1) Geometria analitica

Si considerino l'ellisse di centro C (0; -1) e semiassi orizzontale *a* e verticale *b* di lunghezza pari a 1 e $\sqrt{3}$, rispettivamente, nonché la retta passante per i punti A(-2; 2) e B(1; -1).

a. Si tracci il grafico delle due curve.
b. Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra l'ellisse e la retta.

SOLUZIONE

Equazione dell'ellisse:

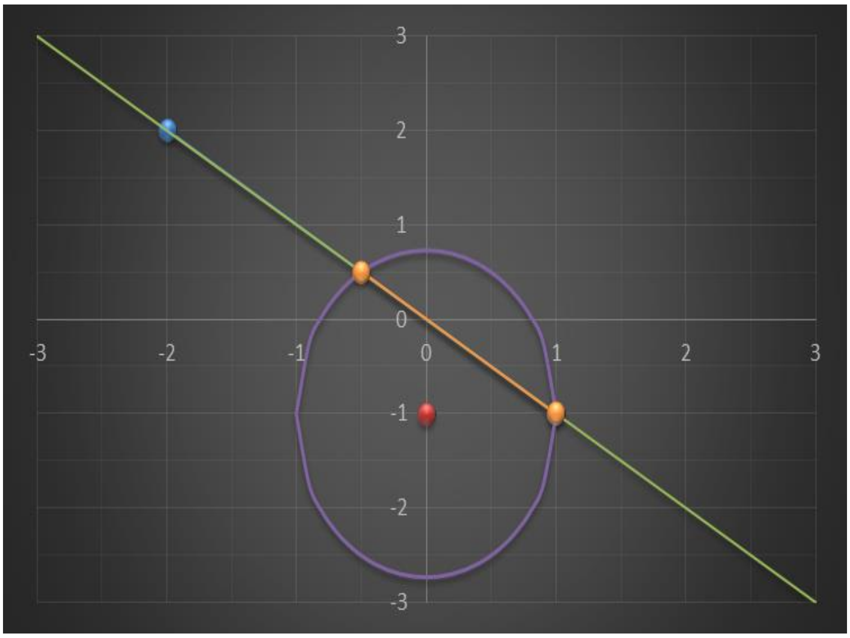
$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(y-y_C)^2}{b^2}=1 \;\rightarrow\; 3x^2+y^2+2y-2=0$$

Equazione della retta:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A} \rightarrow\; y=-x$$

I punti di intersezione si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2+y^2+2y-2=0 \\ y=-x \end{cases} \rightarrow\; P_1(1;\,-1)\,,P_2(-½;\,½)$$



2) Studio di funzione: Eutrofizzazione di un lago

L'eutrofizzazione di un lago è un processo ecologico in cui un corpo idrico subisce un arricchimento eccessivo di nutrienti, in particolare azoto e fosforo, a causa di agenti inquinanti come fertilizzanti agricoli o scarichi domestici. Dopo un'iniziale calo della quantità di biomassa, dovuta alla diminuzione della qualità dell'acqua, vi è una crescita sempre maggiore di alghe e di altre piante acquatiche che man mano si adattano sempre di più al nuovo ecosistema, usufruendo del continuo aumento delle sostanze nutritive provenienti dagli stessi inquinanti. Questo processo ha effetti negativi sull'ecosistema del lago con moria della maggior parte della biodiversità inizialmente presente.

Sia data la seguente funzione, che modellizza la quantità di biomassa in un lago, in condizioni di eutrofizzazione e in funzione del tempo:

$$B(t) = \frac{t^2 + k}{t + 2}$$

Dove k è una costante che dipende dalle caratteristiche del bacino d'acqua interessato ed il tempo è dato in mesi.

Si vuole adattare la funzione ad un bacino d'acqua specifico, nel quale si è osservato un'inversione di tendenza nella quantità di massa e, quindi, un valore minimo di essa dopo un mese dall'inizio del processo di inquinamento.

a) Trovare il valore che deve avere *k* perché la funzione possa essere adattata al lago considerato.
b) Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione generica *B(x)*, tracciandone il grafico.
c) Tracciare un grafico per punti della funzione *B(t)* che descriva il fenomeno nel corso di un anno.

SOLUZIONE

a) La condizione richiesta impone la presenza di un punto di minimo della funzione *B(t)* per *t = 1 mese*. Perciò, bisogna studiare la derivata prima e scrivere la condizione di presenza di un minimo (derivata prima nulla) ed ottenere *k* dalla sostituzione del tempo specifico.

$$B'(t) = \frac{t^2 + 4t - k}{(t+2)^2}$$

$$B'(t) = 0 \;\rightarrow\; t^2 + 4t - k = 0$$

$$B'(1) = 0 \;\rightarrow\; k = 5$$

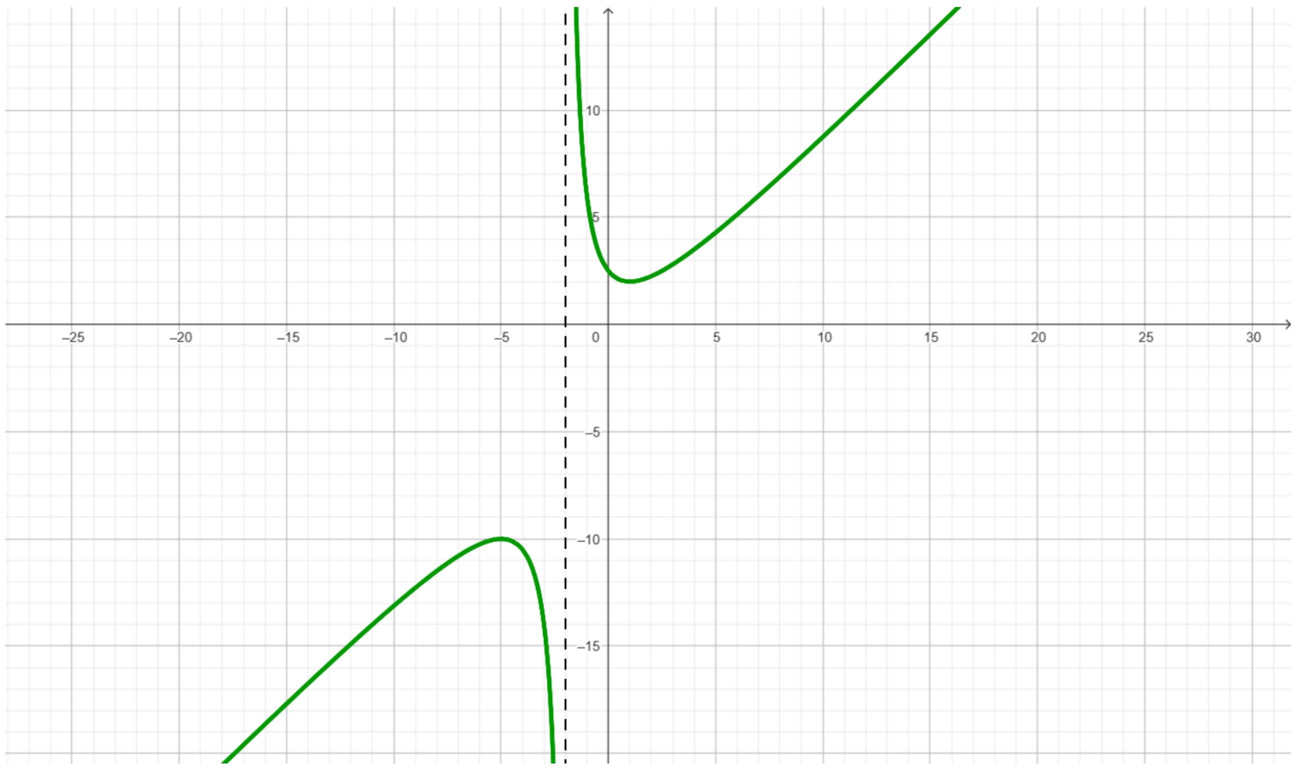
b) Le derivate della funzione *B(x)* sono le seguenti:

$$B'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$$

$$B''(x) = \frac{18}{(x+2)^3}$$

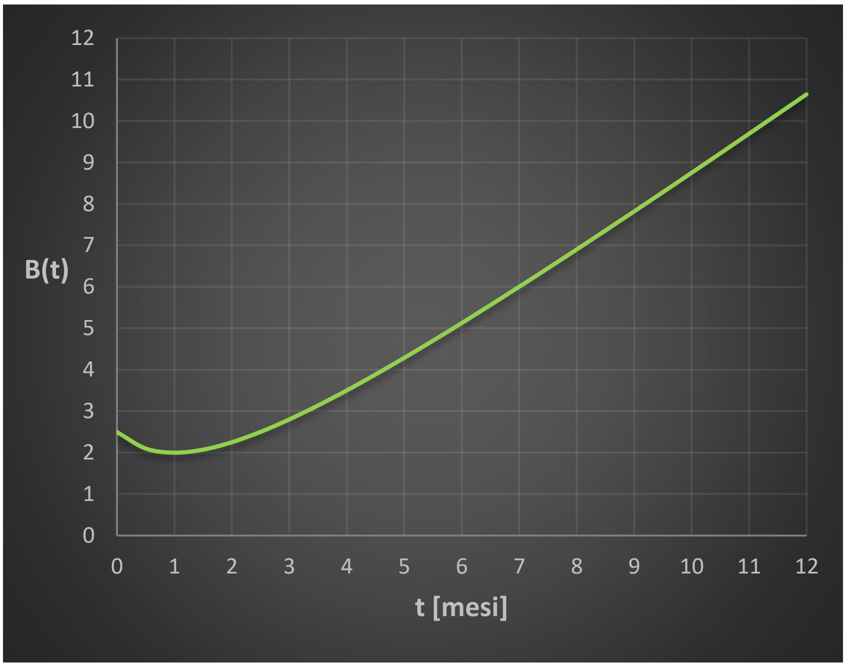
La funzione presenta un asintoto verticale in corrispondenza di x = -2 ed in tale punto vi è anche una variazione di concavità. Vi sono inoltre un punto di minimo ed uno di massimo per x = -5 e x = 1, rispettivamente. Non vi sono intersezioni con l'asse orizzontale, mentre quella con l'asse verticale sta a quota y = 5/2.

Di seguito viene riportato il grafico della funzione *B(x)*.



c) L’andamento della funzione nel corso di un anno (i.e.: 12 mesi) è la seguente:

t [mesi]	B
0	2,50
0,5	2,10
1	**2,00**
1,5	2,07
2	2,25
2,5	2,50
3	2,80
3,5	3,14
4	3,50
4,5	3,88
5	4,29
5,5	4,70
6	5,13
7	6,00
8	6,90
9	7,82
10	8,75
11	9,69
12	10,64



3) Calcolo integrale: Eutrofizzazione di un lago – Popolazione ittica

Facendo riferimento alle condizioni di cui all’esercizio precedente, sia data la seguente funzione, che modellizza la velocità di variazione di popolazione ittica in condizioni di eutrofizzazione e in funzione del tempo:

$$v(t) = -k\, te^{-t^2}$$

Dove *k* è una costante positiva e non nulla che dipende dalla popolazione iniziale ed il tempo è dato in mesi.

a. Ricavare la costante *k* nel caso di una popolazione iniziale di 1000 unità (si assuma nulla la costante di integrazione *c*).
b. Dopo quanto tempo si può ritenere estinta la popolazione di pesci nel lago?

SOLUZIONE

La popolazione si può ritenere estinta quando il numero di individui risulta al di sotto dell'unità, per cui possiamo scrivere:

$N_0 = N(t = 0) = 1000 \qquad N_x = 1$

a) Il numero di individui in funzione del tempo è dato dall'integrale di *v(t)*:

$$N(t) = \int v(t)\, dt$$

$$N(t) = k \int \left(-te^{-t^2}\right) dt = \frac{k}{2} \int \left(-2te^{-t^2}\right) dt = \frac{k}{2} e^{-t^2}$$

Per *t = 0*, si ha una popolazione iniziale pari a N_0, per cui risulta:

$$N(0) = \frac{k}{2} = 1000 \rightarrow k = 2000$$

b) Per trovare il tempo t_x è necessario invertire la funzione *N(t)* imponendo la condizione $N_x = 1$:

$$N(t_x) = N_x = 1000\, e^{-t_x{}^2}$$

Da cui:

$$e^{-t_x{}^2} = \frac{2N_x}{k}$$

$$-t_x{}^2 = \ln \frac{2N_x}{k}$$

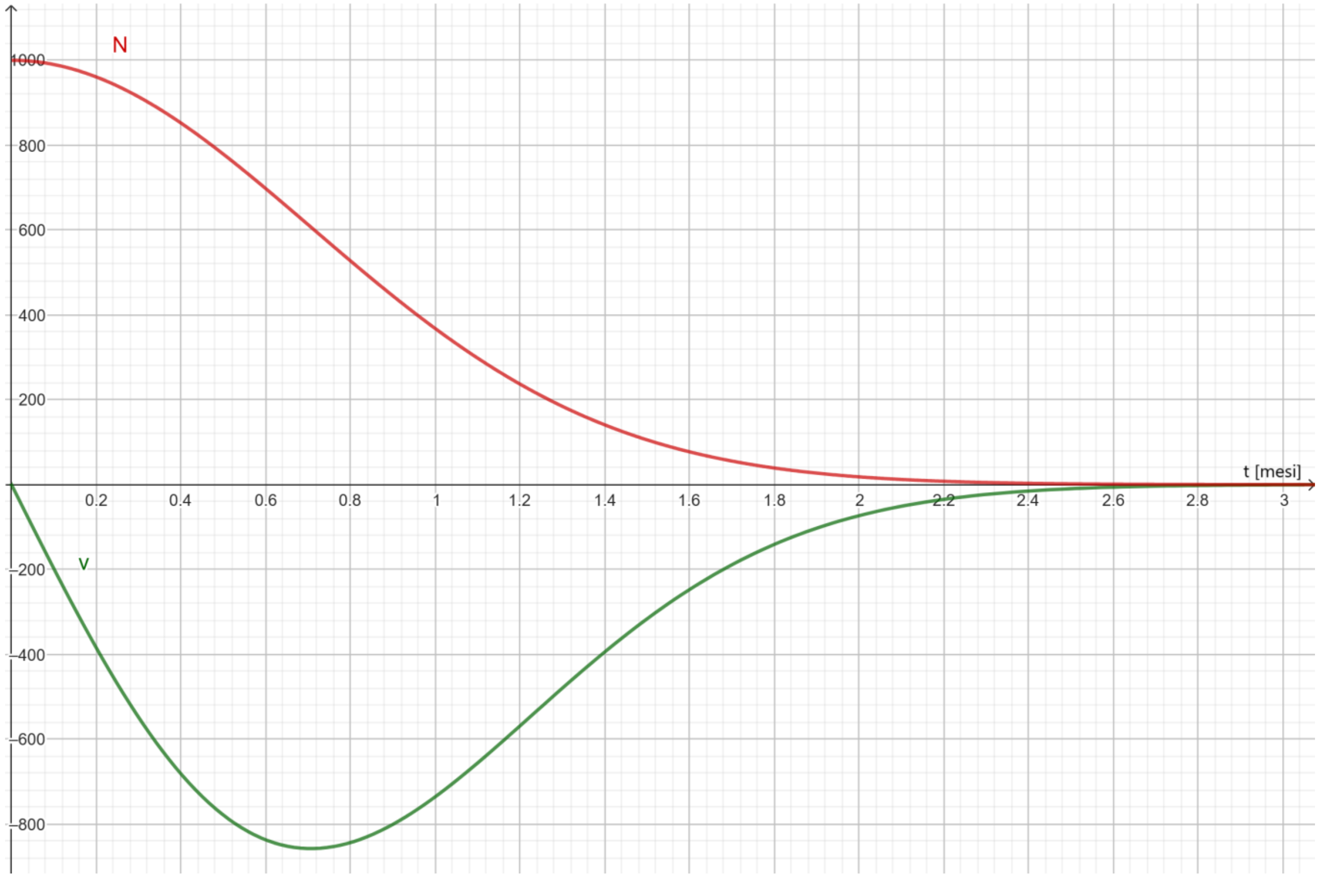
$$t_x{}^2 = \ln \frac{k}{2N_x}$$

$$t_x = \sqrt{\ln \frac{k}{2N_x}}$$

Sostituendo i valori di *k* e N_x , si ottiene:

$$t_x = 2.63\, mesi \approx 2\, mesi\ e\ 19\, giorni$$

Per completezza, si riportano di seguito i grafici delle funzioni *v(t)* e *N(t)*.


N
v
t [mesi]
1000
800
600
400
200
−200
−400
−600
−800
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
2.6
2.8
3

4) Statistica: La migrazione autunnale dei pettirossi

I pettirossi europei migrano principalmente dall'Europa settentrionale e centrale verso il Mediterraneo e l'Africa settentrionale. La migrazione autunnale inizia solitamente tra settembre e ottobre, quando i pettirossi lasciano le loro aree di riproduzione per spostarsi verso climi più miti. La durata del viaggio può variare notevolmente a seconda della distanza da percorrere e delle condizioni meteorologiche. I pettirossi, come molti altri uccelli migratori, preferiscono migrare di notte. Questo comportamento li aiuta a evitare i predatori e a ridurre lo stress dovuto alle condizioni climatiche ed utilizzano una combinazione di segnali visivi (come il sole e le stelle), il campo magnetico terrestre e la memoria geografica per orientarsi durante il viaggio. Durante la migrazione, i pettirossi fanno soste regolari per riposarsi e nutrirsi, accumulando energie per le tappe successive del loro viaggio.

Durante un periodo di dieci anni, viene tracciato via gps il percorso di migrazione autunnale di vari pettirossi nel percorso dalla Scandinavia verso l'Italia meridionale, ottenendo la tabella delle frequenze del numero di settimane impiegate nella migrazione:

Settimane	3	4	5	6	7	8
Frequenza	8	24	29	27	24	18

Effettuare un'analisi statistica della popolazione.

SOLUZIONE

Avendo una popolazione con frequenze note, si deve fare riferimento alla media pesata:

$$\bar{X} = \frac{\sum(x_i f_i)}{N} = 5.685$$

con *N* numero totale di unità campionarie e pari a 130.

E' necessario ora calcolare la varianza e la deviazione standard:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (X_i - \bar{X})^2}{N} = 2.154$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1.468$$