Prova scritta di Analisi Matematica 3 17.01.2025 Sol. 1

1. Esaminiamo il comportamento della funzione lungo le rette per l'origine $y = mx$ e $x = 0$.

Abbiamo

$$x=0 \quad : \quad \lim_{y\to 0} \frac{y^5}{y^4} = 0 \ ;$$

$$y = mx \quad : \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3+m^2x^4+m^5x^5}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x+m^2x^2+m^5x^3}{1+m^4x^2}$$

$$= 0 .$$

Dunque, se il limite esiste dove necessariamente uguale a 0. Dimostriamo che il limite è uguale a 0 utilizzando il criterio del confronto

$$0 \le \left|\frac{x^3+x^2y^2+y^5}{x^2+y^4}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^4}\right| + \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\right| + \left|\frac{y^5}{x^2+y^4}\right|$$

$$= \frac{|x|^3}{x^2+y^4} + \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} + \frac{|y|^5}{x^2+y^4}$$

$$\le \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{x^2y^2}{x^2} + \frac{|y|^5}{y^4}$$

$$= |x| + y^2 + |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Perchè si tratta di una funzione continua in $(0,0)$.

Di conseguenza il limite esiste ed è pari a 0.

Prova Scritta di Analisi Matematica 3 17.01.2025 Sol. 2

2. Calcoliamo le derivate prime e determiniamo i punti stazionari di f.

$$f_x = e^x\left(x^3 + \frac{x^4}{4}\right), \quad f_y = -2y.$$

Quindi

$$Df = 0 \iff \begin{cases} e^x x^3\left(1+\frac{x}{4}\right) = 0 & \rightsquigarrow x = 0, -4 \\ -2y = 0 & \rightsquigarrow y = 0 \end{cases}$$

da cui le soluzioni $(0,0)$ e $(-4,0)$.

Passiamo alle derivate seconde e calcoliamo la matrice hessiana in corrispondenza dei punti trovati.

$$f_{xx} = e^x\left(3x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{4}\right), \quad f_{xy} = 0,$$

$$f_{yy} = -2.$$

Quindi:

$$D^2 f(-4,0) = \begin{pmatrix} -16e^{-4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

essendo gli autovalori ($-16e^{-4}$ e -2) negativi, $(-4,0)$ è un punto di massimo relativo.

Prova scritta di Analisi Matematica 3 17.01.2025 Sol. 3

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice è semidefinita negativa ma non definita dato che ha un autovalore nullo ed uno negativo. In tal caso non è possibile dedurre la natura del punto critico mediante le derivate seconde.

Tuttavia si può concludere esaminando direttamente la funzione attorno al punto $(0,0)$.

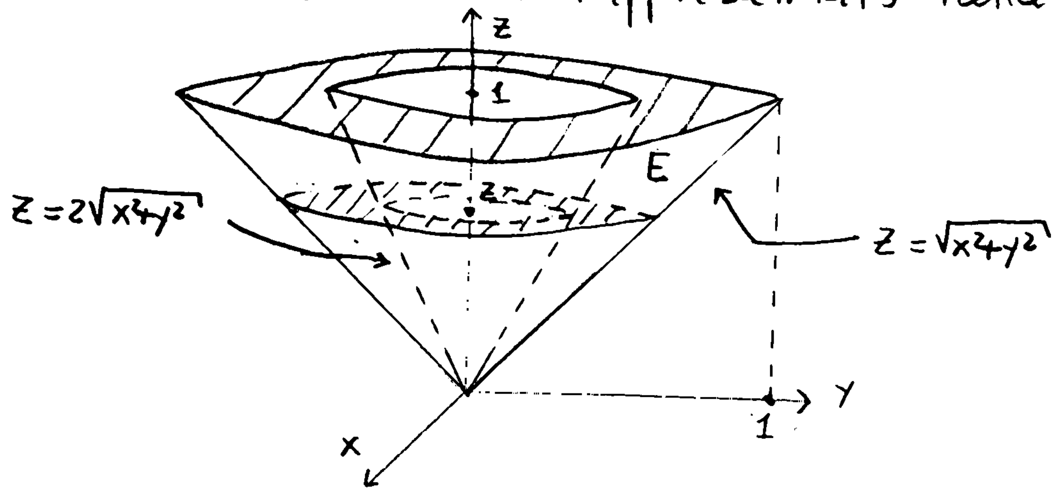
Notiamo che:

- $f(0,0) = 0$
- $f(x,0) = \dfrac{x^4 e^x}{4} > 0 = f(0,0) \quad \forall x \neq 0$, dunque $(0,0)$ non può essere un punto di massimo relativo;
- $f(0,y) = -y^2 < 0 = f(0,0) \quad \forall y \neq 0$, quindi $(0,0)$ non può essere un punto di minimo relativo;

Di conseguenza <u>$(0,0)$ è un punto di sella.</u>

Prova scritta di Analisi Matematica 3 17.01.2025 Sol. 4

3. L'insieme E è rappresentato nella figura.



Integrando per strati rispetto all'asse z, troviamo

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{E_z} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy$$

dove E_z è la proiezione della corona circolare alla quota z nella figura nel piano xy.
Calcoliamo l'integrale doppio passando alle coordinate polari nel piano xy. Dalla definizione di E segue che E_z è la corona circolare descritta da

$z/2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le z$ (z è fissato). Per cui in coordinate polari E_z è dato dalle relazioni $z/2 \le \rho \le z$, $0 \le \theta \le 2\pi$.
Ricordando che $dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta$, abbiamo

$$\iint_{E_z} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy = \iint_{[z/2,z]\times[0,2\pi]} \rho^2\, d\rho\, d\theta = \int_{z/2}^{z} \rho^2\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \frac{\rho^3}{3}\Big|_{z/2}^{z} = \frac{7\pi}{12} z^3.$$

Infine,

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \frac{7\pi}{12}\int_0^1 z^3\,dz = \frac{7\pi}{12}\frac{z^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{7\pi}{48}.$$

4.

a) $\varphi_u = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, 1)$

$\varphi_v = (-(2+\sin u)\sin v, (2+\sin u)\cos v, 0)$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-(2+\sin u)\cos v, -(2+\sin u)\sin v, (2+\sin u)\cos u)$$

$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = (2+\sin u)\sqrt{1+\cos^2 u}$, quindi

$$\nu(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}}(-\cos v, -\sin v, \cos u).$$

b) L'area di S è data dall'integrale

$$\iint_S d\sigma = \iint_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} |\varphi_u \wedge \varphi_v|\,du\,dv = \iint_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} (2+\sin u)\sqrt{1+\cos^2 u}\,du\,dv$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin u)\sqrt{1+\cos^2 u}\,du.$$

$$\iint_S \frac{\sin 2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,d\sigma = \iint_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \frac{\sin 2u}{2+\sin u}(2+\sin u)\sqrt{1+\cos^2 u}\,du\,dv$$

$$= \iint_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} 2\sin u \cos u \sqrt{1+\cos^2 u}\, du\, dv$$

$$= -2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 u}\; d\,(1+\cos^2 u)$$

$$= -2\pi \frac{2}{3} (1+\cos^2 u)^{3/2} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

5. La forma è definita su tutto $\mathbb{R}^3$, dato che quest'ultimo è un aperto semplicemente connesso, ω sarà esatta se e solo se è chiusa. Imponiamo le condizioni di chiusura:

$$-a = (2xz - ay)_y = (-4x)_x = -4$$

$$2x = (2xz - ay)_z = (x^2 + bz)_x = 2x$$

$$0 = (-4x)_z = (x^2 + bz)_y = 0,$$

dalle quali segue $a = 4$ e $b \in \mathbb{R}$ arbitrario.
Calcoliamo le primitive di ω con $a=4$ e $b\in\mathbb{R}$.
$f(x,y,z)$ è una primitiva di ω se e solo se

$$df = \omega,$$

cioè

$$\begin{cases} f_x = 2xz - 4y \\ f_y = -4x \\ f_z = x^2 + bz \end{cases}, \quad \begin{cases} f = x^2 z - 4xy + \varphi(y,z) \\ -4x + \varphi_y = -4x \\ x^2 + \varphi_z = x^2 + bz \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_y = 0 \\ \varphi_z = bz \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi = \psi(z) \\ \psi' = bz \end{cases}, \quad \psi(z) = \frac{b}{2} z^2 + c, \, c \in \mathbb{R}.$$

Quindi la famiglia delle primitive di ω è

$$f(x,y,z) = x^2 z - 4xy + \frac{b}{2} z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$