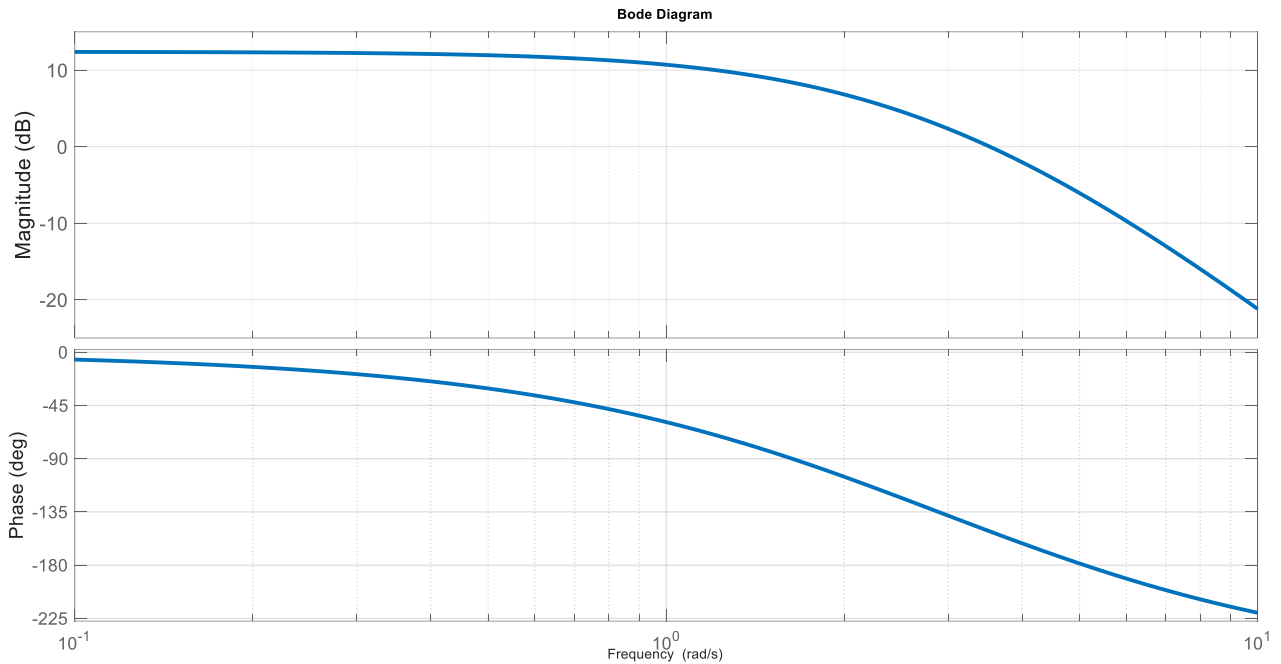


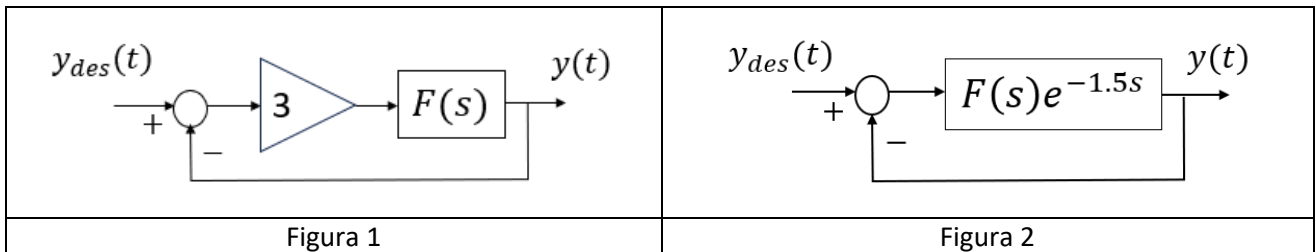
Nome e cognome: _____ Num. Matricola: _____

Es 1 (5 punti)

Un processo $F(s)$ non avente poli a parte reale positiva è caratterizzato dai seguenti diagrammi di Bode:



Determinare se i sistemi di controllo in Figura 1 ed in Figura 2 siano asintoticamente stabili a ciclo chiuso o meno. Giustificare le risposte.



Es. 2 (8 punti) Un processo SISO è descritto dalla seguente equazione differenziale.

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t - 6) \quad (1)$$

Progettare e rappresentare mediante schema a blocchi un sistema di controllo in retroazione in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Precisione statica
- S2. Reiezione di un disturbo costante
- S3 Tempo di assestamento al 5% della risposta a ciclo chiuso non superiore a 7 secondi

Es. 3 (7 punti)

Si illustri in termini generali il fenomeno del wind-up (in cosa consiste, quando si verifica e quali sono le conseguenze). Con riferimento ad un processo con FdT $G(s) = \frac{4}{(s+2)^3(s+1)}$ attuatore saturato ai valori massimo e minimo $U_{max}=5$, $U_{min}=0$, e regolatore PI con guadagni $K_p = 50$ e $T_i = 10$ s si rappresentino mediante schemi a blocchi almeno due architetture che limitino gli effetti del wind-up.

Es. 4 (8 punti) Si illustrino sinteticamente la struttura di un sistema di controllo in cascata ed i principali requisiti di progetto. Si illustri una applicazione pratica di tale architettura che preveda la realizzazione di un anello secondario di portata.

Es. 5 (5 punti)

Descrivere cosa si intende per “implementazione digitale di un controllore”, e determinare una possibile implementazione digitale del controllore descritto dal legame ingresso-uscita $\dot{u}(t) + 10u(t) = 0.1 \dot{e}(t) + 0.2e(t)$ con periodo di campionamento di $T_c = 0.1$ s

Relazioni utili

$$T_{a5\%} \leq T^* \Rightarrow A^* = \begin{cases} -\frac{3}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

Metodo di Tustin

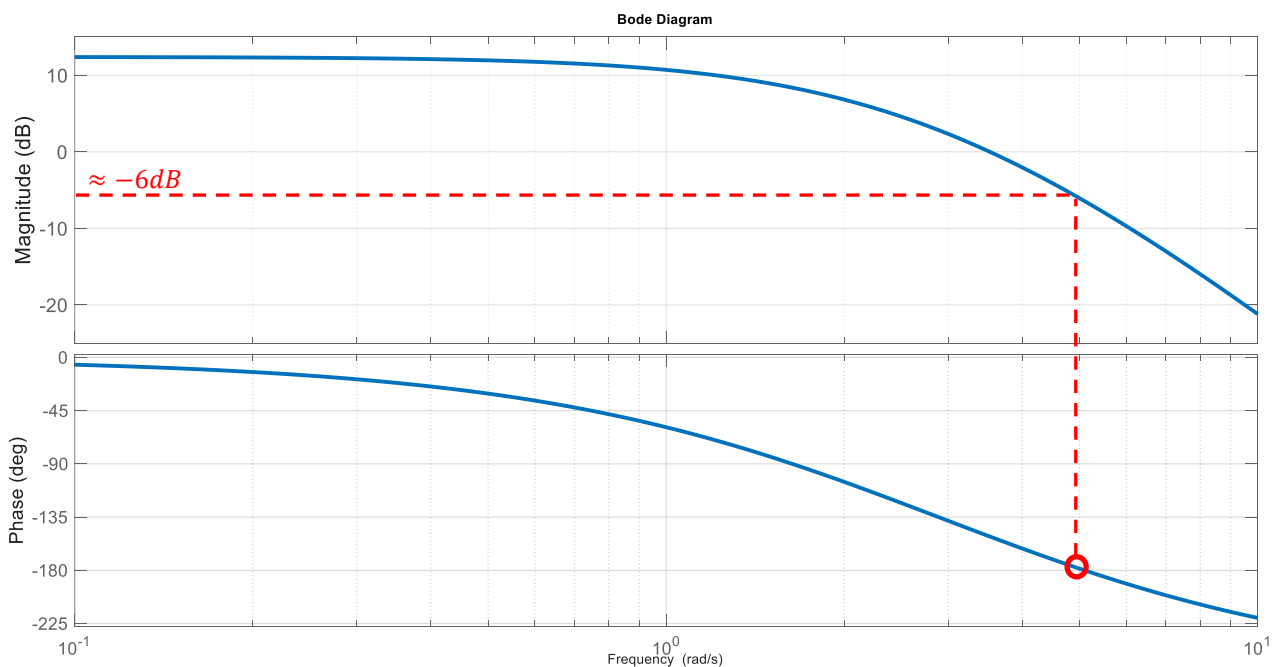
$$s = \frac{2}{T_c} \frac{z - 1}{z + 1}$$

Soluzione Es.1

Il sistema di controllo in Fig 1 è asintoticamente stabile a ciclo chiuso se il valore del **guadagno critico** desunto a partire dai digrammi di Bode di $F(s)$ risulta essere minore di 3. (NB la determinazione del guadagno critico non è stata trattata nel programma dell'AA 2024-25, quindi gli studenti che hanno seguito le lezioni nell'AA 2024-25 sono unicamente in grado di analizzare la stabilità del sistema di controllo in Fig. 2).

Dualmente, il sistema di controllo in Figura 2 è asintoticamente stabile a ciclo chiuso se il valore del **ritardo critico** desunto a partire dai digrammi di Bode di $F(s)$ risulta essere minore di 1.5.

Determinazione del guadagno critico



Il guadagno critico è la «conversione in valore naturale» del margine di guadagno in dB della $F(s)$.

La pulsazione critica, in corrispondenza della quale la fase vale -180° , è pari a $\omega_{cr} \approx 5$ rad/s.

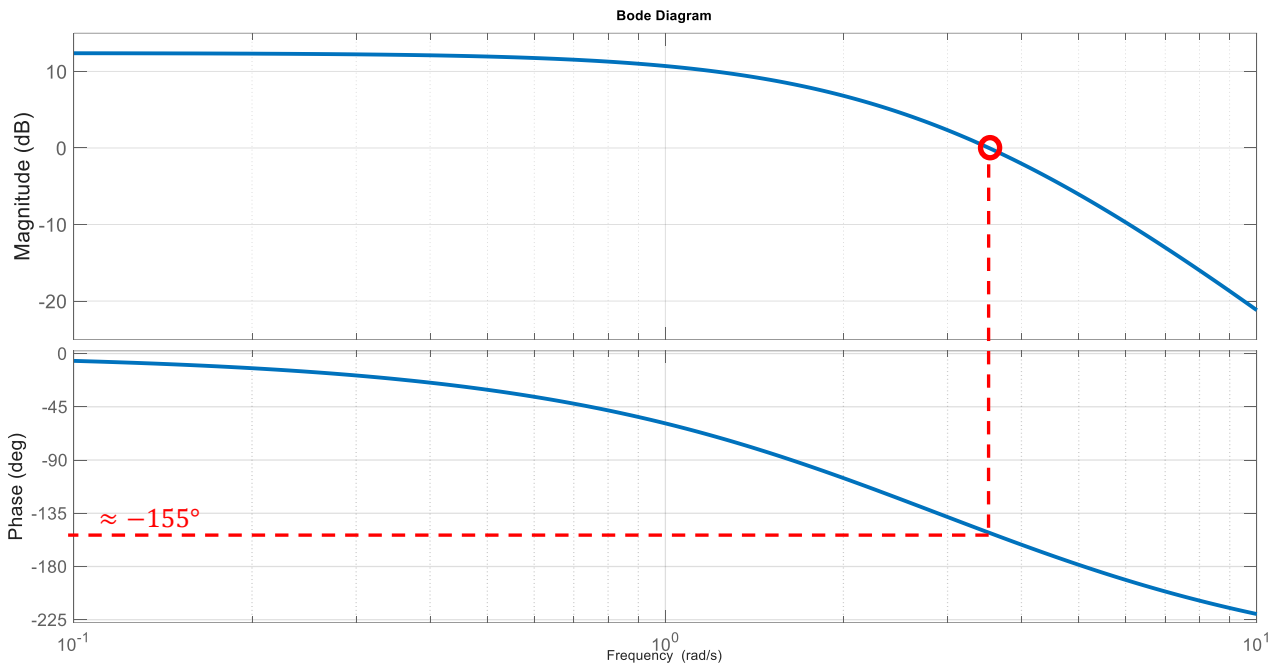
Il modulo alla pulsazione critica vale $M_{crdB} = |F(j\omega_{cr})|_{dB} \approx -6$ dB

Il margine di guadagno in decibel vale quindi circa 6 dB: $M_{gdB} = -M_{crdB} \approx 6$ dB

ed il guadagno critico sarà pertanto pari a: $k_{cr} = 10^{M_{gdB}/20} = 10^{6/20} \approx 1.99$

Poiché il guadagno $k=3$ presente nello schema in Figura 1 è maggiore del guadagno critico, **il sistema di controllo in Figura 1 è pertanto instabile a ciclo chiuso.**

Determinazione del ritardo critico



La pulsazione di attraversamento, in corrispondenza della quale il modulo vale 0 dB, è approssimativamente pari a $\omega_t \approx 3.6$ rad/s.

Il valore della fase alla pulsazione di attraversamento è:

$$\phi_t = \angle F(j\omega_t) \approx -155^\circ$$

Il margine di fase vale:

$$m_\varphi = 180 - |\phi_t| \approx 25^\circ$$

Il ritardo critico si determina in funzione della pulsazione di attraversamento e del margine di fase secondo la formula $\delta_{cr} = \frac{m_\varphi}{\omega_t}$. Per coerenza dimensionale, per poterlo impiegare all'interno della formula per il calcolo di δ_{cr} il margine di fase deve essere preliminarmente convertito in radianti.

Margine di fase espresso in radianti: $m_\varphi^{rad} \approx 25^\circ \cdot \frac{2\pi}{360} = 0.436 \text{ rad}$

Ritardo critico: $\delta_{cr} = \frac{m_\varphi^{rad}}{\omega_t} = \frac{0.436 \text{ rad}}{3.6 \text{ rad/s}} = 0.12 \text{ s}$

Poiché il ritardo $\delta = 1.5 \text{ s}$ presente nello schema in Fig. 2 è maggiore del ritardo critico, **il sistema di controllo in Figura 2 è pertanto instabile a ciclo chiuso.**

(NB I diagrammi di Bode relativi al quesito 1 sono stati tracciati con riferimento alla FdT

$$F(s) = \frac{100}{(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

Soluzione Es.2

Sulla base della eq. differenziale (1) che descrive il processo, deduciamo la FdT $G(s)$ fra l'ingresso manipolabile $u(t)$ e l'uscita $y(t)$:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-6s}$$

Poiché il processo è dominato dal ritardo, e poiché inoltre viene formulata una specifica che impone esplicitamente un tetto massimo al tempo di assestamento della risposta al gradino della variabile di uscita, è indispensabile adottare uno schema di controllo basato sul predittore di Smith. Nella figura seguente, viene evidenziato l'insieme di blocchi che costituisce il controllore complessivo (all'interno del quale va progettato il blocco $C(s)$). Il blocco evidenziato in verde rappresenta il processo da controllare.

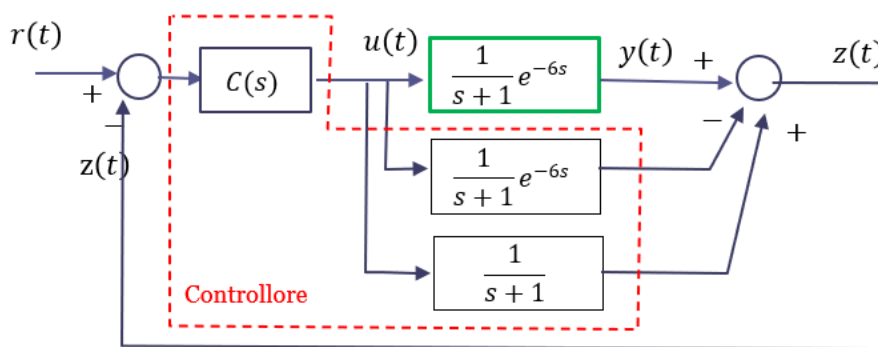


Figura 3

Per progettare il blocco $C(s)$ affinché siano soddisfatte le 3 specifiche S1-S3, è conveniente riferirsi alla seguente rappresentazione equivalente

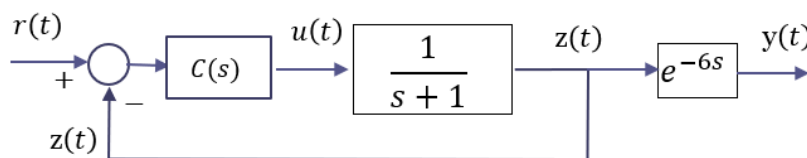


Figura 4

Poiché l'evoluzione di regime dell'uscita $y(t)$ e quella della variabile ausiliaria $z(t)$ sono coincidenti, il soddisfacimento delle specifiche S1 ed S2 può essere imposto sulla variabile ausiliaria $z(t)$. Ciò implica che il controllore $C(s)$ debba contenere un polo nell'origine. Risulta conveniente inserire contestualmente nel controllore $C(s)$ anche uno zero sovrapposto al polo del processo, andando quindi a definire un regolatore PI:

$$C(s) = k \frac{s+1}{s}$$

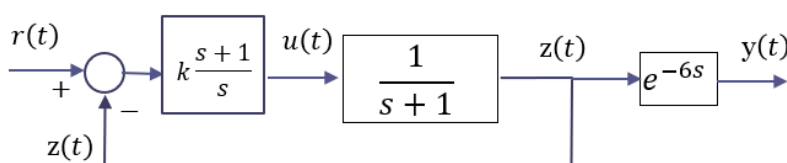


Figura 5

Tale scelta per il regolatore $C(s)$ comporta la seguente espressione per la FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita ausiliaria $z(t)$:

$$W_r^z(s) = \frac{C(s) \cdot \frac{1}{s+1}}{1 + C(s) \cdot \frac{1}{s+1}} = \frac{k \frac{s+1}{s} \cdot \frac{1}{s+1}}{1 + k \frac{s+1}{s} \cdot \frac{1}{s+1}} = \frac{\frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s}} = \frac{k}{s+k}$$

La FdT $W_r^z(s)$ è di tipo STC, ed il suo polo è posizionato in $-k$. È pertanto sempre garantita per ogni valore positivo di k la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Si può quindi ulteriormente semplificare lo schema in Figura 5 come segue

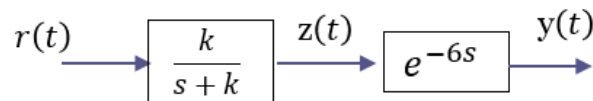
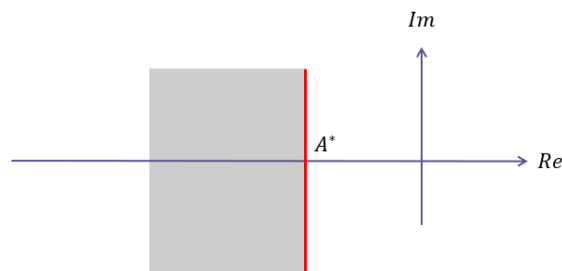


Figura 6

La FdT a ciclo chiuso fra il set-point $r(t)$ e l'uscita $y(t)$ è la seguente

$$W_r^y(s) = W_r^z(s) e^{-6\delta} = \frac{k}{s+k} e^{-6\delta}$$

La specifica S3 è garantita se la risposta al gradino di $z(t)$ ha un tempo di assestamento non superiore a $7 - 6 = 1$ secondo. La regione ammissibile per il polo di $W_r^z(s)$ è pertanto del tipo



con $A^* = -\frac{3}{T^*} = -\frac{3}{1} = -3$.

Il polo di $W_r^z(s)$ giace all'interno della regione ammissibile se $k \geq 3$. Una possibile scelta per il regolatore $C(s)$ da impiegarsi nello schema in Figura 3 in modo da garantire il soddisfacimento delle specifiche S1-S3 è pertanto

$$C(s) = k \frac{s+1}{s}, \quad k \geq 3.$$

Soluzione Es.3

Per le considerazioni generali sul fenomeno del wind-up si faccia riferimento alle slides proiettate a lezione.

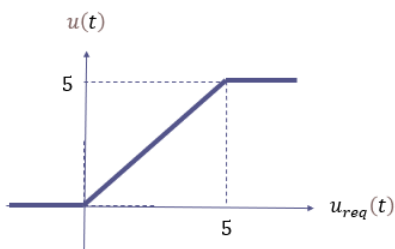
Per effetto delle soglie minima e massima u_{min} e u_{max} per l'ampiezza dell'ingresso manipolabile $u(t)$, il segnale "richiesta di controllo" $u_{req}(t)$ generato dal controllore e l'ingresso manipolabile $u(t)$ sono legati fra loro dalla seguente caratteristica statica:

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & u_{req}(t) \geq u_{max} \\ u_{req}(t) & u_{min} \leq u_{req}(t) \leq u_{max} \\ u_{min} & u_{req}(t) \leq u_{min} \end{cases} \quad (3.1)$$

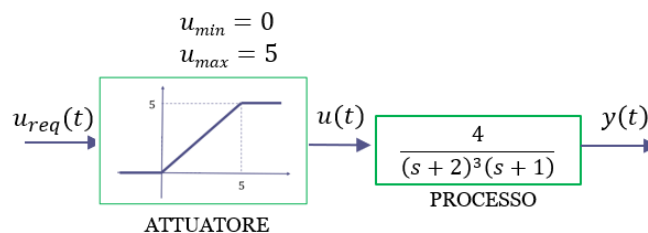
Considerando gli specifici valori di soglia previsti nel presente esercizio si ottiene:

$$u(t) = \begin{cases} 5 & u_{req}(t) \geq 5 \\ u_{req}(t) & 0 \leq u_{req}(t) \leq 5 \\ 0 & u_{req}(t) \leq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

La rappresentazione grafica della caratteristica (3.2) è la seguente

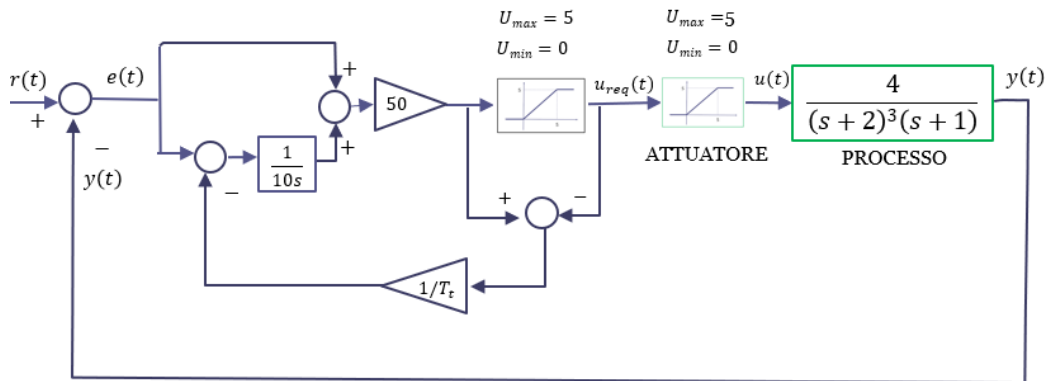


Lo schema a blocchi del processo da controllare oggetto del presente esercizio comprensivo del blocco "attuatore" che rappresenta la caratteristica statica (3.2) è pertanto il seguente:



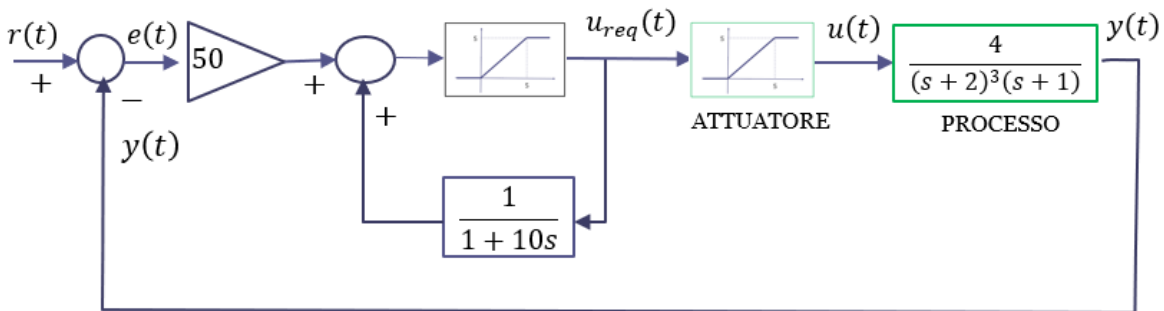
Si riportano nel seguito gli schemi delle varie architetture anti wind up viste a lezione per un controllore PI con parametri $K_p = 50$ e $T_i = 10$, particolarizzate al processo $G(s)$ da controllare ad ai valori di soglia minima e massima u_{min} e u_{max} oggetto del presente quesito.

Schema AW1 (Back calculation) per un controllore PI (AW1-PI)

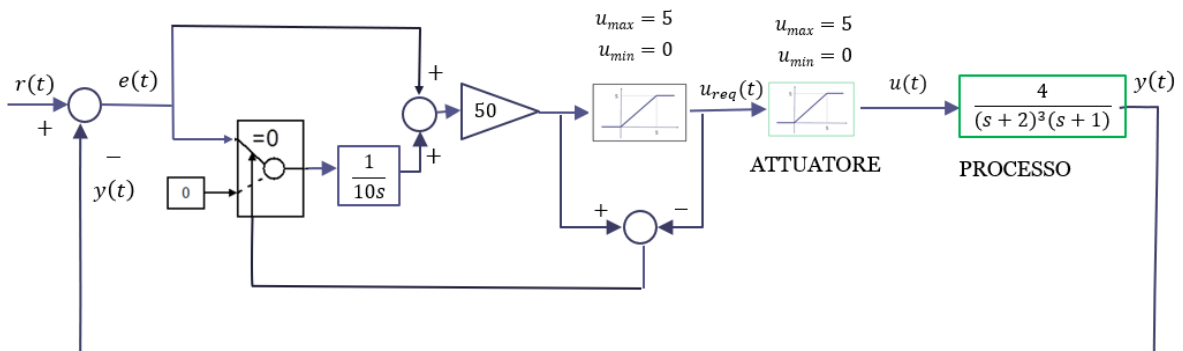


Lo schema AW1 ha un parametro libero di progetto (il guadagno $1/T_t$) che può essere dosato per rendere più o meno "aggressiva" l'azione di desaturazione. Al crescere di $1/T_t$, la durata dell'intervallo di tempo durante il quale l'attuatore permane in condizione di saturazione si riduce.

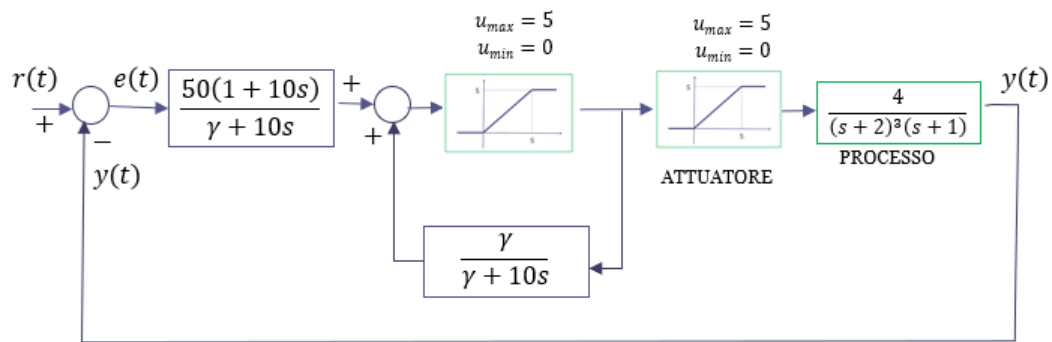
Schema AW2-PI



Schema AW3-PI "Conditional integration"



Schema AW4-PI- γ



Lo schema AW4-PI- γ ha un parametro libero di progetto (il guadagno positivo γ) che può essere dosato per rendere più o meno "aggressiva" l'azione di desaturazione.

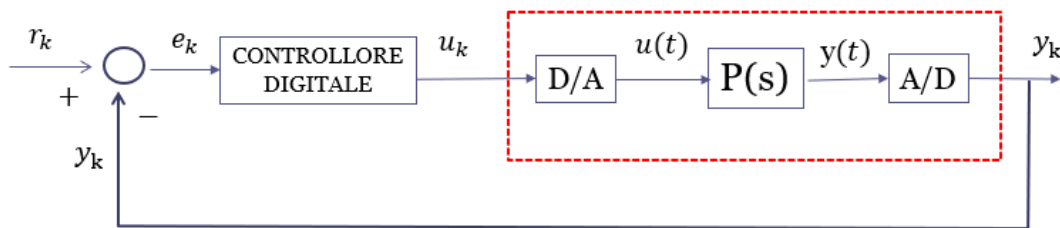
Soluzione Es.4

Per le considerazioni generali sui sistemi di controllo in cascata, e per le relative applicazioni pratiche che prevedano la realizzazione di un anello secondario di portata, si faccia riferimento alle slides proiettate a lezione.

Soluzione Es.5

Per "implementazione digitale di un controllore" si intende la realizzazione pratica di un sistema di controllo mediante un microprocessore sul quale viene eseguito un software di controllo che ad ogni istante di campionamento acquisisce ed elabora la sequenza di errore e_k determinando il valore della sequenza u_k di controllo per $k = 0, 1, 2, \dots$

Il seguente schema a blocchi rappresenta l'implementazione digitale di un sistema di controllo a loop singolo.



La sequenza di errore $e_k = r_k - y_k$ viene rilevata impiegando un convertitore analogico-digitale (A/D) che campiona la variabile di uscita $y(t)$ estraendo la sequenza di campioni $y_k = y(kT_c)$. Il parametro T_c viene denominato Periodo di Campionamento.

L'implementazione digitale di un controllore lineare e tempo invariante (LTI) origina una espressione **ricorsiva** della sequenza di controllo u_k mediante una combinazione lineare fra il valore corrente della sequenza di errore e_k ed un certo numero di campioni passati della sequenza di errore ($e_{k-1}, e_{k-2}, \dots, e_{k-m}$) e della sequenza di controllo ($u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-n}$) con $n \geq m$.

$$u_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \dots + b_m e_{k-m} - a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \dots - a_n u_{k-n} \quad (5.1)$$

Una relazione ricorsiva come la (5.1) viene anche denominata "equazione alle differenze".

La sequenza di controllo u_k ($k=0,1,2,\dots$) viene quindi elaborata da un convertitore digitale-analogico (D/A) che "ricostruisce" il segnale $u(t)$ da impiegarsi per controllare il processo $P(s)$. Il segnale ricostruito $u(t)$ ha la seguente espressione:

$$u(t) = u_k \quad kT_c \leq t < (k+1)T_c \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

L'equazione alle differenze associata alla implementazione digitale del controllore può essere determinata in vari modi a partire dalla FdT del controllore o, equivalentemente, dal corrispondente legame ingresso-uscita.

Metodo delle differenze finite

Tale metodo prende spunto dalla equazione differenziale associata al controllore:

$$\dot{u}(t) + 10u(t) = 0.1 \dot{e}(t) + 0.2e(t) \quad (5.3)$$

Il primo passo è valutarne ogni termine in corrispondenza del generico istante di campionamento $t = kT_c$:

$$\dot{u}(kT_c) + 10u(kT_c) = 0.1 \dot{e}(kT_c) + 0.2 e(kT_c) \quad (5.4)$$

Riscriviamo la (5.4) in forma più compatta usando le notazioni

$$\dot{u}(kT_c) = \dot{u}_k \quad \dot{e}(kT_c) = \dot{e}_k \quad u(kT_c) = u_k \quad e(kT_c) = e_k \quad (5.5)$$

Si ottiene:

$$\dot{u}_k + 10u_k = 0.1\dot{e}_k + 0.2e_k \quad (5.6)$$

Ora introduciamo le approssimazioni mediante differenze finite all'indietro dei termini \dot{u}_k e \dot{e}_k alla luce del valore del periodo di campionamento $T_c = 0.1$ s

$$\dot{u}_k \approx \frac{u_k - u_{k-1}}{T_c} = \frac{u_k - u_{k-1}}{0.1} = 10(u_k - u_{k-1}) \quad (5.7)$$

$$\dot{e}_k \approx \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c} = \frac{e_k - e_{k-1}}{0.1} = 10(e_k - e_{k-1}) \quad (5.8)$$

Sostituendo le (5.7)-(5.8) nella (5.6) si ottiene

$$10(u_k - u_{k-1}) + 10u_k = 0.1 \cdot 10(e_k - e_{k-1}) + 0.2e_k \quad (5.9)$$

Aggregando i termini comuni si ottiene:

$$20u_k - 10u_{k-1} = 1.2e_k - e_{k-1} \quad (5.10)$$

Esplicitando la relazione (5.10) rispetto ad u_k , si giunge all'espressione finale della equazione alle differenze ricavata con il metodo delle differenze finite.

$$u_k = \frac{1}{20}(10u_{k-1} + 1.2e_k - e_{k-1}) = 0.5u_{k-1} + 0.06e_k - 0.05e_{k-1}$$

Per la determinazione di u_0 , che risulta dipendere da u_{-1} e da e_{-1} , tali quantità devono essere poste uguali a zero. Una formulazione più accurata della relazione ricorsiva attraverso la quale determinare la sequenza di controllo u_k è pertanto la seguente:

$$u_{-1} = e_{-1} = 0$$

$$u_k = 0.5u_{k-1} + 0.06e_k - 0.05e_{k-1} \quad k = 0,1,2, \dots$$

Metodo di Tustin

Tale metodo prende spunto dalla FdT del controllore, che nel presente esercizio si deduce facilmente dalla equazione differenziale (5.3) come segue:

$$R(s) = \frac{0.1s + 0.2}{s + 10}$$

Operiamo nella $R(s)$ la sostituzione $s := F(z)$ associata al metodo di Tustin

$$s := F(z) = \frac{2}{T_c} \cdot \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{0.1} \cdot \frac{z-1}{z+1} = 20 \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

$$R_{TU}(z) = R(s) \Big|_{s=20 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.1 \cdot \left[20 \cdot \frac{z-1}{z+1} \right] + 0.2}{20 \cdot \frac{z-1}{z+1} + 10} = \frac{2.2z - 1.8}{30z - 10} \approx \frac{0.073z - 0.06}{z - 0.333}$$

A partire dalla $R_{TU}(z)$ ottenuta, ricaviamo immediatamente l'espressione ricorsiva della legge di controllo digitale dedotta secondo il metodo di Tustin:

$$R_{TU}(z) = \frac{0.073z - 0.06}{z - 0.333} \quad \Rightarrow \quad u_k = 0.333u_{k-1} + 0.073e_k - 0.06e_{k-1}$$

Per la determinazione di u_0 , che risulta dipendere da u_{-1} e da e_{-1} , tali quantità devono essere poste uguali a zero. Una formulazione più accurata della relazione ricorsiva attraverso la quale determinare la sequenza di controllo u_k è pertanto la seguente:

$$u_{-1} = e_{-1} = 0$$

$$u_k = 0.333u_{k-1} + 0.073e_k - 0.06e_{k-1} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$