Risulta che lo spazio $\mathbf{s}$, con la metrica ρ è uno spazio metrico completo. Infatti, sia $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots)$ è una successione fondamentale, cioé tale che, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $\rho(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(m)}) < \varepsilon$ $\forall\, k, m \geq K$. Allora dalla disuguaglianza (4.1), segue che ognuna delle successioni numeriche $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$; essendo $\mathbb{R}$ completo, ognuna delle $x_n^{(k)}$ ammette un limite $x_n^{(0)}$ per $k \to \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} x_n^{(k)} = x_n^{(k)} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Posto $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, \ldots)$, si ha $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}^{(0)}$ in $\mathbf{s}$, dato che la convergenza di Cauchy è quella per coordinate.

Lo spazio $\mathbf{s}$ è separabile.
Risulta invece che $\mathbf{s}$ non è "normabile": non è possibile, cioé, definire una norma tale che $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$; se così fosse si avrebbe $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\|$. Posto $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots)$, si ha

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|1-0|}{1+|1-0|} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} = \|x\|;$$

d'altra parte

$$\|2\mathbf{x}\| = \rho(\mathbf{2x}, \mathbf{0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|2-0|}{1+|2-0|} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{3} = \|x\|,$$

assurdo.

Consideriamo allora dei particolari sottospazi dello spazio $\mathbf{s}$ in cui sia possibile introdurre una norma.

Definizione 4.1. *Data la successione numerica reale* $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *diciamo che* $x \in l^p$, $1 \leq p < \infty$, $p \in \mathbb{R}$, *se* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.
Diciamo che $x \in l^\infty$ *se* $\sup_n |x_n| < \infty$.

l^p è dunque un sottospazio vettoriale dello spazio delle successioni $\mathbf{s}$; in particolare, l^1 è detto **spazio delle successioni sommabili**, l^2 è detto **spazio delle successioni a quadrato sommabile** e l^∞ è lo **spazio delle successioni limitate**.

Teorema 4.1. *l^p, $1 \leq p < \infty$, è uno spazio vettoriale normato definendo*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.2}$$

$x \in l^\infty$ è uno spazio vettoriale normato con

$$\|x\|_\infty := \sup_n |x_n|. \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Sia $1 \leq p < \infty$. Per come è definita la norma (4.2) si ha $\|x\|_p \geq 0 \ \forall\, x \in l^p$; inoltre, se $x = (0, 0, \ldots)$, allora $\|x\|_p = 0$; viceversa, se $\|x\|_p = 0$, allora $x_n = 0 \ \forall\, n$, da cui segue che $x = (0, 0, \ldots)$. Si ha

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(|\lambda|^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p$$

$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$. Infine, vale la disuguaglianza triangolare (di Minkowski) per l^p (Lemma 1.11) da cui segue che l^p è uno spazio vettoriale normato.

Sia $p = \infty$. Dalla (4.2) si ha $\|x\|_\infty \geq 0 \ \forall\, x \in l^\infty$; inoltre, se $x = (0, 0, \ldots)$, allora $\sup_n |x_n| = 0$, cioé $\|x\|_\infty = 0$; viceversa, se $\|x\|_\infty = 0$, allora $x_n = 0 \ \forall\, n$, da cui segue che $x = (0, 0, \ldots)$. Si ha

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup_n |\lambda x_n| = |\lambda| \sup_n |x_n| = |\lambda| \|x\|_\infty \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

La disuguaglianza triangolare segue facilmente dalle prorietà del sup e del modulo:

$$\|x + y\|_\infty = \sup_n |x_n + y_n| \leq \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\forall\, x,\, y \in l^\infty$. □

Osserviamo che anche in questi spazi vale la **disuguaglianza di Hölder**:

Teorema 4.2. *Siano* $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^q$, *con* p, $q \in [1, \infty]$ *esponenti coniugati. Allora* $z = xy = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots) \in l^1$, *e* $\|z\|_1 = \|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

La dimostrazione è analoga a quella che dimostra disuguaglianza di Hölder negli spazi L^p. Se $p = 1$ e $q = \infty$ si ha

$$\|xy\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq c \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|y\|_\infty \|x\|_1,$$

dove $c = \sup_n |y_n|$, e in modo analogo si conclude per $p = \infty$ e $q = 1$. Se $1 < p, q < \infty$ si usa la disuguaglianza di Young con $a = |x_n|$ e $b = |y_n|$, da cui segue subito che $z \in l^1$; infine, ponendo λx al posto di x con $\lambda = \dfrac{\|y\|_q^{\frac{q}{p}}}{\|x\|_p}$ segue la tesi.
Procedendo ancora in maniera analoga al caso degli spazi L^p, utilizzando la disuguaglianza di Hölder si può dimostrare la disuguaglianza triangolare.

Teorema 4.3. l^p, $1 \leq p < \infty$, *è uno spazio vettoriale normato completo con la norma definita in* (4.2).
l^∞ *è uno spazio di Banach con la norma definita in* (4.3).

Osserviamo che la convergenza indotta dalla norma (4.2) implica la convergenza in **s**. Si ha $|x_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$, da cui segue che $|x_n| \leq \|x\|_p$ $\forall\, n$; dunque si ricava

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n| \leq \|x - y\|_p.$$

Risulta quindi che, se $x \to y$ in l^p, allora $x \to y$ in **s**. Questo significa che la topologia generata dalla norma di l^p è più fine di quella indotta dalla topologia di **s** su l^p.

Osserviamo anche che la norma (4.2) è una generalizzazione della norma euclidea.

Inoltre, come succede per L^2, anche in l^2 è possibile definire un prodotto scalare ($\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$) che induce proprio la norma (4.2) per $p = 2$; l^2 con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è uno spazio di Hilbert.

Facciamo alcuni esempi.

Esempio 4.1. *La successione* $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \dots\right) \notin l^1$, *essendo la serie armonica divergente, ma* $x \in l^p$ $\forall\, p > 1$, *essendo* $\sum_n \frac{1}{n^p} < \infty$. *Inoltre,* $x \in l^\infty$ *e* $\|x\|_\infty = 1$.

Esempio 4.2. *La successione*

$$x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\} = \begin{cases} x_n^{(k)} = 1 & \text{se } n \le k \\ 0 & \text{se } n > k \end{cases}$$

converge a $x = (1, 1, \dots)$ *in* $\boldsymbol{s}$ *ma non converge in* l^p. *Infatti, non è di Cauchy in* l^p.

Anche negli spazi l^p vale un risultato di inclusione.

Teorema 4.4. *i)* $\forall\, 1 \le p \le q \le \infty$ *si ha* $l^1 \subseteq l^p \subseteq l^q \subseteq l^\infty$; *inoltre*

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_q \le \|x\|_p \le \|x\|_1,$$

ii) se $x \in l^1$, *allora* $x \in l^p$ $\forall\, p \in [1, +\infty]$ *e*

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Dimostrazione. i) Sia $x \in l^p$; posto $\|x\|_p = c$, si ha $\frac{|x_n|}{c} \le 1$ $\forall\, n$; quindi $\left|\frac{x_n}{c}\right|^q \le \left|\frac{x_n}{c}\right|^p$ $\forall\, q \ge p$; sommando in n si ottiene la tesi per q finito, cioè $x \in l^q$ e si ha $\|x\|_q \le \|x\|_p$.
Mostriamo ora che, se $x \in l^p$, allora $x \in l^\infty$: dal fatto che $|x_n| \le \|x\|_p$ $\forall\, n$, passando al sup a primo e secondo membro segue che $\|x\|_\infty \le \|x\|_p$.

ii) Sia $x \in l^1$; da i) segue che $x \in l^\infty$. Dalla disuguaglianza di Hölder, inoltre, si ha

$$\|x\|_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \|x\|_p \leq \limsup_{p\to\infty} \|x\|_p = \limsup_{p\to\infty} \left(\sum_n |x_n|^{p-1}|x_n| \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \limsup_{p\to\infty} \|x\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_n |x_n| \right)^{\frac{1}{p}} = \limsup_{p\to\infty} \|x\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \|x\|_1^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty,$$

da cui si ha la ii).

□

Esempio 4.3. *Se $x = (x_n)$, con $x_n = 1\ \forall\, n$, si ha $\|x\|_\infty = 1$ e $\|x\|_p = \infty\ \forall\, p \in [1, \infty)$, e ii) non vale.*

Esempio 4.4. $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right) \in l^1$ *e quindi $x \in l^p\ \forall p \in [1, \infty]$. Inoltre*

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^p}} \right)^{\frac{1}{p}} = 1 = \|x\|_\infty.$$

Esempio 4.5. $x = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \in l^p$ *per $p \in (2, \infty]$; nonostante non si possa calcolare la somma della serie $\sum_n \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$, dal Teorema 4.4 segue che*

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}} \right)^{\frac{1}{p}} = 1 \left(= \sup_n \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \right).$$

Esempio 4.6. $x = \left(\frac{n}{n+1}\right) \notin l^p$ *dato che $\frac{n}{n+1} \not\to 0$ per $n \to \infty$.*
$x = \left(\frac{n}{n^2+1}\right) \notin l^1$ dato che la serie, a termini positivi, $\sum_n \frac{n}{n^2+1}$ diverge.

Teorema 4.5. *l^p, $1 \leq p < \infty$, è separabile.*

Dimostrazione. Essendo $\mathbb{Q}$ numerabile, l'insieme

$$E = \{(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, \dots, 0, \dots),\ r_n \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$$

ottenuto come prodotto cartesiano di insiemi numerabili, è numerabile; mostriamo che esso è un insieme denso in l^p: sia $x = (x_n) \in l^p$; $\forall\, \epsilon > 0$ esiste $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=N(\epsilon)+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\epsilon^p}{2};$$

inoltre, eventualmente aumentando $N(\epsilon)$ si riesce a trovare un elemento $r^0 = (r_1^0, r_2^0, \dots, r_n^0, 0, \dots, 0, \dots) \in E$ tale che (essendo gli elementi di tale successione r^0 nulli da un certo punto in poi)

$$\sum_{n=1}^{N(\epsilon)} |x_n - r_n^0|^p < \frac{\epsilon^p}{2}.$$

Allora si ha

$$\|x - r^0\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - r_n^0|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N(\epsilon)} |x_n - r_n^0|^p + \sum_{n=N(\epsilon)+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{\epsilon^p}{2} + \frac{\epsilon^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} = \epsilon,$$

cioé $x \to r^0$ in l^p.

□

Teorema 4.6. *l^∞ non è separabile.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$F = \{x = (x_n) \in l^\infty :\ \text{o } x_n = 0 \text{ o } x_n = 1\};$$

esso ha la potenza del continuo dato che i suoi elementi possono essere pensati come numeri reali in rappresentazione binaria. Inoltre, $\forall\, x, y \in F$, $x \neq y$, si ha $\|x - y\| = 1$.
Sia D un insieme denso in l^∞. Associamo ad ogni elemento di F un

elemento $z \in D$ tale che $\|x - z\|_\infty < \frac{1}{3}$; osserviamo che ad elementi diversi $x, x' \in F$ corrispondono sempre elementi distinti $z, z' \in D$. Infatti, se per assurdo si avesse $\|x - z\|_\infty < \frac{1}{3}$ e $\|x' - z\|_\infty < \frac{1}{3}$, allora

$$1 = \|x - x'\|_\infty \leq \|x - z\|_\infty + \|z - x'\|_\infty < \frac{2}{3} < 1,$$

assurdo. Allora l'insieme (non numerabile) F è in corrispondenza biunivoca con una parte dell'insieme (denso in l^∞) D. Segue che un qualunque insieme denso in l^∞ non può essere numerabile.

$\square$

Osserviamo infine che gli spazi l^p sono un caso particolare di spazi L^p, dove lo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ associato è $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, dove $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$ è l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$ e ν è la misura che conta il numero degli elementi di un insieme ($\nu(A) =$card(A)[2], $A \subset \mathbb{N}$, con $\nu(A) = \infty$ se A è un insieme infinito). Osserviamo che i punti hanno misura unitaria, e quindi ogni successione è l'unico rappresentante della sua classe di equivalenza (dove la relazione è l'uguaglianza q.o.).
Si può definire lo spazio $l^p(S)$ anche a partire da un insieme numerabile qualunque, come lo spazio delle successioni $s : S \to \mathbb{R}$ a potenza p-esima sommabile (per esempio, $l^p(\{1, 2, \ldots, N\}$ non è altro che $\mathbb{R}^N$ con la norma $\|\cdot\|_p$).

[2]Indichiamo con card(A) la cardinalità di un insieme A.

Bibliografia

[1] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer, New York (2011).

[2] G. Gilardi, *Analisi funzionale.* McGraw Hill (2014).

[3] R.C. James, *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37 (1951), pp. 174-177.

[4] L.V. Kantorovič, G.P. Akilov, *Analisi funzionale*, Editori Riuniti (1980).

[5] H.V. Royden, P.M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, Fourth Edition, Pearson (2010).