

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - 17/01/2025

(Analisi complessa e trasformate)

Esercizio 1.

- i) Specificare se e che tipo di singolarità (isolata o non isolata) presentano in \mathbb{C} le funzioni $f(z) = \frac{z(z+i)}{z-i}$, $h(z) = \frac{1-e^z}{z(z+4)^3}$ e $k(z) = \frac{1}{\cos \frac{1}{z}}$ (**4 punti**);
- ii) per le funzioni $f(z)$ e $h(z)$, classificare le eventuali singolarità isolate al finito e studiare anche il punto all'infinito (**4 punti**);
- iii) stabilire l'ordine della funzione (razionale) $f(z)$, giustificando la risposta anche con i risultati trovati nei punti precedenti (**1 punto**).

Esercizio 2.

- i) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/(2a) & \text{se } |t| < a \\ 1/(4a) & \text{se } t = \pm a \\ 0 & \text{se } |t| > a, \end{cases} \quad \text{con } a > 0 \text{ (3 punti)}.$$

- ii) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 4n \leq t \leq 4n + 2, \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{(2 punti)}.$$

Domanda 1.

- i) Dare la definizione di primitiva di una funzione f definita in un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ (**1 punto**);
- ii) dire se c'è un legame (ed, eventualmente qual è) tra l'olomorfia di $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ e l'esistenza di primitive (**2 punti**);
- iii) enunciare e dimostrare il Teorema di Morera (**4 punti**);
- iv) il Teorema di Morera è considerato una sorta di "inverso" di un altro teorema: quale? Enunciarlo (**2 punti**).

Domanda 2.

- i) Per semplificare il calcolo nel punto i) dell'Esercizio 2 si può usare una proprietà della trasformazione di Fourier. Quale? Dimostrarla (**2 punti**);
- ii) ci sono altre proprietà che possono semplificare il calcolo della trasformata di Fourier in alcuni casi? Se sì, quali? (**2 punti**);
- iii) enunciare e dimostrare la formula che si può utilizzare per il calcolo del punto ii) dell'Esercizio 2 (**3 punti**).