1. Il capitale di 1200 euro viene impiegato per la durata di 2 anni e 6 mesi alla forza annua di interesse $\delta(s) = 0,05 + 0,015s$

   - Calcolare il montante prodotto;
   - la forza d'interesse descritta che regime individua?
   - Quali sono le principali caratteristiche della forza d'interesse? Il candidato descriva la forza d'interesse e come essa si calcola nei vari regimi.

2. Tizio ha compiuto, in capitalizzazione semestrale, le seguenti operazioni:

   - ha versato un certo capitale 8 anni fa;
   - dopo 1 anno e 6 mesi ha versato un secondo capitale di importo pari ai 2/3 del primo;
   - dopo altri 3 anni e 6 mesi ha versato un terzo capitale di importo pari al triplo del precedente;
   - due anni fa ha prelevato 4000 euro.

   Sapendo che il saldo disponibile oggi è 6000 euro e che in ogni caso è stato applicato il tasso del 9% annuo nominale convertibile semestralmente, determinare l'importo di ciascun versamento fatto.

3. Un artigiano ha ottenuto un prestito, per l'acquisto di alcuni macchinari, al tasso agevolato del 2,50% annuo, che si è impegnato ad ammortizzare col metodo uniforme. Sapendo che la quarta rata annua è costituita da 2250,00 euro per quota capitale e da 281,250 euro per quota interesse, calcolare l'importo del prestito e la durata dell'ammortamento.

   Esaminare inoltre la situazione al quarto anno e redigere il piano di ammortamento.

   Dopo 5 anni ha chiesto un ulteriore prestito, per rinnovo locali, da ammortizzare mediante altri 7 versamenti annui, successivamente ai precedenti, e e di importo uguale a 12000 euro. Calcolare le rate di questo prestito; tasso 6,5%

4. Impresa Spa ha emesso obbligazioni per un valore totale pari a 100 Milioni di Euro divise fra 10.000 risparmiatori che rimborserà in un periodo massimo di 10 anni. Il tasso di remunerazione del prestito è effettuato al tasso nominale convertibile semestralmente del 4%, e si prevede che vengano rimborsati i primi 50 milioni nei primi 5 anni ipotizzando di rimborsare 1/5 di tali 50 milioni ogni anno. I restanti 50 milioni verranno rimborsati con la seguente scadenza:

   - Sesto anno nessuna obbligazione
   - Il decimo anno il 20% di CC ed il restante diviso equamente negli altri tre anni

   Calcolare:

   (a) gli interessi che Impresa pagherà per i prossimi 5 anni
   (b) la vita media dell'obbligazione vivente al 7 anno
   (c) il prezzo dell'obbligazione vivente al 8 anno al tasso j=4%

5. Calcolare la duration di un titolo quadriennale emesso il 10 giugno 2013 che paga cedole semestrali corrisposte al $j(2) = 5\%$, valore nominale $K = 100$, dopo che è stato effettuato il pagamento della 4 cedola

- per calcolare la duration dopo il pagamento della 4 cedola puoi disporre dei prezzi dei seguenti titoli di puro sconto:

$$\begin{aligned}
Bot_{3mesi} &= 99,5 \\
Bot_{6mesi} &= 99,2 \\
Bot_{12mesi} &= 98,9 \\
Bot_{18mesi} &= 98,4 \\
Bot_{24mesi} &= 98,1
\end{aligned}$$

- volendo calcolare il prezzo di tale obbligazione il 10 settembre 2015 posso utilizzare le informazioni contenute ni BOT?

Soluzioni

Esercizio 1

La *forza d'interesse*, è il limite per $\Delta t \to 0$ dell'intensità d'interesse:

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{i(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \\
&= \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} \right] \cdot \frac{1}{r(t)} \\
&= \frac{1}{r(t)} \cdot r'(t) = \frac{d}{dt} \ln r(t)
\end{aligned} \tag{1}$$

La forza di interesse nei vari regimi considerati è data da:

$RIS)$	$r(t) = 1 + it$	$\delta(t) = \frac{i}{1+it}$
$RIA)$	$r(t) = \frac{1}{1-dt}$	$\delta(t) = (1-dt)\frac{1}{(1-dt)^2} \cdot d = \frac{d}{1-dt}$
$RIC)$	$r(t) = (1+i)^t = e^{\delta t}$	$\delta(t) = \delta = \ln(1+i)$

Si può notare che

- nel RIS e nel RIA la forza d'interesse dipende da t;
- nel RIC la forza d'interesse non dipende da t.

La forza d'interesse $\delta\ (t)$, individua completamente la legge di capitalizzazione, ossia il regime finanziario. Infatti, nota $\delta(\tau)$ per ogni $\tau \in [0,\ t]$ si può ricavare univocamente $r(t)$ tale che $r(0) = 1$. Dalla definizione è ovvio che, data $r\ (t)$, derivando possiamo ricavare la funzione $\delta\ (t)$. Mostriamo il viceversa. Supponiamo $\delta\ (t)$ nota e ricaviamo il regime finanziario che essa definisce. Dalla definizione

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \ln r(t) \tag{2}$$

integriamo la funzione sull'intervallo $[0, t]$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \delta(\tau) d\tau &= \int_0^t \frac{d}{d\tau} \ln r(\tau) d\tau \\
&= \ln r(\tau) \big|_0^t \\
&= \ln r(t) - \ln r(0) \\
&= \ln r(t) - \ln 1 \\
&= \ln r(t)
\end{aligned}$$

e prendendo gli esponenziali di ambo i membri otteniamo la legge di capitalizzazione:

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(\tau) d\tau} \tag{3}$$

$$M = Ce^{\int_0^t \delta(\tau) d\tau}$$

Si vede, quindi, che se la forza d'interesse è costante, $\delta\,(t) = \delta$ costante $\forall t$, allora

$$\int_0^t \delta d\tau = \delta \int_0^t d\tau = \delta t$$

da cui

$$r(t) = e^{\delta t} = (1+i)^t$$

si ottiene il regime composto. Si è già visto che per un regime composto la forza d'interesse è costante, per cui si è ottenuto il seguente risultato:

La forza d'interesse nei tre regimi è data da:

$$\begin{array}{lll} RIS & r(x,y) = 1 + i(y-x) & \delta(x,y) = \frac{i}{1+i(y-x)} \\ RIA & r(x,y) = \frac{1}{1-d(y-x)} & \delta(x,y) = \frac{d}{1-d(y-x)} \\ RIC & r(x,y) = (1+i)^{(y-x)} = e^{\delta(y-x)} & \delta(x,y) = \ln(1+i) = \delta \end{array}$$

Anche in questo caso la forza d'interesse nel RIS e nel RIA dipende da x ed y, mentre nel RIC è costante. Per quanto riguarda il calcolo del montante utilizziamo l'equazione (3), e quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} M &= 1200 \cdot e^{\int_0^{2.5} 0.05+0.015 \cdot ds} = 1200 \cdot e^{0.05\cdot(2.5-0)+0.015\cdot(\frac{2.5^2}{2}-0)} \\ &= 1200 \cdot e^{0.172} = 1425.214 \end{aligned} \tag{4}$$

Esercizio 2

Calcoliamo intanto il tasso semestrale tramite il nominale $j(2)$:

$$i_{sem} = \frac{j(2)}{2} = 0.045 = 4.5\% \tag{5}$$

Dopodichè utilizzando il tasso semestrale scriviamo l'equivalenza tra gli importi versati capitalizzati ed il montante come segue:

$$C \cdot (1+i_{sem})^{8\cdot 2} + \frac{2}{3}C \cdot (1+i_{sem})^{6.5\cdot 2} + 2C \cdot (1+i_{sem})^{3\cdot 2} - 4000 \cdot (1+i_{sem})^{2\cdot 2} = 6000$$

Da notare che avendo utilizzato il tasso semestrale all'esponente troviamo il tempo in anni moltiplicato per due (per trovarci il numero di semestri), ora raccogliendo C ed isolandolo:

$$C[(1+i_{sem})^{16} + \frac{2}{3} \cdot (1+i_{sem})^{13} + 2 \cdot (1+i_{sem})^{6}] = 4000 \cdot (1+i_{sem})^4 + 6000$$

$$C = \frac{4000 \cdot (1+0.045)^4 + 6000}{[(1+0.045)^{16} + \frac{2}{3} \cdot (1+0.045)^{13} + 2 \cdot (1+0.045)^6]} = 1854.238$$

Esercizio 3

Sapendo che $R_4 = C_4 + I_4 = 2250 + 281.250$ possiamo ricavarci il debito residuo al tempo 3 nel seguente modo:

$$I_4 = i * D_3 \rightarrow D_3 = \frac{I_4}{i} = 281.250/0.025 = 11250$$

Inoltre ricordando che $D_3 = D - 3C^*$ otteniamo il debito iniziale che risulta pari a $D = D_3 + 3C^* = 11250 + 3 \cdot 2250 = 18000$. Quindi il numero di rate è $n = \frac{18000}{2250} = 8$. Il piano di ammortamento è il seguente:

t	I_k	C	R_k	D_k
0	0	0	0	18000
1	450	2250	2700	15750
2	393,75	2250	2643,75	13500
3	337,5	2250	2587,5	11250
4	281,25	2250	2531,25	9000
5	225	2250	2475	6750
6	168,75	2250	2418,75	4500
7	112,5	2250	2362,5	2250
8	56,25	2250	2306,25	0

Per quanto riguarda il secondo prestito di importo pari a 12000€ , preso in $t = 5$, che inizia a ripagare dopo 4 anni (in $t = 9$) al tasso annuo del 6.5%, calcoliamo l'importo delle 7 rate riconoscendo che siamo nel caso di rate annue anticipate differite di 4 periodi:

$$R = \frac{A}{{}_4a_{7|0.065}} = \frac{12000}{v^3 * \frac{1-v^7}{0.065}} = 2642.965 \tag{6}$$

Esercizio 4

Troviamo intanto il valore nominale dei titoli emessi: $K = \frac{CC}{N} = \frac{100MLN}{10000}$=10000 e il tasso di remunerazione del prestito:

$$i = \left(1 + \frac{j(2)}{2}\right)^2 - 1 = 0.0404 \tag{7}$$

Calcoliamo ora gli interessi pagati da Impresa per i primi 5 anni, considerando che vengono remunerate 1000 obbligazioni l'anno:

$$\begin{aligned}
I_1 &= 100000000 \cdot 0.0404 = 4040000 \\
I_2 &= (100000000 - 1000 \cdot 10000) \cdot 0.0404 = 3636000 \\
I_3 &= (100000000 - 2 \cdot (1000 \cdot 10000)) \cdot 0.0404 = 3232000 \\
I_4 &= (100000000 - 3 \cdot (1000 \cdot 10000)) \cdot 0.0404 = 2828000 \\
I_5 &= (100000000 - 4 \cdot (1000 \cdot 10000)) \cdot 0.0404 = 2424000
\end{aligned}$$

Per calcolare la vita media dell'obbligazione vivente al settimo anno utilizziamo:

$$e_7 = \sum_{s=1}^{3} s \cdot p_{7,7+s} = \sum_{s=1}^{3} s \cdot \frac{N_{7+s}}{L_7} = 1 \cdot \frac{1000}{4000} + 2 \cdot \frac{1000}{4000} + 3 \cdot \frac{2000}{4000} = 2.25$$

Per quanto riguarda il prezzo dell'obbligazione vivente all'ottavo anno sfruttiamo il fatto che $P_t = u_8 + NP_8$, inoltre $p_{8,9} = \frac{1}{3}$ e $p_{8,10} = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
u_8 &= \frac{(0.0404 \cdot 10000)}{(1.04)} \cdot (p_{8,9} + p_{8,10}) + \frac{(0.0404 \cdot 10000)}{(1.04)^2} \cdot p_{8,10} = 637.4753 \\
NP_8 &= \frac{10000}{(1.04)} \cdot p_{8,9} + \frac{10000}{(1.04)^2} \cdot p_{8,10} = 9368.836
\end{aligned} \tag{8}$$

Segue che $P_8 = 10006.31$

Esercizio 5

Calcoliamo intanto i tassi spot sfruttando i prezzi dei titoli di puro sconto nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
i^*_{0,3} &= \left(\frac{100}{99.5}\right)^4 - 1 = 0.02 \\
i^*_{0,6} &= \left(\frac{100}{99.2}\right)^2 - 1 = 0.016 \\
i^*_{0,12} &= \left(\frac{100}{98.9}\right) - 1 = 0.011 \\
i^*_{0,18} &= \left(\frac{100}{98.4}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0.01 \\
i^*_{0,24} &= \left(\frac{100}{98.1}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.009
\end{aligned}$$

Ora possiamo calcolare la duration notando che il titolo paga cedole annuali pari a $0.025 \cdot 100 = 2.5$€ e che al 10/06/2015 mancano 4 distaccamenti di cedola (l'ultimo comprende anche il valore nominale). Essendo la formula della duration in t pari a:

$$D(t) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t - t_k) x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k v(t, t_k)} \tag{9}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}D(10/6/15) &= \frac{0,5 \cdot 2.5(1+0.016)^{-0.5} + 2.5(1+0,011)^{-1} + 1,5 \cdot 2.5(1+0,01)^{-1.5} + 2 \cdot 102.5(1+0,009)^{-2}}{2.5 \cdot (1+0.016)^{-0.5} + 2.5 \cdot (1+0,011)^{-1} + 2.5 \cdot (1+0,01)^{-1.5} + 102.5 \cdot (1+0,009)^{-2}} \\ &= 1.93\end{aligned}$$

Per calcolare il prezzo dell'obbligazione al 10/9/2015 possiamo utilizzare le informazioni contenute nei BOT per calcolare i seguenti tassi forward: $\tilde{i}_{3,6}; \tilde{i}_{3,12}; \tilde{i}_{3,18}; \tilde{i}_{3,24}$ nel seguente modo:

$$\tilde{i}_{3,6} = \left(\frac{(1+0.016)^{\frac{6}{12}}}{(1+0.02)^{\frac{3}{12}}} \right)^{\frac{12}{3}} - 1 = 0.012$$

Ed il prezzo al 10/9/2015 risulta pari a:

$$P_{10/09/15} = \frac{2.5}{(1+\tilde{i}_{3,6})^{\frac{3}{12}}} + \frac{2.5}{(1+\tilde{i}_{3,12})^{\frac{9}{12}}} + \frac{2.5}{(1+\tilde{i}_{3,18})^{\frac{15}{12}}} + \frac{102.5}{(1+\tilde{i}_{3,24})^{\frac{21}{12}}}$$

1. (T) Sia data la seguente funzione
$$r(t) = 4t^2 + 3t + 1 \tag{1}$$

a) verificare che descriva una funzione fattore di montante

b) verificare che soddisfi la proprietà di traslabilità (si ricordi che $t = t_2 - t_1$)

c) il candidato descriva un regime scindibile

d) a suo avviso il regime descritto dalla (1) può essere scindibile?

2. Sia data la seguente operazione finanziaria:

- deposito oggi su un conto corrente €1000, la banca mi paga interessi ad un tasso del 3% per i prossimi 3 anni
- dopo il secondo anno decido di versare per i successivi 24 mesi una somma pari a €50 ogni mese che viene remunerata a un tasso nominale convertibile 6 volte l'anno $j(6) = 4,5\%$
- dopo il terzo anno la banca decide di incrementare il tasso sul mio conto corrente al nuovo tasso pari al 4%

  Il candidato calcoli il montante dopo 5 anni

3. Si consideri l'operazione dell'esercizio 2 nel caso in cui la banca decida di restituirmi dopo 5 anni un importo pari a $e3000$ calcolare il tasso interno di rendimento?

4. Sia dato il seguente piano di ammortamento

- importo prestito $e500.000, T = 3anni$, tasso di remunerazione $i = 4,5\%$. Redigere il piano di ammortamento nel caso in cui il rimborso avvenga con il metodo della rata costante pagata ogni 6 mesi.
- Utilizzare la formula di Makeham e calcolare la NP e l'Usufrutto dopo le prime tre rate pagate al tasso j=4%.
- nell'ipotesi in cui la banca mi chieda una spesa iniziale per coprire i costi di perizia pari a €1000 è possibile calcolare il tasso effettivo del prestito?

5. Sia dato il seguente titolo obbligazionario:

- obbligazione triennale che paga cedole semestrali calcolate al tasso $j(2) = 5,3\%$ emessa l'8/7/2014 alla pari; data godimento delle cedole 8/1, 8/7.
- si ipotizzi che oggi sul mercato siano presenti i seguenti titoli di puro sconto:

$$Bot_{8/01/2016} = 99,36 \quad Bot_{8/7/2016} = 98,35 \quad CTZ_{8/7/2017} = 97,75$$

- Calcolare il prezzo all'8/7/2015 (qualora mancassero informazioni per una scadenza utilizzare gli altri dati disponibili).
- nell'ipotesi che all'8/10/2015 il tasso di mercato possa essere approssimabile dal 2% calcolare la duration del titolo.

6. (T) Il candidato descriva

- la formula analitica della duration e della duration modificata,
- le principali caratteristiche di tale indicatore temporale
- il suo utilizzo nell'analisi di sensibilità delle operazioni finanziarie.

Soluzioni

Esercizio 1

a) affinchè sia un fattore di montante devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} r(0) &= 1; \frac{dr(t)}{dt} > 0 \\ r(0) &= 1; \quad \frac{dr(t)}{dt} = 8t+3>0 \quad \textit{sempre per } \text{ogni } t>0 \end{aligned}$$

b) un regime è traslabile se è verificata la seguente relazione:

$$\begin{aligned} r(t_1+\tau, t_2+\tau) &= r(t_1, t_2) \\ r(t_1, t_2) &= 4(t_2-t_1)^2+3(t_2-t_1)+1 = \\ & \quad 4t_2^2+4t_1^2-8t_1t_2+3t_2-3t_1+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(t_1+\tau, t_2+\tau) &= 4(t_2+\tau-t_1-\tau)^2+3(t_2+\tau-t_1-\tau)+1 = \\ & \quad 4t_2^2+4t_1^2-8t_1t_2+3t_2-3t_1+1 \end{aligned}$$

è traslabile

c) un regime si dice scindibile se

$$\begin{aligned} r(t_1, t_2) &= r(t_1, x)\, r(x, t_2) \\ r(t_1, x) &= 4(t_2-x)^2+3(t_2-x)+1 \\ r(t_1, x) r(x, t_2) &= \left[4(t_2-x)^2+3(t_2-x)+1\right]\left[4(x-t_1)^2+3(x-t_1)+1\right] \\ &\neq 4t_2^2+4t_1^2-8t_1t_2+3t_2-3t_1+1 \end{aligned}$$

Esercizio 2

devo calcolare il tasso mensile al quale capitalizzare le somme deposte mensilmente:

$$J(6) = 6i_{\frac{1}{6}} \to i_{\frac{1}{6}} = \frac{0.045}{6} = 0.0075$$

il tasso annuo equivalente al tasso bimestrale è

$$i = (1+0.0075)^6 - 1 = 4.585$$

da cui il tasso mensile $i_{\frac{1}{12}}$

$$i_{\frac{1}{12}} = (1+0.04585)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.00374$$

$$\begin{aligned} 1000 \cdot (1+0.03)^3(1+0.04)^2 + 50 \cdot \frac{\left(1+i_{\frac{1}{12}}\right)^{24} - 1}{i_{\frac{1}{12}}} \cdot (1+0.04) &= \\ 1181.9 + (50 \cdot 25.061) \cdot (1+0.04) &= 2485.1 \end{aligned}$$

Esercizio 3

Devo trovare il tasso i che rende equa l'operazione:

$$3000 = 1000 \cdot (1+i)^5 + 50 \cdot \frac{\left(1+\left((1+i)^{\frac{1}{12}}-1\right)\right)^{24} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{12}} - 1} \cdot (1+i)$$

Parto da $i = 5\%$

$$1000 \cdot (1+0.05)^5 + 50 \cdot \frac{\left(1+\left((1+0.05)^{\frac{1}{12}}-1\right)\right)^{24}-1}{(1+0.05)^{\frac{1}{12}}-1} \cdot (1+0.05) = 2597 < 3000$$

devo aumentare il tasso, provo con i=10%

$$1000 \cdot (1+0.10)^5 + 50 \cdot \frac{\left(1+\left((1+0.10)^{\frac{1}{12}}-1\right)\right)^{24}-1}{(1+0.10)^{\frac{1}{12}}-1} \cdot (1+0.10) = 3058.9 > 3000$$

Segue che il tasso è compreso tra il 5% e il 10%

Esercizio 4

La rata costante devo calcolarla attraverso il tasso semestrale equivalente al tasso annuo del 4.5%:

$$i_{\frac{1}{2}} = (1+0.045)^{0.5} - 1 = 0.0222$$

la rata è quindi data da

$$R = \frac{500000}{\frac{1-(1+0.0222)^{-6}}{0.0222}} = 89927$$

Il piano di ammortamento è il seguente:

t(semestri)	C_k	I_k	R_k	D_k
0	0	0	0	500000
1	78827	11100	89927	421173
2	80576,96	9350,04	89927	340596,04
3	82365,77	7561,23	89927	258230,27
4	84194,29	5732,71	89927	174035,98
5	86063,40	3863,60	89927	87972,58
6	87974,01	1952,99	89927	0

Per calcolare la NP e l'Ususfrutto applico la formula di Makeham:

$$U_m = \frac{i}{j}\left[D_m - NP_m\right]$$

considerando che il tasso i è quello tecnico pari al tasso semestrale 0.0222 e il tasso semestrale equivalente al tasso annuo del 4%:

$$j_{\frac{1}{2}} = (1.04)^{0.5} - 1 = 0.0198$$

Pertanto il Debito residuo dopo il terzo pagamento

$$D_3 = C_4 + C_5 + C_6 = 258.231$$

$$\begin{aligned} NP_3 &= C_4\,(1.0198)^{-1} + C_5\,(1.0198)^{-2} + C_6\,(1.0198)^{-3} \\ &= 84194\,(1.0198)^{-1} + 86063\,(1.0198)^{-2} + 87974\,(1.0198)^{-3} \\ &= 248260 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3 &= \frac{0.0222}{0.02} \cdot [258231 - 248260] = \\ \frac{0.0222}{0.0198} \cdot 9971 &= 11180 \\ &= 5733\,(1.0198)^{-1} + 3864\,(1.0198)^{-2} + 1953\,(1.0198)^{-3} \end{aligned}$$

Se viene versato un importo di € 1000 all'inizio del piano di ammortamento il tasso effettivo si calcola nel modo seguente:

$$499000 = 89927 \cdot \frac{1 - \left(1 + i_{\frac{1}{2}}\right)^{-6}}{i_{\frac{1}{2}}}$$

Si trova con metodi numerici, si veda ad es. **esercizio 3**, che il tasso semestrale effettivo è pari a 0.0228, il cui corrispettivo annuo è pari a:

$$i = (1 + i_{\frac{1}{2}})^2 - 1 = 0.0461$$

Esercizio 5

Cedola semestrale

$$\begin{aligned} i_{\frac{1}{2}} &= \frac{j(2)}{2} \\ i_{\frac{1}{2}} &= \frac{0.053}{2} = 0.0265 \\ C &= 0.0265 \cdot 100 = 2,65 \end{aligned}$$

Per calcolare il prezzo all'8/7/2015 devo conoscere i tassi spot per attualizzare le cedole. Ho a disposizione i bot con le scadenze: 6 mesi, 12mesi e 24 mesi:

$$\begin{aligned} i_{0,\frac{1}{2}} &= \left(\frac{100}{99.36}\right)^2 - 1 = 0.0129 \\ i_{0,1} &= \left(\frac{100}{98.35}\right) - 1 = 0.0167 \\ i_{0,2} &= \left(\frac{100}{97.75}\right)^{0.5} - 1 = 0.0144 \end{aligned}$$

manca il tasso a 18 mesi che posso calcolare come interpolazione tra il tasso a 12 mesi e tasso a 24 mesi:

$$i_{0,1.5} = \frac{0.0167 + 0.0144}{2} = 0.0155$$

Calcolo cosi' il prezzo all'8/7/2015:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2.65}{(1.0129)^{0.5}} + \frac{2.65}{(1.0167)} + \frac{2.65}{(1.0155)^{1.5}} + \frac{102.65}{(1.0144)^2} \\ &= 107.59 \end{aligned}$$

Calcolo la duration associata a una struttura per scadenza piatta

$$\begin{aligned} D &= \frac{0.25 \cdot \frac{2.65}{(1.02)^{0.25}} + 0.75 \cdot \frac{2.65}{(1.02)^{0.75}} + 1.25 \cdot \frac{2.65}{(1.02)^{1.25}} + 1.75 \cdot \frac{102.65}{(1.02)^{1.75}}}{\frac{2.65}{(1.02)^{0.25}} + \frac{2.65}{(1.02)^{0.75}} + \frac{2.65}{(1.02)^{1.25}} + \frac{102.65}{(1.02)^{1.75}}} \\ &= 1.6765 \end{aligned}$$

Esercizio 6

Si veda "Appunti di Matematica Finanziaria" (pag.186-195)

1. Il signor X ha acquistato un titolo dal valore nominale di 1000 euro con rate semestrali costanti calcolate al tasso tecnico annuo del 4%, scadente fra 2 anni.

   - (P) Si valuti il prezzo pagato sapendo che il tasso di valutazione è dell' 4% annuo.
   - (P) Subito dopo il ritiro della seconda cedola il tasso di mercato scende al 3.5% ed il signor X vende il titolo, determinarne il prezzo di vendita.
   - (T) Si può valutare il rendimento realizzato dal signor X al momento della vendita (fare le opportune considerazioni)

2. (P)Calcolare la duration del titolo dell'esercizio n. 1 ipotizzando che la struttura per scadenza sia la seguente

$$\begin{aligned} i(0, \frac{1}{2}) &= 0.035; i(0,1) = 0.04 \\ i(0, 1.5) &= 0.042; i(0.2) = 0.045 \end{aligned}$$

   (a) (T) Dimostrare perchè la duration è un'indicatore di sensibilità del prezzo a variazioni del tasso d'interess.

3. (P) Data la struttura per scadenza dell'esercizio 2 calcolare i tassi forward dopo un anno

4. (P)Si rediga il piano di ammortamento a due tassi di un prestito di €150.000 restituito in 5 anni. Si ipotizzi che il tasso i di remunerazione del prestito sia del 5% e il tasso di accumulazione del capitale sia pari a $j = 4\%$.

5. (P)Sia data la seguente operazione finanziaria

Progetto X			Progetto Y		
t	E_t	U_t	t	E_t	U_t
0		4500	0		4500
1 anno	1450		9 mesi	1840	
2 anni	2100		2 anni	2000	
5 anni	2000		36 mesi	1000	

   (a) (P) Si calcoli il VAN (REA) dei due investimenti e si indichi qual è l'investimento favorito nell'ipotesi in cui il tasso di mercato sia pari al $2,75\%$.

   (b) (P) se l'investitore dopo due anni volesse uscire dall'operazione pagando €1500 . Quale sarebbe il tir delle due operazioni?

6. (T) La struttura per scadenza dell'esercizio 2 come è stata ottenuta?

   - (T) cosa sono i tassi forward?
   - (T) che relazione c'è fra i tassi forward ed i tassi spot? Scrivere la formula e spiegare come viene determinata e quali sono le implicazioni.

Soluzioni

Esercizio 1

Le cedole sono pari a: $ced = \frac{j(2)}{2} \cdot K = 0.02 \cdot 1000 = 20$€, possiamo ora calcolare il prezzo del titolo:

$$P = 20(1.04)^{-0.5} + 20(1.04)^{-1} + 20(1.04)^{-1.5} + 1020(1.04)^{-2} = 1000.747$$

Il prezzo dopo la seconda cedola, al tasso di mercato pari a 0.035 è pari a :

$$P' = 20(1 + 0.035)^{-0.5} + 1020(1 + 0.035)^{-1} = 1005.166$$

Esercizio 2

Utilizzando la struttura dei tassi fornita:

$$D = \frac{0.5 \cdot 20(1 + 0.035)^{-0.5} + 20(1 + 0.04)^{-1} + 1.5 \cdot 20(1 + 0.042)^{-1.5} + 2 \cdot 1020(1 + 0.045)^{-2}}{20(1 + 0.035)^{-0.5} + 20(1 + 0.04)^{-1} + 20(1 + 0.042)^{-1.5} + 1020(1 + 0.045)^{-2}} = 1.941$$

Esercizio 3

Iniziamo con il calcolare i tassi su base annua $i^*(0, 1.5)$ e $i^*(0, 2)$:

$$i^*(0, 1.5) = (1 + i(0, 1.5))^{\frac{2}{3}} - 1 = 0.0278$$
$$i^*(0, 2) = (1 + i(0, 2))^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.0223$$

Ora possiamo ricavarci i tassi forward:

$$\tilde{i}(1, 1.5) = (1 + i^*(0, 1.5)) \cdot \left(\frac{1 + i^*(0, 1.5)}{i^*(0, 1)}\right)^{\frac{1-0}{0.5}} - 1 = 0.0038$$
$$\tilde{i}(1, 2) = (1 + i^*(0, 2)) \cdot \left(\frac{1 + i^*(0, 2)}{i^*(0, 1)}\right)^{\frac{1-0}{1}} - 1 = 0.0049$$

Esercizio 4

t	C_k	I_k	Q_k	R_K	D_K
0					150000
1	0	7500	27694,067	35194,067	150000
2	0	7500	27694,067	35194,067	150000
3	0	7500	27694,067	35194,067	150000
4	0	7500	27694,067	35194,067	150000
5	150000	7500	27694,067	35194,067	0

Esercizio 5

iniziamo con il calcolo del VAN per i due progetti d'investimento:

1. $VAN_X = -4500 + 1450(1 + 0.0275)^{-1} + 2100 \cdot (1 + 0.0275)^{-2} + 2000(1 + 0.0275)^{-5} = 646.5957$
2. $VAN_Y = -4500 + 1840(1 + 0.0275)^{-\frac{9}{12}} + 2000 \cdot (1 + 0.0275)^{-2} + 1000(1 + 0.0275)^{-3} = 119.1552$

Si preferisce dunque il progetto X. Per quanto riguarda il TIR dei due progetti nel caso vengano bloccati dopo due anni con il pagamento di 1500€ abbiamo la seguente situazione:

1. $TIR_X : 0 = -4500 + 1450(1 + TIR_X)^{-1} + 600 \cdot (1 + TIR_X)^{-2}$
2. $TIR_Y : 0 = -4500 + 1840(1 + TIR_Y)^{-\frac{9}{12}} + 500 \cdot (1 + TIR_Y)^{-2}$

E risolvendo le due equazioni si trova rispettivamente che $TIR_X = -0.4397$ e $TIR_Y = -0.4467$

Esercizio 6

Vedere cap.1 pagina 58 (Appunti di Matematica Finanziaria)

1. (T) Il candidato dimostri l'equivalenza fra la Condizione di Chiusura Elementare e la Condizione di Chiusura Iniziale per redigere un piano di ammortamento

2. (T)Il candidato illustri la relazione esistente tra il tasso nominale convertibile m volte nell'anno, $j(m)$, ed il tasso istantaneo d'interesse o forza d'interesse, $\delta(s)$.

3. Sia data la seguente operazione finanziaria:

   - verso su un conto corrente €100 mensilmente per i prossimi 18 mesi. La banca si impegna a corrispondermi un tasso del 2,5% per l'intero periodo
   - alla fine del 18esimo mese la banca mi propone di
     (a) trasferire il montante su un conto di risparmio vincolato su cui corrisponderà il 4% all'anno.
     (b) continuare a corrispondere €200 ogni due mesi e remunerarli allo stesso tasso del 2,5%:

     Il candidato determini

     a) la somma di cui potra' disporre dopo 4 anni nel caso a;
     b) il montante prodotto nel caso b.

4. Tizio chiede alla banca un prestito di EURO 350.000 che dovra' rimborsare in 7 anni con le seguenti modalità:

   - la metà dell'importo con quote di capitale costante
   - la rimanente metà con il metodo della rata costante
   - si rediga il piano di ammortamento nel caso in cui il tasso di remunerazione sia pari al 3% in entrambi i casi.

5. Sia dato un Buono Polienale del Tesoro di durata quinquennale emesso il 15 settembre 2012.

   - le cedole corrisposte sono semestrali al tasso $j(2) = 4\%$; data godimento delle cedole 15/9, 15/3.
   - calcolare il prezzo oggi (15/9/2015) nell'ipotesi in cui il tasso di mercato sia pari al 3%.
   - stimare quale sarà il prezzo dell'obbligazione il 15/9/2016 ipotizzando di avere oggi disponibili i seguenti titoli di puro sconto

   $$Bot_{15/09/2016} = 99,36 \quad CtZ_{15/3/2017} = 99,01 \quad CtZ_{15/9/2017} = 98,75$$

   - calcolare la duration dell'obbligazione nell'ipotesi di curva dei tassi piatta, oggi, tasso i=3%.

Soluzioni

Esercizio 1 e 2

Si vedano capitolo 3 (pag.101-108) e capitolo 1 (pag.62-66)

Esercizio 3

Iniziamo con il calcolare il tasso $i_{mensile}$ per agevolarci nel calcolare il montante generato dai versamenti mensili dei prossimi 18 mesi:

$$i_{mensile} = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.0021$$

Quindi il montante alla fine dei 18 mesi è pari a:

$$M_{18} = 100 \cdot s_{n|i_{mensile}} = 100 \cdot \frac{(1+0.0021)^{18} - 1}{0.0021} = 1832.493$$

Ora nel caso (a) si ha che tale importo viene trasferito su un conto di risparmio che paga interessi al 4%, al quarto anno ottengo dunque:

$$M_{(a)} = M_{18} \cdot (1+0.04)^{2.5} = 2021.276$$

Nel caso (b) si ha invece che dopo i 18 mesi vengono versati 200€ bimestralmente al 2.5%, calcoliamoci intanto il tasso bimestrale corrispondente:

$$i_{bimestrale} = (1+i)^{1/6} - 1 = 0.0041$$

Al quarto anno ottengo dunque:

$$M_{(b)} = M_{18} \cdot (1+0.025)^{2.5} + 200 \cdot \frac{(1+0.0041)^{15} - 1}{0.0041} = 1949.18 + 3087.649 = 5036.829$$

Notando che in 2.5 anni ci sono 30 mesi e quindi 15 bimestri e che abbiamo investito il montante generato dai versamenti dei primi 18 mesi fino al quarto anno ad un tasso del 2.5%.

Esercizio 4

Per quanto riguarda l'ammortamento all'italiana di 175000€ calcoliamo la quota capitale costante: $C = \frac{175000}{7} = 25000$, segue che il piano:

t	C_k	I_k	R_k	D_k
0	0	0	0	175000
1	25000	5250	30250	150000
2	25000	4500	29500	125000
3	25000	3750	28750	100000
4	25000	3000	28000	75000
5	25000	2250	27250	50000
6	25000	1500	26500	25000
7	25000	750	25750	0

Per quanto riguarda l'ammortamento alla francese calcoliamo la rata costante:$R = \frac{A}{a_{n|i}} = 28088,6119$

t	C_k	I_k	R_k	D_k
0	0	0	0	175000
1	22838,6119	5250	28088,6119	152161,388
2	23523,7703	4564,84164	28088,6119	128637,618
3	24229,4834	3859,12853	28088,6119	104408,134
4	24956,3679	3132,24403	28088,6119	79451,7666
5	25705,0589	2383,553	28088,6119	53746,7077
6	26476,2107	1612,40123	28088,6119	27270,497
7	27270,497	818,11491	28088,6119	0

Il piano del prestito totale si ottiene sommando elemento per elemento i due piani precedenti.

Esercizio 5

Le cedole semestrali sono pari a $\frac{j(2)}{2} \cdot K = 2$€, quindi per calcolare il prezzo al 15/9/2015 bisogna scontare i "flussi" futuri al tasso del 3%:

$$P_{15/9/2015} = \frac{2}{(1.03)^{0.5}} + \frac{2}{(1.03)^{1}} + \frac{2}{(1.03)^{1.5}} + \frac{102}{(1.03)^{2}} = 101.9704$$

Per stimare il prezzo dell'obbligazione al 15/9/2016 bisogna utilizzare i tassi forward $\tilde{f}_{1,1.5}$ e $\tilde{f}_{1,2}$. Sfruttiamo i prezzi dei titoli per calcolare i fattori di sconto:

$$\begin{aligned} v(0,1) &= \left(\frac{99.36}{100}\right) = 0.9936 \\ v(0,1.5) &= \left(\frac{99.01}{100}\right) = 0.9901 \\ v(0,2) &= \left(\frac{98.75}{100}\right) = 0.9875 \end{aligned} \qquad (1)$$

E per assenza di arbitraggio ricordiamo che: $v(0,t) = v(0,s) \cdot v(s,t)$, con $s < t$, segue che i tassi di sconto stimati sono:

$$v(1,1.5) = \frac{v(0,1.5)}{v(0,1)} = \frac{0.9901}{0.9936} = 0.9965$$

$$v(1,2) = \frac{v(0,2)}{v(0,1)} = \frac{0.9875}{0.9936} = 0.9939$$

Calcoliamo il prezzo al 15/9/16 scontando le poste future:

$$P_{15/9/2016} = 2 \cdot v(1, 1.5) + 102 \cdot v(1, 2) = 2 \cdot 0.9965 + 102 \cdot 0.9939 = 103.3708$$

Calcoliamo ora la Duration al 15/9/2015 al tasso i=3%:

$$D_{15/9/2015} = \frac{0.5 \cdot 2(1.03)^{-\frac{1}{2}} + 1 \cdot 2(1.03)^{-1} + 1.5 \cdot 2(1.03)^{-1.5} + 2 \cdot 102(1.03)^{-2}}{P_{15/9/2015}} = \frac{198.0865}{101.9704} = 1.943$$

1. (T) Si descriva come è possibile determinare la curva per scadenza dei tassi d'interesse.

   - che cosa sono i tassi spot?
     - cosa sono i tassi forward?
     - scrivere la relazione esistente tra tassi spot e tassi forward .

2. Sia data la seguente operazione finanziaria:

   - deposito 1000€; in un conto di risparmio al 1/01/2015
   - dopo 3 mesi viene attivato un piano di accumulo per cui vengono depositato €50 mensilmente;
   - dopo 3 anni prelevo €500.

   Si determini quanto vi e' disponibile sul conto al 1/01/2019. Ipotizzando al 1/1/2015 i tassi applicati dalla banca sul conto di risparmio sono pari a $i = 1,5\%$, i tassi sul piano di accumulo siano pari a $i_2 = 2\%$, e al 1/1/2018 il nuovo tasso sul conto di risparmio è pari al 2,3%.

3. Viene stipulato un mutuo decennale tra il sig. Rossi e Unicredit per un prestito di €150.000. Il rimborso viene previsto con piano di ammortamento a due tassi: il tasso di accumulo $i_1 = 3\%$ ed il tasso di remunerazione è pari a $i_2 = 5\%$.

   - Redigere il piano di ammortamento
   - calcolare la nuda proprietà e l'usufrutto al $7°anno$.

4. Tizio acquista un CTZ il 19/10/2015 con scadenza 12 mesi e paga €97,35 per €100 di valore nominale.

   - che rendimento si aspetta di realizzare Tizio al momento dell'acquisto?
   - se il 19/05/2016 il Bot venisse venduto a €98,01 al sig. Rossi, che rendimento avrebbe realizzato Tizio?
   - calcolare il rendimento realizzato dal Sig. Rossi.

5. Calcolare la duration di un titolo triennale emesso il 19 ottobre 2014 che paga cedole semestrali corrisposte al $j(2) = 4\%$, valore nominale $K = 100$, dopo che è stato effettuato il pagamento della 2 cedola ipotizzando la struttura dei tassi d'interesse sia piatta e uguale al tasso $i_1 = 2\%$.

Soluzioni

Esercizio 1

Si veda cap. 6 di "Appunti di Matematica Finanziaria"

Esercizio 2

Iniziamo con il trasformare il tasso applicato dalla banca per il piano di accumulo da semestrale a mensile:

$$i_{12} = (1 + i_2)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0.00331$$

Il montante dopo quattro anni risulta uguale a:

$$\begin{aligned} M &= 1000 \cdot (1+i)^3 \cdot (1+i') + 50 \cdot s_{45|i_{12}} - 500 \cdot (1+i') \\ &= 1000 \cdot (1+0.015)^3 \cdot (1+0.023) + 50 \cdot \frac{(1+0.00331)^{45} - 1}{0.00331} - 500 \cdot (1+0.023) = 2980.125 \end{aligned}$$

Esercizio 3

Ricordando che $Q_k = \frac{C}{s_{n|i}}$, il piano di ammortamento è il seguente: La nuda proprieta e l'usufrutto

t	C_k	I_k	Q_k	R_k	D_k
0					150000
1	0	7500	13084,576	20584,576	150000
2	0	7500	13084,576	20584,576	150000
3	0	7500	13084,576	20584,576	150000
4	0	7500	13084,576	20584,576	150000
5	0	7500	13084,576	20584,576	150000
6	0	7500	13084,576	20584,576	150000
7	0	7500	13084,576	20584,576	150000
8	0	7500	13084,576	20584,576	150000
9	0	7500	13084,576	20584,576	150000
10	150000	7500	13084,576	20584,576	0

al settimo anno rappresentano rispettivamente il valore al settimo anno delle quote capitale e interesse dell'ammortamento:

- $NP_7 = 150000 \cdot (1 + 0.05)^{-3} = 129575.6$
- $U_7 = 7500 \cdot (1.05)^{-1} + 7500 \cdot (1.05)^{-2} + 7500 \cdot (1.05)^{-3} = 20424.36$

Esercizio 4

Risolviamo l'esercizio punto per punto:

1. $i = \frac{100}{97.35} - 1 = 0.02722$ che è il rendimento del titolo al momento dell'acquisto
2. $i_{Tizioperiodale} = \frac{98.01}{97.35} - 1 = 0.00678$
   da cui segue il rendimento $i_{Tizio} = (1 + i_{Tizioperiodale})^{\frac{12}{7}} - 1 = 0.0116$
3. $i_{Rossiperiodale} = \frac{100}{98.01} - 1 = 0.02$
   da cui segue il rendimento $i_{rossi} = (1 + i_{Rossiperiodale})^{\frac{12}{5}} - 1 = 0.0487$

Esercizio 5

Le cedole sono pari a: $ced = \frac{j(2)}{2} \cdot k = 0.02 \cdot 100 = 2$€.
La duration, ipotizzando una struttura dei tassi piatta e pari al 2% risulta uguale a :

$$D_{19/10/15} = \frac{0.5 \cdot 2(1.02)^{-0.5} + 1 \cdot 2(1.02)^{-1} + 1.5 \cdot 2(1.02)^{-1.5} + 2 \cdot 102(1.02)^{-2}}{2(1.02)^{-0.5} + 2(1.02)^{-1} + 2(1.02)^{-1.5} + 102(1.02)^{-2}} = 1.943$$

1. (T) La seguente legge

$$f(t) = 1 + 0,10t + 0,15t^2$$

   - è una legge finanziaria di capitalizzazione?
   - soddisfa la proprietà di scindibilità?
   - Calcolarne la forza d'interesse.

2. Il signor Rossi ha effettuato la seguente operazione:

   - ha versato in banca 150 euro 5 anni fa;
   - dopo 2 anni ha iniziato a versare mensilmente €50 che la banca gli remunerava ad un tasso semestrale del 3%;
   - al 4 anno ha ritirato 250 €

   Calcolare il montante di tale operazione.

3. Ipotizzando che l'operazione dell'esercizio 2 abbia un valore attuale pari €1350 si calcoli il TIR

4. Poldo ha ottenuto un prestito di C € al tasso del 3% da ammortizzare in 4 anni con il metodo della rata costante. Sapendo che la prima quota interesse è pari a 250 calcolare l'importo del prestito e redigere il piano di ammortamento

5. Impresa Spa ha emesso obbligazioni per un valore totale pari a 10 Milioni di Euro divise fra 1.000 risparmiatori che rimborserà in un periodo massimo di 10 anni. Il tasso di remunerazione del prestito è effettuato al tasso nominale convertibile semestralmente del 4%, e si prevede che vengano rimborsati i primi 5 milioni nei primi 5 anni ipotizzando di rimborsare 1/5 di tali 5 milioni ogni anno. I restanti 5 milioni verranno rimborsati tutti al sesto anno. Calcolare la vita media di un'obbligazione acquistata da un risparmiatore il 2 anno.

6. Calcolare la duration di un titolo quadriennale emesso il 18 aprile 2014 che paga cedole semestrali corrisposte al $j(2) = 5\%$, valore nominale $K = 100$, dopo che è stato effettuato il pagamento della 4 cedola

   - per calcolare la duration dopo il pagamento della 4 cedola puoi disporre dei prezzi dei seguenti titoli di puro sconto:

$$\begin{aligned}
Bot_{3mesi} &= 99,5\\
Bot_{6mesi} &= 99,2\\
Bot_{12mesi} &= 98,9\\
Bot_{18mesi} &= 98,4\\
Bot_{24mesi} &= 98,1
\end{aligned}$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

- Per essere considerata una legge finanziaria di capitalizzazione deve rispettare le condizioni:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \frac{df(t)}{dt} &> 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Pertanto verifichiamo:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + 0,10 \cdot 0 + 0,15 \cdot 0^2 \\ \frac{df(t)}{dt} &= 0,10 + 2 \cdot 0,15 \cdot t > 0 \qquad con\ t > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

- Per soddisfare la proprietà di scindibilità deve essere:

$$r(x,y) = r(x,\tau)r(\tau,y) \qquad \forall \tau \in (x,y) \tag{3}$$

Scrivo:

$$\begin{aligned} f(t) = f(x,y) &\Leftrightarrow t = y - x \\ f(x,y) &= 1 + 0,10(y-x) + 0,15(y-x)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Riscrivo la proprietà di scindibilità:

$$f(x,y) = f(x,\tau)f(\tau,y) \tag{5}$$

in cui si hanno:

$$\begin{aligned} f(x,\tau) &= 1 + 0,10(\tau - x) + 0,15(\tau - x)^2 \\ f(\tau,y) &= 1 + 0,10(y-\tau) + 0,15(y-\tau)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f(x,\tau)f(\tau,y) &= [1 + 0,10(\tau - x) + 0,15(\tau - x)^2][1 + 0,10(y-\tau) + 0,15(y-\tau)^2] \\ &\neq 1 + 0,10(y-x) + 0,15(y-x)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Essendo $f(x,\tau)f(\tau,y) \neq f(x,y)$ il regime non è scindibile.

Un'altra soluzione si potrebbe ottenere ricordando che il regime è scindibile se e solo se la forza di interesse è indipendente dal tempo t.

- Calcoliamo la forza d'interesse partendo dalla sua definizione:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \ln f(t) \tag{8}$$

Ricordando che:

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \tag{9}$$

abbiamo:

$$\delta(t) = \frac{0,10 + 0,30t}{1 + 0,10t + 0,15t^2} \tag{10}$$

Si può notare che, in relazione al punto precedente, la forza di interesse dipende da t.

ESERCIZIO 2

Iniziamo a calcolare, partendo dal tasso semestrale del 3% fornito dal testo, i tassi annuali e mensili che utilizzeremo in seguito per calcolare il montante:

$$i = (1 + i_{sem})^2 - 1 = (1 + 0.03)^2 - 1 = 6.09\%$$
$$i_{mensile} = (1 + i_{sem})^{(\frac{1}{6})} - 1 = (1 + 0.03)^{(\frac{1}{6})} - 1 = 0.494\%$$

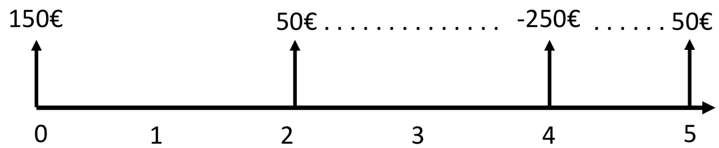

Figure 1: Timeline operazioni

Per calcolare il montante bisgona capitalizzare in $t = 5$ le operazioni effettuate dal signor Rossi. In particolare per i versamenti mensili tra il secondo ed il quinto anno siamo nella situazione di rate costanti posticipate (pag. 86 di "Appunti di Matematica Finanziaria"). In particolare si hanno 36 versamenti mensili di importo pari a 50€.

$$\begin{aligned} M &= 150 \cdot (1+i)^5 + 50 \cdot s_{36|i_{mensile}} - 250 \cdot (1+i) = \\ &= 150 \cdot (1+0.0609)^5 + 50 \cdot \frac{(1+0.00494)^{36} - 1}{0.00494} - 250 \cdot (1+0.0609) \\ &= 1901.052 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Dobbiamo trovare il tasso che rende la somma delle operazioni, effettuate dal signor Rossi, attualizzate pari a 1350€. Notiamo dunque che il primo importo pari a 150€ non va attualizzato, mentre le 36 rate costanti le possiamo attualizzare accorgendoci che si tratta di una rendita posticipata differita di 2 anni (pag.80 "Appunti di Matematica Finanziaria").

$$1350 = 150 + 50 \cdot_p a_{36|TIR_{mensile}} - 250 \cdot (1+TIR)^{-4} =$$
$$1350 = 150 + 50 \cdot (1+TIR)^{-2} \cdot \frac{1 - [1 + ((1+TIR)^{\frac{1}{12}} - 1)]^{-36}}{(1+TIR)^{\frac{1}{12}} - 1} - 250 \cdot (1+TIR)^{-4}$$

Tale equazione va risolta con metodi numerici e si trova che $TIR \in (0.075, 0.08)$.
Possibile metodo per risolverlo, sfruttando il teorema degli zeri:

$$0 = -1350 + 150 + 50 \cdot (1+TIR)^{-2} \cdot \frac{1 - [1 + ((1+TIR)^{\frac{1}{12}} - 1)]^{-36}}{(1+TIR)^{\frac{1}{12}} - 1} - 250 \cdot (1+TIR)^{-4}$$

Dunque dobbiamo trovare TIR^* tale che $f(TIR^*) = 0$; si ha che negli estremi dell'intervallo $(0.075, 0.08)$; $f(0.075) > 0$ e $f(0.08) < 0$, dunque per il teorema degli zeri vi è una radice in tale intervallo.

ESERCIZIO 4

T = 4 anni
i = 3%
Sappiamo che:

$$I_1 = i \cdot C \tag{11}$$

quindi abbbiamo:

$$C = \frac{I_1}{i} = \frac{250}{0,03} = 8333 \tag{12}$$

$$R = \frac{C}{a_{4|0.03}} = \frac{8333}{\frac{1-(1.03)^{-4}}{0.03}} = 2241.892 \tag{13}$$

Costruiamo dunque il piano di ammortamento alla francese:

t	I_k	C_k	R	D_k
0				8333
1	250	1991.89	2241.89	6341.441
2	190.24	2051.65	2241.89	4289.79
3	128.69	2113.19	2241.89	2176.59
4	65.29	2176.59	2241.89	0

ESERCIZIO 5

Consideriamo che un'obbligazione acquistata da un risparmiatore il 2 anno (subito dopo il primo round di rimborso, ipotizzando che il rimborso avvenga a fine anno) possa avere una vita residua massima di 5 anni, considerando che la vita residua di un'obbligazione appena emessa è al massimo di 6 anni.

Per ottenere la vita media dell'obbligazione in questione, dobbiamo calcolare le probabilità di essere rimborsati per ogni diverso periodo di rimborso, escludendo . Le probabilità si ottengono facendo il rapporto

Anno	1	2	3	4	5
N	1000	1000	1000	1000	5000
Probabilità	0,11	0,11	0,11	0,11	0,56

tra N relativo all'anno e la somma di tutti gli N. Ora possiamo calcolarci la vita media dell'obbligazione, data dal seguente valore atteso :

$$VM = 1 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,11 + 3 \cdot 0,11 + 4 \cdot 0,11 + 5 \cdot 0,56 = 3,9 \ anni \tag{14}$$

ESERCIZIO 6

Il valore delle cedole semestrali è pari a $i_{sem} \cdot C = 0.025 \cdot 100$=2.5€. Essendo il titolo quadriennale, il numero di cedole è pari a 8.

Sfruttando il principio di assenza di arbitraggio è possibile calcolare i valori attuali delle 4 cedole rimanenti utilizzando i prezzi dei titoli di puro sconto. Il prezzo del Bot a 3 mesi è inutile al fine di calcolare il valore attuale poichè tutte le scadenze degli altri Bot corrispondono perfettamente alle scadenze delle cedole. Abbiamo ad esempio che (poniamo t=0 dopo il pagamento della quarta cedola):

$$\begin{aligned} v(0,6mesi) &= \frac{P(Bot_{6mesi})}{100} = \frac{99.2}{100} = 0.992 \\ v(0,12mesi) &= \frac{P(Bot_{12mesi})}{100} = 0.989 \\ v(0,18mesi) &= \frac{P(Bot_{18mesi})}{100} = 0.984 \\ v(0,24mesi) &= \frac{P(Bot_{24mesi})}{100} = 0.981 \end{aligned} \tag{15}$$

Essendo la formula della duration in t pari a:

$$D(t) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t-t_k) x_k v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k v(t,t_k)} \tag{16}$$

Abbiamo:

$$D(0) = \frac{0,5(2.5 \cdot 0,992) + (2.5 \cdot 0,989) + 1,5(2.5 \cdot 0,984) + 2(102.5 \cdot 0,981)}{(2.5 \cdot 0,992) + (2.5 \cdot 0,989) + (2.5 \cdot 0,984) + (102.5 \cdot 0,981)} = \frac{208,50}{107.97} \approx 1,93 \tag{17}$$

1. Tizio investe Euro 1000 per 5 anni e 6 mesi utilizzando la forza annua d'interesse $\delta(s) = \frac{0,05}{1+0,05s}$:
    - Calcolare il montante prodotto;
    - la forza d'interesse descritta che regime individua?
    - Il candidato descriva cos'è il tasso nominale convertibile m volte nell'anno e la sua relazione con il tasso istantaneo.
2. Al Signor Rossi viene proposta la seguente operazione
    - versare C in banca ed ottenere una capitalizzazione nel RIS per 6 anni;
    - dopo 1 anno e 6 mesi versa un secondo capitale di importo pari a 1/2C;
    - dopo un altro anno versa un terzo capitale di importo pari al triplo del precedente;
    - al quinto anno preleva 1000 euro.
    - al sesto anno la banca gli propone di capitalizzare tutto in RIC per altri 2 anni

    Sapendo che il saldo disponibile oggi è 10.000 euro e che per i primi 6 anni è stato applicato un tasso del 4% e negli ultimi 2 del 5%. Determinare l'importo di ciascun versamento fatto.
3. Il signor Rossi deve rimborsare un debito di 15.000 Euro che dovrà pagare in rate costanti annuali di 3.500 euro. Ipotizzando un tasso di remunerazione del 2,5% quante rate dovraà versare per estinguere il debito?
    - il candidato rediga il piano di ammortamento ipotizzando che se il numero di rate non risultasse intero l'ammontare residuo viene versato alal penultima rata.
    - ipotizzando che il creditor applichi un costo aggiuntivo di 500 euro ogni due anni per la gestione del prestito calcolare il Tasso effettivo di Costo dell'operazione (TIR)
4. Banca Conte ha emesso obbligazioni per un valore totale pari a 31 Milioni di Euro divise fra 1.000 risparmiatori che rimborserà in un periodo massimo di 5 anni ad un tasso del 3% . IL piano di rimborso prevede che il primo anno si rimborsino 1.000 obbligazioni ed ogni anno seguente il doppio di quelle rimborsate l'anno prima.
    - Si calcoli la nuda proprietà e l'usufrutto al 3° anno.
    - si calcoli la vita media delle obbligazioni in vita al 2° anno.
5. Sia dato un BTP emesso l'8 settembre 2014, T=5 anni; cedola semestrale corrisposta al tasso $j(2) = 5\%$, valore nominale K=1000.
    - oggi viene scambiato a 967 Euro. Ciò cosa implica?
    - calcolare il Tasso effettivo di rendimento oggi
    - ipotizzando che i prezzi dei seguenti TZC l'8/3/2017 siano pari a

    $$\begin{aligned} Bot_{6mesi} &= 98,5 \\ Bot_{12mesi} &= 98,2 \\ Bot_{18mesi} &= 97,9 \\ Bot_{24mesi} &= 97,4 \\ Bot_{30mesi} &= 96,1 \end{aligned}$$

      calcolare il nuovo prezzo del BTP in quella data;
    - calcolare la duration del titolo all'8/3/2017

Soluzioni

Esercizio 1

Calcoliamo il montante prodotto dalla seguente operazione finanziaria sfruttando la relazione tra fattore di capitalizzazione e forza d'interesse:

$$\begin{aligned} M &= 1000 \cdot e^{\int_0^{5.5} \frac{0.05}{1+0.05s} ds} \\ &= 1000 \cdot e^{[ln(1+0.05s)]_0^{5.5}} \\ &= 1000 \cdot e^{0.24} \\ &= 1271 \end{aligned}$$

Per le domande teoriche si veda "Appunti di Matematica Finanziaria"

Esercizio 2

Scriviamo l'espressione dell'intera operazione per poi isolarci i versamenti dei singoli importi:

$$\left(C(1+0.04\cdot 6) + \frac{1}{2}C(1+0.04\cdot 4.5) + 3C(1+0.04\cdot 3.5) - 1000(1+0.04) \right) \cdot (1+0.05)^2 = 10000$$
$$(1.24C + 0.527C + 1.14C - 1040) \cdot 1.1466 = 10000$$

Da cui segue che:

$$(2.9C - 1040) = 8726.003 \rightarrow C = 2650$$

Esercizio 3

Calcoliamo il numero delle rate per un prestito di 15000€ ripagato con rate di importo pari a 3500€ al tasso i=2.5%:

$$n = -\frac{log\left(1 - \frac{A\cdot i}{R}\right)}{log(1+i)} = \frac{log\left(1 - \frac{15000\cdot 0.025}{3500}\right)}{log(1+0.025)} = 4.66$$

Il piano di ammortamento è il seguente: Nella quarta rata la quota capitale regolarmente rimborsata sarebbe

t	C_k	I_k	R_k	D_k
0				15000
1	3125	375	3500	11875
2	3203.1	296.9	3500	8672
3	3283	216.80	3500	5389
4	5389	135	5524	0

pari a $3500 - 135 = 3365$, ma dato che il debito residuo è superiore resterebbe fuori $5389 - 3365 = 2024$, perciò l'ultima rata $R_4 = 5524$.
Per calcolare il TIR del caso richiesto al punto 2 dobbiamo porre:

$$15000 = 3500(1+TIR)^{-1} + 4000(1+TIR)^{-2} + 3500(1+TIR)^{-3} + 6024(1+TIR)^{-4}$$

E risolverlo con metodi numerici... il TIR risulta pari in questo caso a: 0.048 (ovviamente superiore al tasso con cui è stato compilato l'ammortamento)

Esercizio 4

Considerando che $CC = 31MLN$ e $C = 1000€$, segue che $N = \frac{31MLN}{1000} = 31000$; il piano di rimborso a 5 anni ha la seguentr struttura: Calcoliamo ora Nuda Proprietà e usufrutto al terzo anno:

t	n rimborsati
1	1000
2	2000
3	4000
4	8000
5	16000

$$NP_3 = \frac{1000 \cdot 8000}{1.02 \cdot 24000} + \frac{1000 \cdot 16000}{1.02^2 \cdot 24000} = 967.5766$$
$$U_3 = \left(\frac{30}{1.02} + \frac{30}{1.02^2}\right)\frac{16000}{24000} + \frac{30 \cdot 8000}{1.02 \cdot 24000} = 48.63514$$

Per quanto riguarda la vita media delle obbligazioni in vita al secondo anno:

$$e_2 = 1 \cdot \frac{4000}{28000} + 2 \cdot \frac{8000}{28000} + 3 \cdot \frac{16000}{28000} = 2.428571$$

Esercizio 5

Il prezzo oggi è di 967€, ciò implica che il BTP è negoziato sotto la pari e quindi i tassi di mercato, i, oggi devono essere superiori al tasso cedolare del 5% annuo affinchè il prezzo dell'obbligazione sia equo.
Le cedole sono pari a: $Ced = \frac{j(2)}{2} \cdot 1000 = 25€$, quindi il tasso effettivo di rendimento oggi risulta pari a:

$$967 = 25 \cdot a_{6|i_{\frac{1}{2}}} + \frac{1000}{(1 + i_{\frac{1}{2}})^6}$$

Da cui risulta che $i_{\frac{1}{2}} = 0.031$.
Calcoliamo i tassi spot sfruttando i prezzi dei titoli presenti sul mercato:

$$i(0,6) = \left(\frac{100}{98.5}\right)^2 - 1 = 0.030$$
$$i(0,1) = \left(\frac{100}{98.2}\right) - 1 = 0.018$$
$$i(0,1.5) = \left(\frac{100}{97.9}\right)^{\frac{12}{18}} - 1 = 0.014$$
$$i(0,2) = \left(\frac{100}{97.4}\right)^{0.5} - 1 = 0.013$$
$$i(0,2.5) = \left(\frac{100}{96.1}\right)^{\frac{12}{30}} - 1 = 0.016$$

Allora il prezzo all'8/3/2017 è pari a:

$$P_{8/3/2017} = \frac{25}{(1.03)^{0.5}} + \frac{25}{(1.018)} + \frac{25}{(1.014)^{1.5}} + \frac{25}{(1.013)^2} + \frac{1025}{(1.016)^{2.5}} = 1083.159$$

Invece la Duration sempre alla stessa data è pari a:

$$D_{8/3/2017} = \frac{\frac{0.5 \cdot 25}{(1.03)^{0.5}} + \frac{25}{(1.018)} + \frac{1.5 \cdot 25}{(1.014)^{1.5}} + \frac{2 \cdot 25}{(1.013)^2} + \frac{2.5 \cdot 1025}{(1.016)^{2.5}}}{P_{8/3/2017}} = 2.387$$

1. (T) La seguente legge

$$f(t) = \frac{1}{1 + 0,10t + 0,15(t-1)^3}$$

   - è una legge finanziaria di capitalizzazione?
   - Calcolarne la forza d'interesse.
   - Che proprietà soddisfa (il candidato elenchi le proincipali proprietà che una legge di sconto deve avere

2. Giuliano ha versato in banca 1000 euro 3 anni fa;

   - dopo 6 mesi ha iniziato a versare mensilmente €50 ad un tasso trimestrale del 3%;
   - al 2 anno ha ritirato per sei mesi 150 €

   Calcolare il montante di tale operazione.

3. Ipotizzando che l'operazione dell'esercizio 2 abbia un montante pari €1750 si calcoli il TIR

4. David ha ottenuto un prestito di 100.000 € che remunera al tasso del 3% da ammortizzare in 5 anni con il metodo dell'ammortamento americano. Sapendo che il tasso di accumulazione è pari al 4% redigere il piano di ammortamento

5. Lo Stato ha emesso obbligazioni per un valore totale pari a 5 Milioni di Euro divise fra 500 risparmiatori che rimborserà in un periodo massimo di 6 anni. ILe obbligazioni pagano cedole semestrali a un tasso $J(2) = 5\%$. Ipotizzando di rimborsare in numero uguale le obbligazioni ogni anno pari (2,4,6) e negli altri anni nulla. Calcolare la vita media di un'obbligazione acquistata da un risparmiatore il 2 anno ed il prezzo della stessa per un risparmiatore al quarto anno. Il valore nominale di ciascuna obbligazione si ipotizzi essere 1000€.

6. Calcolare la duration di un titolo quadriennale emesso il 17 ottobre 2014 che paga cedole semestrali corrisposte al $j(2) = 6\%$, valore nominale $K = 100$, dopo che è stato effettuato il pagamento della 4 cedola

   - per calcolare la duration dopo il pagamento della 4 cedola puoi disporre dei prezzi dei seguenti titoli di puro sconto:

$$\begin{aligned} Bot_{3mesi} &= 99,5 \\ Bot_{6mesi} &= 99,2 \\ Bot_{12mesi} &= 98,9 \\ Bot_{18mesi} &= 98,4 \\ Bot_{24mesi} &= 98,1 \end{aligned}$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Affinchè possa essere considerata una legge di capitalizzazione, devono essere verificate due proprietà:

$$\begin{aligned} & f(0) = 1 \\ & \frac{df(t)}{dt} > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Dunque, essendo:

$$f(0) = \frac{1}{1 - 0,15} \neq 0 \tag{2}$$

Non si tratta di una legge finanziaria di capitalizzazione, di conseguenza non è nemmeno possibile calcolarne la forza di interesse.

Per le proprietà che una legge di sconto deve avere si rimanda al manuale.

ESERCIZIO 2

Calcolo il tasso mensile:

$$i_{1/12} = (1 + i_{1/4})^{1/3} - 1 = (1,03)^{1/3} - 1 = 0,0099 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} M &= 1000(1 + 0,03)^{12} + 50s30|i_{1/12} - 150s_{6|i_{1/12}}(1 + 0,03)^2 \\ &= 1425,76 + 1736,62 - 978,756 \\ &= 2183,627 \end{aligned} \tag{4}$$

ESERCIZIO 3

E' necessario risolvere la seguente equazione (in cui l'incognita è $i_{1/12}$:

$$1750 = 1000(1 + i_{1/12})^{36} + 50\frac{(1 + i_{1/12})^{30} - 1}{i_{1/12}} - 150\frac{(1 + i_{1/12})^{6} - 1}{i_{1/12}}(1 + i_{1/12})^6 \tag{5}$$

in cui la soluzione è $i_{1/12} \approx 0,003$ quindi $i = 3,66\%$

ESERCIZIO 4

Nell'ammortamento americano le quote di interessi sono pari per tutte le rate, essendo pari a:

$$I_k = i \cdot D = 0,03 \cdot 100000 = 3000 \tag{6}$$

Per formare la rata dell'ammortamento americano, alla quota di interessi va sommata la quota da versare per capitalizzare sul fondo di accumulo il totale del debito, al tasso 4%. Questa quota è data da:

$$A_k = \frac{100000}{s_{5|0,04}} = 18462,71 \tag{7}$$

Dunque la rata da corrispondere annualmente è pari a:

$$R_k = A_k + I_k = 18462,71 + 3000 = 21462,71 \tag{8}$$

ESERCIZIO 5

Viene ipotizzato che negli anni 2 e 4 vengano rimborsati 166 risparmiatori per volta, mentre nell'ultimo anno vengano rimborsati 168 risparmiatori. La vita media di un'obbligazione con data di rimborso aleatoria è data dal valore atteso delle possibili vite a scadenza. Per un'obbligazione acquistata dopo il secondo anno, dopo il primo round di rimborso, è pari a:

$$e_2 = 2\frac{166}{500} + 4\frac{168}{500} = 2,992 \tag{9}$$

La cedola semestrale dell'obbligazione è pari a:

$$C = \frac{j(2)}{2}K = 0,025 \cdot 1000 = 25 \tag{10}$$

Dunque, il prezzo di un'obbligazione al quarto anno, dopo il secondo round di rimborso, è data da:

$$P_4 = 25a_{3|i_{1/2}} + 1025(1 + i_{1/2})^{-4} \tag{11}$$

Il prezzo non può essere calcolato numericamente poichè non sappiamo qual è il tasso di interesse con cui effettuare la valutazione dell'obbligazione.

ESERCIZIO 6

Sfrutto l'informazione data dai prezzi dei Zero Coupon Bond osservati sul mercato per ottenere i rispettivi fattori di sconto, ad esempio:

$$v(0,2) = \frac{P(Bot_{24mesi})}{100} \tag{12}$$

Dunque calcolo la Duration, sapendo che l'obbligazione ha una cedola semestrale pari a $\frac{j(2)}{2}K$, ovvero 3:

$$\begin{aligned} D_{17/10/2016} &= \frac{0,5 \cdot 3(0,992) + 1 \cdot 3(0,989) + 1,5 \cdot 3(0,984) + 2 \cdot 103(0,981)}{3(0,992) + 3(0,989) + 3(0,984) + 103(0,981)} \\ &= 1,9189 \approx \textit{1 anno, 11 mesi, 5 giorni, 10 ore, 17 minuti.} \end{aligned} \tag{13}$$

1. Effettuo le seguenti operazioni:
   - verso \$50 mensilmente su un conto di risparmio al tasso nominale convertibile trimestralmente $j(4) = 5\%$;
   - dopo 1 anno e 6 mesi verso \$1500;
   - dopo altri 6 mesi verso un importo pari alla meta' dell'importo cumulato fino ad oggi con la prima operazione;
   - prelevo dopo 2 anni \$500.

   Dopo 4 anni ritiro tutto l'importo accumulato. Calcolare il montante sapendo che il tasso di capitalizzazione applicato è stato pari a $i = 3\%$ per i primi 2 anni e poi e' pssato al 2% per i successivi periodi. Il tasso applicato sulla prima operazione va calcolato.

2. Il capitale di 1.000 euro viene impiegato per la durata di 5 anni e 3 mesi alla forza annua di interesse $\delta(s) = \frac{1}{5}s + s^2$
   - Calcolare il montante prodotto;
   - La forza d'interesse data che regime individua?
   - Come deve essere per descrivere un regime scindibile e traslabile?

3. Prendo un prestito un importo C che rimborso con il metodo di ammortamento francese a rata costante in 5 anni
   - Sapendo che la quarta rata R_1è costituita da C_1 =1.250 $I_1 = 200$, calcolare l'importo del prestito ed il tasso dell'ammortamento .
   - Richiedo inoltre un ulteriore prestito di importo pari a €12.000 da ammortizzare con il metodo della rata con quota di capitale costante mediante altri 5 versamenti annui, ad un tasso di interesse del 6.5% annuo. Determinare la rata annuale da pagare (redigere il piano di ammortamento) .

4. Luxottica ha emesso obbligazioni per un valore totale pari a $CC = 50$ Milioni di Euro divise fra 50.000 risparmiatori che rimborserà in un periodo massimo di 10 anni. La remunerazione del prestito avviene ad un tasso annuo del 4%. Si prevede il seguente piano di rimbo
   - un quinto i primi due anni equamente ripartiti
   - il terzo e il quarto anno 2/5 dell'intero prestito ripartite equamente,
   - il quinto e il settimo anno nessuna obbligazione .
   - le restanti obbligazioni equamente distribuite negli anni restanti

     Il candidato calcoli

     b) la vita media dell'obbligazione vivente al 5 anno

     c) il prezzo dell'obbligazione vivente al 8 anno immaginando il tasso di mercato j =3%

5. Calcolare la duration di un titolo quadriennale emesso il 20 gennaio 2015 che paga cedole semestrali corrisposte al $j(2) = 4\%$, valore nominale $K = 100$, dopo che è stato effettuato il pagamento della 4 cedola
   - per calcolare la duration dopo il pagamento della 4 cedola puoi disporre dei prezzi dei seguenti titoli di puro sconto:

$$Bot_{3mesi} = 99,9 \quad Bot_{12mesi} = 99,5 \quad Bot_{24mesi} = 98,9$$
$$Bot_{6mesi} = 99.7 \quad Bot_{18mesi} = 98,4$$

- volendo calcolare il prezzo che tale obbligazione avrà il 20 luglio 2017 posso utilizzare le informazioni contenute nei BOT?
- calcolare il TIR dell'obbligazione nel caso in cui venga venduta/acquistata il 20 Maggio 2018 al $P = 101,5$

Soluzioni

Esercizio 1

Iniziamo con il calcolare il tasso trimestriale equivalente per poi ricavare il tasso mensile:

$$i_{trimestrale} = \frac{j(4)}{4} = \frac{0.05}{4} = 0.0125 \longrightarrow i_{mensile} = (1 + i_{trimestrale})^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.0041$$

Procediamo dunque con il calcolo del montante:

$$M = 50 \cdot s_{48|0.0041} + 1500(1.03)^{0.5}(1.02)^2 + \left(\frac{50 \cdot s_{24|0.0041}}{2} - 500\right)(1.02)^2 = 4396.85$$

Esercizio 2

Calcoliamo il montante sfruttando la relazione tra fattore di capitalizzazione e forza di interesse (per le domande di teoria si veda libro di testo):

$$M = 1000 \cdot e^{\int_0^{5.25}(\frac{1}{5}s+s^2)ds} = 1000 \cdot e^{(\frac{1}{10}s^2+\frac{1}{3}s^3)_0^{5.25}} = 1000 \cdot e^{50.99}$$

Esercizio 3

Con i dati a disposizione troviamo le seguenti equazioni:

$$R \cdot a_{5|i} = C$$
$$I_1 = i \cdot C$$

Ora sostituendo la prima nella seconda troviamo:

$$200 = i \cdot \frac{1450(1-(1+i)^{-5}}{i} \to 1 - (1+i)^{-5} = 0.138 \to i = \sqrt[5]{\frac{1}{0.862}} = 0.03$$

Da cui segue che:

$$C = \frac{1450(1+0.03)^{-5}}{0.03} = 6640.575$$

Per quanto riguarda invece il piano di ammortamento all'italiana si ha che $C = \frac{12000}{5} = 2400$ e sapendo che $i = 0.065$ il piano è il seguente:

t	C	I_k	R_k	D_k
0				12000
1	2400	780	3180	9600
2	2400	624	3024	7200
3	2400	468	2868	4800
4	2400	312	2712	2400
5	2400	156	2556	0

Esercizio 4

Il valore nominale è pari a: $k = \frac{50M}{50000} = 1000$, $i = 4\%$ perciò le cedole=40. Le obbligazioni vengono rimborsate con il seguente piano: La vita media dell'obbligazione vivente al quinto anno è pari a:

t	N_k
1	5000
2	5000
3	10000
4	10000
5	0
6	5000
7	0
8	5000
9	5000
10	5000

$$e_5 = 1 \cdot p_{5,6} + 2\cdot_{5,7} + 3\cdot_{5,8} + 4\cdot_{5,9} + 5\cdot_{5,10} = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

Per calcolare il prezzo all'ottavo anno ci servono:

$$p_{8,9} = \frac{5000}{10000} = 0.5$$
$$p_{8,10} = \frac{5000}{10000} = 0.5$$

ed il prezzo risulta pari a :

$$P_8 = \frac{1040}{1.03} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{40}{1.03} + \frac{1040}{1.03^2} \right) \cdot \frac{1}{2} = 1014.422$$

Esercizio 5

Calcoliamo le cedole: $ced = 100 \cdot \frac{j(2)}{2} = 2$. Sfruttiamo inoltre i prezzi dei BOT per trovare i tassi spot:

$$i_{6mesi} = \left(\frac{100}{99.7} \right)^2 - 1 = 0.006$$
$$i = \left(\frac{100}{99.5} \right) - 1 = 0.005$$
$$i_{18mesi} = \left(\frac{100}{98.4} \right)^{\frac{12}{18}} - 1 = 0.01$$
$$i_{24mesi} = \left(\frac{100}{98.9} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.053$$

Calcoliamo dunque la duration:

$$D = \frac{0.5 \cdot 2(1+0.006)^{-\frac{1}{2}} + 2(1+0.005)^{-1} + 1.5 \cdot 2(1+0.01)^{-\frac{18}{12}} + 2 \cdot 102(1+0.053)^{-\frac{24}{12}}}{2(1+0.006)^{-\frac{1}{2}} + 2(1+0.005)^{-1} + 2(1+0.01)^{-\frac{18}{12}} + 102(1+0.053)^{-\frac{24}{12}}} = 1.937$$

Per il punto b ci servono i tassi forward a 6,12 e 18 mesi che si trovano utilizzando la scindibilità.
Calcoliamo il TIR (punto c):

$$101.5 = \frac{2}{(1+i)^{\frac{60}{365}}} + \frac{102}{(1+i)^{\frac{184+60}{365}}} \longrightarrow i = 0.037$$

1. Il Signor Pasquino va in banca e propone di fare le segenti operazioni:

    - creare un piano di accumulo con cui versa \$100 ogni trimestre per 6 anni;
    - deposita dopo sei mesi \$500;
    - dopo altri 18 mesi decide di modificare il versamento nel piano di accumulo e invece di versare \$100 ogni tre mesi decide di versare \$50 ogni mese.

    Il candidato calcoli il montante dopo 6 anni sapendo che il tasso applicato per i primi due anni è il tasso $j(2) = 3\%$ e che dopo il secondo anno il tasso è passato al 4%.

2. Il candidato dimostri che la condizione iniziale (C=$\sum R_k v^k$) e la condizione elementare ($\sum C_k = C$) per la costruzione di un piano di ammortamento coincidono.

3. Il Signor Rossi chiede un mutuo per l'acquisto della sua prima casa per un importo pari alla metà del valore dell'immobile valutato 300.000€. Il prestito viene ammortizzato con il piano di ammortamento a rata costante con un tasso di remunerazone pari a $i = 3,5\%$. per una durata di 4 anni. L'ammortamento del prestito prevede il pagamento della rata ogni sei mesi. La Banca, inoltre, chiede sei mesi di pre-ammortamento al tasso del 2%.

    - per l'istruzione della pratica l'ufficio mutui chiede €1000, calcolare il TAEG (o tasso interno di costo) per il Signor Rossi

4. Si calcoli la Nuda Proprietà e l'Usufrutto del prestito riportato nell'esercizio 3, dopo il pagamento della 4 rata immaginando che il tasso di valutazione sia pari a $i_1 = 4\%$.

5. Siano date due operazioni finanziarie A e B:

	A		B	
t	Uscite	Entrate	Uscite	Entrate
0	1500		2000	
12mesi		350		150
18 mesi		250		450
36 mesi		1400		1900

    - Quale investimento viene selezionato con il criterio del REA nell'ipotesi che il tasso applicato sia pari al 4,5%.
    - per quale tasso i due investimenti sono equivalenti?

6. Sia data un'obbligazione a tasso fisso che paga cedole semestrali calcolate al tasso nominale convertibile 4 volte nell'anno: $j(4) = 7.5\%$, con vita a scadenza pari a 3 anni, valore nomiale €100.

    - si ipotizzi che oggi venga scambiata al prezzo di €97 calcolare il TIR.
    - Dopo 2 anni e tre mesi l'obbligazione viene venduta al prezzo P che assicura all'acquirente un rendimento del 3%. Calcolare il prezzo;
    - Calcolare la duration di tale titolo dopo due anni e tre mesi ipotizzando di avere una curva per scadenza piatta con tassi del 4%.
    - Il candidato descriva cosa sono i tassi spot e cosa sono i tassi forward.

Soluzioni

Esercizio 1

Occorre calcolare il tasso trimestrale per il piano di accumulo

$$i_{\frac{1}{4}} = (1+0.015)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.0074$$

Il montante è dato dal versameto di 8 quote da \$100 per i primi due anni al tasso trimestrale $i_{\frac{1}{4}}$:

$$M_1(t=2) = 100 \cdot \frac{(1+0.0074)^8 - 1}{0.0074} = 821.03$$

capitalizzate poi per altri 4 anni al tasso del 4% piu \$500 capitalizzati per 5,5 anni e il versamento di \$50 per i successivi 48 mesi al tasso mensile $i_{\frac{1}{12}} = (1+0.04)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.0032$:

$$M = 821.03 \cdot (1+0.04)^4 + 500 \cdot (1.015)^3 \cdot (1+0.04)^4 + 50 \cdot \frac{(1+0.0032)^{48} - 1}{0.0032} = 4161.8$$

Esercizio 2

$$\begin{aligned}
R_k &= I_k + C_K; \quad D_{k-1} - C_k = D_k \to C_k = D_{k-1} - D_k \\
I_k &= i \cdot D_{k-1}; \quad\quad I_1 = iD_0 = iC \\
C &= \sum (C_k + I_k)\, v^k = \sum C_k v^k + I_k v^k \\
&= \sum (D_{k-1} - D_k)\, v^k + iD_{k-1} v^k \\
& \sum (D_{k-1})(1+i)^{-k}(1+i) - \sum D_k v^k \\
&= D_0 + D_1(1+i)^{-1} ... + D_n(1+i)^{-n} - D_1(1+i)^{-1} - ... - D_n(1+i)^{-n} \\
&= D_0
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Il tasso equivalente semestrale al tasso annuo del 3.5%:

$$i_{\frac{1}{2}} = (1+0.035)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.01735$$

Il piano di ammortamento prevede la rata costante o di tipo francese:

$$R = \frac{150000}{\frac{1-(1+0.01735)^{-8}}{0.01735}} = 20.243$$

t	C	I	R	D
0		1493		150.000
1	17641	2603	20243	132359
2	17947	2296	20243	114412
3	18258	1985	20243	96154
4	18575	1668	20243	77579
5	18897	1346	20243	58682
6	19225	1018	20243	39457
7	19559	685	20243	19898
8	19898	345	20243	

Per calcolare il tasso effettivo pagato dal Signor Rossi devo risolvere la seguente equazione

$$150000 - 1000 = 20459.2 \cdot \frac{1 - (1+i_{\frac{1}{2}})^{-8}}{i_{\frac{1}{2}}}$$

Esercizio 4

La nuda proprietà e l'usufrutto risultano pari a:

$$NP = 18915.7 \cdot (1.04)^{-0.5} + 19290.3 \cdot (1.04)^{-1} + 19672.3 \cdot (1.04)^{-1.5} + 20061.9 \cdot (1.04)^{-2} = 74193$$

$$U\left(4, 0.04\right) = 1543.5 \cdot (1.04)^{-0.5} + 1168.9 \cdot (1.04)^{-1} + 786.9 \cdot (1.04)^{-1.5} + 397.3 \cdot (1.04)^{-2} = 3746.7$$

Esercizio 5

$$REA_A = -1500 + 350 \cdot (1.045)^{-1} + 250 \cdot (1.045)^{-1.5} + 1400 \cdot (1.045)^{-3} = 295.77$$

$$REA_B = -2000 + 150 \cdot (1.045)^{-1} + 450 \cdot (1.045)^{-1.5} + 1900 \cdot (1.045)^{-3} = 229.75$$

Preferisco l'investimento A (REA maggiore).

Per calcolare il tasso che li rende equivalenti devo trovare quel tasso per cui il REA$_A = REA_B$:

$$\begin{aligned} -1500 + 350 \cdot (1+i)^{-1} + 250 \cdot (1+i)^{-1.5} + 1400 \cdot (1.+i)^{-3} &= \\ -2000 + 150 \cdot (1.045)^{-1} + 450 \cdot (1.045)^{-1.5} + 1900 \cdot (1.045)^{-3} &= \\ 500 + 200 \cdot (1+i)^{-1} - 200 \cdot (1+i)^{-1.5} - 500 \cdot (1.+i)^{-3} &= 0 \end{aligned}$$

$$500 + 200 \cdot (1+0.001)^{-1} - 200 \cdot (1+0.001)^{-1.5} - 500 \cdot (1.+0.001)^{-3} = 0$$

: $i \simeq 0.001$

Esercizio 6

Calcolo il tasso annuo

$$J(4) = i_{\frac{1}{4}} \cdot 4 \rightarrow i_{\frac{1}{4}} = \frac{0.075}{4} = 0.01875$$

per calcolare il tasso cedolare

$$i = (1+0.01875)^4 - 1 = 0.077$$

La cedola

$$C = \frac{0.077}{2} \cdot 100 = 3.85$$

- Per calcolare il TIR va risolta la seguente equazione con metodi numerici:

$$97 = 3.85 \cdot \frac{1 - \left(1 + i_{\frac{1}{2}}\right)^{-6}}{i_{\frac{1}{2}}} + 100\left(1 + i_{\frac{1}{2}}\right)^{-6}$$

- Il prezzo è dato da:

$$P = 3.85 \cdot (1.03)^{-0.25} + 103.85\,(1.03)^{-0.75} \rightarrow P = 105.39$$

- la duration è data da :

$$D = \frac{0.25 \cdot 3.85 \cdot (1.04)^{-0.25} + 0.75 \cdot 103.85 \cdot (1.04)^{-0.75}}{3.85 \cdot (1.04)^{-0.25} + 103.85 \cdot (1.04)^{-0.75}} = 0.731$$

ovvero $0.731 \cdot 365 = 266.82$ giorni,

$0.731 \cdot 12 = 8.772$; $\quad 0.772 \cdot 30 =: 23.16$; $\quad 0.16 \cdot 24 =: 3.84$

8 MESI, 23 GIORNI, 3 ORE ....

1. Considerata la funzione $f(t) = (1 + 5k)^{3kt}$

   - determinare i valoro di k per i quali $f(t)$ può essere considerata una funzione fattore di montante di un regime di capitalizzazione;
   - nel caso in cui $k = 0,01$ è possibile considerarla una funzione fattore di montante?
   - se la risposta al punto precedente fosse affermativa calcolare la forza d'interesse?
   - puoi dire qualcosa sulla scindibilità e traslabilità di tale regime?

2. E' stato contratto un debito di €100.000 da estinguere in 6 anni e si è pattuito di rimborsarlo versando rate annuali posticipate di una rendita immediata, di cui le prime tre risultano di importo doppio delle successive di importo R:

   - nell'ipotesi in cui il tasso sia del 5% si detrmini la rata R;
   - Si rediga il piano di ammortamento nel caso in cui tale debito venga rimborsato con un piano di ammortamento italiano al tasso di remunerazione $i = 3\%$
   - si ipotizzi che dopo 2 anni il debitore non abbia più disponibilità per pagare le rate annue e chieda di sospendere i pagamenti per due anni concordando di saldare il debito con due rate da corrispondere al quinto e sesto anno di uguale importo, determinate assicurandosi che il creditore mantenga la stessa remunerazione e non subisca una riduzione di incassi (di interessi)

3. Una società ha emesso 200.000 obbligazioni alle seguenti condizioni:

   - rimborso alla pari
   - ammortamento in otto anni
   - pagamento di cedole semestrali valutate al tasso $j(2) = 3\%$
   - valore nominale di ogni obbligazione €5000;

   Calcolare

   - l'ammontare del prestito
   - calcolare la cedola di ciascuna obbligazione
   - ipotizzare di prevedere un piano di rimborso in cui il 50% delle obbligazioni vengono equamente ripartiti nei primi 4 anni, il quinto e sesto anno nessuna obbligazione e le restanti divise nel modo seguente negli ultimi due anni 20% il primo anno e 80% il secondo. Calcolare la vita media di un'obbligazione vivente al 5 anno.
   - calcolare il prezzo di un'obbligazione vivente il sesto anno ipotizzando di avere le seguenti informazioni sui tassi spot:

$$\begin{aligned} Bot_{6mesi} &= 99,5 \\ Bot_{12mesi} &= 99,0 \\ Bot_{18mesi} &= 98,5 \\ Bot_{24mesi} &= 98,0 \end{aligned}$$

4. Considerare i seguenti progetti

progetto	0	1 anno	3 anni
A	-10.000	-5.000	20.000
B	-10.000	7.500	K

- determinare l'ordine di preferenza al variare di K ipotizzando di avere un tasso al 3%
- Calcolare Ksapendo che il TIR di B è pari al 4%
- Determinare il TIR di B nel caso in cui $K = 5200$

5. Si descriva la Duration e la Duration modificata. Cosa indica e come viene usata nella valutazione dei progetti finanziari. Dimostrare che rappresenta un indicatore di sensitività del valore di un'attività finanziaria rispetto a variazioni del tasso di interesse

Soluzioni

Esercizio 1

Una funzione fattore di montante deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ \frac{df(t)}{dt} &> 0 \end{aligned}$$

Pertanto verifichiamo

$$\begin{aligned} f(0) &= (1+5k)^{3k0} = 1 \\ \frac{df(t)}{dt} &= (1+5k)^{3kt} \cdot 3k \cdot \ln(1+5k) \end{aligned}$$

Possiamo sicuramente affermare che per $k > 0$, sapendo che il tempo $t > 0$, la derivata è positiva e quindi la funzione considerata può essere una funzione fattore di montante in un regime di capitalizzazione

- Per $k = 0.01$ la funzione diventa :
$$f(t) = (1+0.05)^{0.03t}$$
- la forza d'interesse è uguale a
$$\delta(t) = \frac{d\ln(f(t))}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{(1+0.05)^{0.03t} \cdot 0.03 \cdot \ln(1.05)}{(1+0.05)^{0.03t}} = 0.03\ln(1.05)$$
- Visto che la forza d'interesse non dipende dal tempo il regime è scindibile.
- Per quanto riguarda la traslabilità occorre verificare che
$$f(x,y) = f(x+\tau, y+\tau)$$
con $f(x,y) = (1+0.05)^{0.03(y-x)}$

Esercizio 2

Per calcolare la rata R deve valere la seguente equazione:

$$100000 = R \cdot a_{3|0.05} + 2R \cdot v^3 \cdot a_{3|0.05}$$

Isolando R troviamo:

$$R = \frac{100000}{Ra_{3|0.05} + 2 \cdot v^3 \cdot a_{3|0.05}} = \frac{100000}{7.406} = 13502.56$$

Per quanto riguarda l'ammortamento italiano invece, si ha che la quota capitale (costante) è pari a $C = \frac{100000}{6} = 16666.667$, segue che il piano di ammortamento al tasso $i = 3\%$ è il seguente:

t	I_k	C	R_k	D_k
0				100000
1	3000	16666,6667	19666,6667	83333,3333
2	2500	16666,6667	19166,6667	66666,6667
3	2000	16666,6667	18666,6667	50000
4	1500	16666,6667	18166,6667	33333,3333
5	1000	16666,6667	17666,6667	16666,6667
6	500	16666,6667	17166,6667	0

Per l'ultimo punto dobbiamo intanto partire dal fatto che dopo due anni il debito residuo $D_2 = 66666.67$, il quale aumenta al tassso d'interesse del 3% per i due anni nei quali non vengono pagate le rate:

$$D_4 = 66666.67(1 + 0.03)^2 = 70726.67$$

Le nuove rate costanti secondo le modalità pattuite con la banca si calcolano nel seguente modo:

$$R = \frac{A}{a_{2|0.03}} = \frac{70726.67}{1.913} = 36971.5$$

Esercizio 3

L'ammontare del prestito della società è pari a $A = N \cdot K = 200000 \cdot 5000 = 1\text{MLD}$, mentre la cedola per una singola obbligazione: $ced = 5000 \cdot \frac{j(2)}{2} = 75$.
Il piano di rimborso è il seguente:

t	N_k
1	25000
2	25000
3	25000
4	25000
5	0
6	0
7	20000
8	80000

La vita media di un'obbligazione vivente al 5 anno è la seguente:

$$e_5 = 1 \cdot p_{5,6} + 2 \cdot p_{5,7} + 3 \cdot p_{5,8} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

Per calcolare il prezzo al sesto anno ci servono i tassi spot che ricaviamo dai prezzi dei BOT:

$$i_{6mesi} = \left(\frac{100}{99.5}\right)^2 - 1 = 0.01$$

$$i = \left(\frac{100}{99}\right) - 1 = 0.0101$$

$$i_{18mesi} = \left(\frac{100}{98.5}\right)^{\frac{12}{18}} - 1 = 0.01013$$

$$i_{24mesi} = \left(\frac{100}{98}\right)^{0.5} - 1 = 0.01012$$

Il prezzo di un'obbligazione al sesto anno risulta pari a:

$$P_6 = \left(\frac{75}{(1+0.01)^{0.5}} + \frac{5075}{(1+0.0101)}\right) \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{75}{(1+0.01)^{0.5}} + \frac{75}{(1+0.0101)} + \frac{75}{(1+0.0103)^{1.5}} + \frac{5075}{(1+0.0102)^2}\right) \cdot \frac{4}{5} = 5176.4$$

Esercizio 4

Per determinare l'ordine di preferenza tra i due progetti al variare di K dobbiamo confrontare i due VAN:

$$VAN_A = -10000 - 5000 \cdot (1+0.03)^{-1} + 20000 \cdot (1+0.03)^{-3}$$
$$VAN_B = -10000 + 7500 \cdot (1+0.03)^{-1} + k \cdot (1+0.03)^{-3}$$

Ed in particolare $VAN_A > VAN_B$ quando:

$$-10000 - 5000 \cdot (1+0.03)^{-1} + 20000 \cdot (1+0.03)^{-3} > -10000 + 7500 \cdot (1+0.03)^{-1} + k \cdot (1+0.03)^{-3}$$

E risolvendo la disequazione:

$$k < \frac{6166.86}{(1+0.03)^{-3}} = 6738.7$$

Calcoliamo ora k sapendo che $TIR = 4\%$:

$$10000 = 7500 \cdot (1+0.04)^{-1} + k \cdot (1+0.04)^{-3}$$
$$k = \frac{10000 - 7500(1.04)^{-1}}{(1.04)^{-3}} = 3136.64$$

Calcliamo ora il TIR nel caso in cui k fosse pari a 5200:

$$10000 = 7500 \cdot (1+TIR)^{-1} + 5200 \cdot (1+TIR)^{-3}$$

Risolvendo l'equazione con metodi numerici si ottiene che $TIR = 0.145$.

1. Effettuo le seguenti operazioni:

   - verso \$100 mensilmente su un conto di risparmio al tasso nominale convertibile trimestralmente $j(4) = 5\%$;
   - dopo 1 anno e 6 mesi verso \$1500;
   - dopo altri 3 mesi verso un importo pari ad un quarto dell'importo cumulato fino ad oggi con la prima operazione;
   - prelevo dopo 2 anni \$500.

   Calcolare il montante prodotto alla fine del quarto anno sapendo che il tasso di capitalizzazione applicato è stato pari a $i = 3\%$ per i primi 2 anni, successivamente passato al 4%.(Il tasso applicato sulla prima operazione va calcolato).

2. Il capitale di 1.000 euro viene impiegato per la durata di 5 anni e 3 mesi alla forza annua di interesse $\delta(s) = \frac{1}{5}s + s^2$

   - Calcolare il montante prodotto;
   - La forza d'interesse data che regime individua?
   - e' sempre possibile individuare il regime finanziario data la forza d'interesse?

3. Prendo un prestito un importo C che rimborso con il metodo di ammortamento francese a rata costante in 5 anni

   - Sapendo che la quarta rata R_1è costituita da C_1 =1.250 $I_1 = 200$, calcolare l'importo del prestito ed il tasso dell'ammortamento .
   - Richiedo inoltre un ulteriore prestito di importo pari a €12.000 da ammortizzare con il metodo della rata con quota di capitale costante mediante altri 5 versamenti annui, ad un tasso di interesse del 6.5% annuo. Determinare la rata annuale da pagare (redigere il piano di ammortamento) .

4. Luxottica ha emesso obbligazioni per un valore totale pari a $CC = 50$ Milioni di Euro divise fra 50.000 risparmiatori che rimborserà in un periodo massimo di 10 anni. La remunerazione del prestito avviene ad un tasso annuo del 4%. Si prevede il seguente piano di rimborso

   - un quinto i primi due anni equamente ripartiti
   - il terzo e il quarto anno 2/5 dell'intero prestito ripartite equamente,
   - il quinto e il settimo anno nessuna obbligazione .
   - le restanti obbligazioni equamente distribuite negli anni restanti
     Il candidato calcoli

     b) la vita media dell'obbligazione vivente al 5 anno

     c) il prezzo dell'obbligazione vivente all'ottavo anno sapendo che il tasso di mercato è j =3%

5. Calcolare la duration di un titolo quadriennale emesso il 5 Aprile 2016 che paga cedole semestrali corrisposte al $j(2) = 4\%$, valore nominale $K = 100$, dopo che è stato effettuato il pagamento della 4 cedola

   - per calcolare la duration dopo il pagamento della 4 cedola puoi disporre dei prezzi dei seguenti titoli di puro sconto:

$$Bot_{3mesi} = 99,9 \quad Bot_{12mesi} = 99,5 \quad Bot_{24mesi} = 98,9$$
$$Bot_{6mesi} = 99.7 \quad Bot_{18mesi} = 98,4$$

- volendo calcolare il prezzo che tale obbligazione avrà il 5 Aprile 2019 posso utilizzare le informazioni contenute nei BOT?
- calcolare il TIR dell'obbligazione nel caso in cui venga venduta/acquistata il 20 Maggio 2019 al $P = 103,5$

Soluzioni

Esercizio 1

Iniziamo con il calcolare il tasso trimestriale equivalente per poi ricavare il tasso mensile:

$$i_{trimestrale} = \frac{j(4)}{4} = \frac{0.05}{4} = 0.0125 \longrightarrow i_{mensile} = (1 + i_{trimestrale})^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.0041$$

Procediamo dunque con il calcolo del montante:

$$M = 50 \cdot s_{48|0.0041} + 1500(1.03)^{0.5}(1.02)^2 + \left(\frac{50 \cdot s_{24|0.0041}}{2} - 500\right)(1.02)^2 = 4396.85$$

Esercizio 2

Calcoliamo il montante sfruttando la relazione tra fattore di capitalizzazione e forza di interesse (per le domande di teoria si veda libro di testo):

$$M = 1000 \cdot e^{\int_0^{5.25}(\frac{1}{5}s+s^2)ds} = 1000 \cdot e^{(\frac{1}{10}s^2+\frac{1}{3}s^3)_0^{5.25}} = 1000 \cdot e^{50.99}$$

Esercizio 3

Con i dati a disposizione troviamo le seguenti equazioni:

$$R \cdot a_{5|i} = C$$
$$I_1 = i \cdot C$$

Ora sostituendo la prima nella seconda troviamo:

$$200 = i \cdot \frac{1450(1-(1+i)^{-5}}{i} \to 1 - (1+i)^{-5} = 0.138 \to i = \sqrt[5]{\frac{1}{0.862}} = 0.03$$

Da cui segue che:

$$C = \frac{1450(1+0.03)^{-5}}{0.03} = 6640.575$$

Per quanto riguarda invece il piano di ammortamento all'italiana si ha che $C = \frac{12000}{5} = 2400$ e sapendo che $i = 0.065$ il piano è il seguente:

t	C	I_k	R_k	D_k
0				12000
1	2400	780	3180	9600
2	2400	624	3024	7200
3	2400	468	2868	4800
4	2400	312	2712	2400
5	2400	156	2556	0

Esercizio 4

Il valore nominale è pari a: $k = \frac{50M}{50000} = 1000$, $i = 4\%$ perciò le cedole=40. Le obbligazioni vengono rimborsate con il seguente piano: La vita media dell'obbligazione vivente al quinto anno è pari a:

t	N_k
1	5000
2	5000
3	10000
4	10000
5	0
6	5000
7	0
8	5000
9	5000
10	5000

$$e_5 = 1 \cdot p_{5,6} + 2 \cdot_{5,7} + 3 \cdot_{5,8} + 4 \cdot_{5,9} + 5 \cdot_{5,10} = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

Per calcolare il prezzo all'ottavo anno ci servono:

$$p_{8,9} = \frac{5000}{10000} = 0.5$$
$$p_{8,10} = \frac{5000}{10000} = 0.5$$

ed il prezzo risulta pari a :

$$P_8 = \frac{1040}{1.03} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{40}{1.03} + \frac{1040}{1.03^2} \right) \cdot \frac{1}{2} = 1014.422$$

Esercizio 5

Calcoliamo le cedole: $ced = 100 \cdot \frac{j(2)}{2} = 2$. Sfruttiamo inoltre i prezzi dei BOT per trovare i tassi spot:

$$i_{6mesi} = \left(\frac{100}{99.7} \right)^2 - 1 = 0.006$$
$$i = \left(\frac{100}{99.5} \right) - 1 = 0.005$$
$$i_{18mesi} = \left(\frac{100}{98.4} \right)^{\frac{12}{18}} - 1 = 0.01$$
$$i_{24mesi} = \left(\frac{100}{98.9} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.053$$

Calcoliamo dunque la duration:

$$D = \frac{0.5 \cdot 2(1+0.006)^{-\frac{1}{2}} + 2(1+0.005)^{-1} + 1.5 \cdot 2(1+0.01)^{-\frac{18}{12}} + 2 \cdot 102(1+0.053)^{-\frac{24}{12}}}{2(1+0.006)^{-\frac{1}{2}} + 2(1+0.005)^{-1} + 2(1+0.01)^{-\frac{18}{12}} + 102(1+0.053)^{-\frac{24}{12}}} = 1.937$$

Per il punto b ci servono i tassi forward a 6,12 e 18 mesi che si trovano utilizzando la scindibilità.
Calcoliamo il TIR (punto c):

$$101.5 = \frac{2}{(1+i)^{\frac{60}{365}}} + \frac{102}{(1+i)^{\frac{184+60}{365}}} \longrightarrow i = 0.037$$

1. (punti 6) (T) Come viene costruita la curva per scadenza dei tassi d'interesse (curva dei tassi spot)?

   (a) quali strumenti servono per calcolare i tassi spot?

   (b) cosa sono i tassi forward?

   (c) qual'è la relazione esistente tra tassi spot e forward

   (d) descrivere il principio di assenza di arbitraggio .

2. (punti 5) Sia data la seguente operazione finanziaria:

   - deposito il capitale C in un conto di risparmio al 17/09/2018 che paga interessi ad un tasso nominale convertibile 3 volte nell'anno $j(3) = 4.5\%$(ricordare che $j(m)$non è un tasso)
   - dopo 3 mesi verso mensilmente un importo pari ad $\frac{1}{12}C$ per 2 anni e mezzo per cui la banca mi riconosce un tasso i pari al 2%;
   - dopo 2 anni prelevo $\frac{1}{3}C$.
   - la Banca corrisponde interessi che dopo il primo anno vengono aumentati di 50p.b. ogni sei mesi

   Si determini il valore di C ipotizzando che al 17/09/2021 sul conto in banca la somma accumulata sia pari a €356.000,00.

3. (punti 4) Poldo chiede un prestito a Intesa San Paolo per un prestito di €350.000. Il rimborso viene previsto con piano di ammortamento di tipo Francese ed il valore della rata $R =$€63.542 sapendo che il tasso di remunerazione è pari ad $i = 2,5\%$:

   - determinare il numero delle rate.
   - Redigere il piano di ammortamento
   - Calcolare la nuda proprietà e l'usufrutto al tempo $N - 3$ ipotizzando un tasso di mercato pari al $i = 5\%$

4. (punti 4) Tizio acquista un Tutilo di puro sconto il 17/05/2018 con scadenza 24 mesi e paga €98,10 per €100 di valore nominale.

   - Calcolare il tasso di remunerazione corrisposto da tale CTZ?
   - il 17/09/2018 il titolo veine venduto a €98,25, quanto differisce il rendimento realizzato da Tizio da quello che il titolo fornisce al nuovo acquirente il 19/01/2018

5. (punti 6) Impresa Spa ha emesso obbligazioni per un valore totale pari a €50 milioni ciascuna dal valore nominale di 2.000€ che rimborserà in un periodo massimo di 10 anni. Il tasso di remunerazione del prestito è effettuato al tasso nominale convertibile semestralmente $J(2)$ del 4%, e si prevede che il rimborso avvenga in modo progressivo, ciascun anno dei primi quattro viene rimborsato il 10% delle obbligazioni viventi dal quinto anno in poi le obbligazioni rimborsate annualmente sono in numero costante e pari allle obbligazioni viventi al quarto anno diviso il numero di periodi restanti.

   - Calcolare la vita media di un'obbligazione vivente al terzo anno
   - Calcolare la Nuda proprietà e l'Usufrutto per un'obbligazione vivente al settimo anno, ipotizzando che il tasso di mercato sia pari ad $i = 4.5\%$

6. (punti 5) Calcolare la duration di un titolo triennale emesso il 19 marzo 2018 che paga cedole semestrali corrisposte al $j(2) = 4\%$, valore nominale $K = 1000$, in data odierna

- si ipotizzi che oggi puoi disporre dei prezzi dei seguenti titoli di puro sconto:

$$\begin{aligned} Bot_{6mesi} &= 99,2 \\ Bot_{12mesi} &= 98,9 \\ Bot_{18mesi} &= 98,4 \\ Bot_{24mesi} &= 98,1 \\ BoT_{30} &= 97,5 \end{aligned}$$

- E' possibile prevedere il prezzo a cui dovrà essere venduto tale titolo il 19/09/2019, se si calcolarlo?

Soluzioni

Esercizio1

Si veda libro di testo.

Esercizio 2

Iniziamo convertendo il tasso nominale in annuo:

$$i_{quadrimestrale} = \frac{j(3)}{3} = \frac{0.045}{3} = 0.015 \longrightarrow i = (1 + i_{quadrimestrale})^3 - 1 = 0.0395$$

Scriviamo ora l'equazione del montante in funzione delle operazioni effettuate, ricordando che 50 p.b. valgono 0.005:

$$365000 = C(1+0.0395)(1+0.0445)(1+0.0495)(1+0.0545)(1+0.0595)(1+0.0645)+\frac{C}{12}s_{30|0.00165}-\frac{C}{3}(1+0.0595)(1+0.0645)$$

E sviluppando ed isolando la C si ottiene:

$$C = \frac{356000}{1.355 + 2.56 - 0.376} = 100593.39$$

Esercizio 3

Il numero delle rate nell'ammortamento francese si trova nel seguente modo:

$$n = -\frac{log(1 - \frac{Ai}{R})}{log(1 + i)} = \frac{0.148}{0.0246} = 6$$

Il piano di ammortamento si articola nel seguente modo:

t	I_k	C_k	R	D_k
0				350000
1	8750	54792	63542	295208
2	7380,2	56161,8	63542	239046,2
3	5976,155	57565,845	63542	181480,355
4	4537,00888	59004,9911	63542	122475,364
5	3061,8841	60480,1159	63542	61995,248
6	1549,8812	61992,1188	63542	0

Calcoliamo ora La Nuda proprietà e l'usufrutto al terzo anno:

$$NP_3 = 59004.9911(1 + 0.05)^{-1} + 60480.1159(1 + 0.05)^{-2} + 61992.1188(1 + 0.05)^{-3} = 165603.6$$

$$U_3 = 4537.00888(1 + 0.05)^{-1} + 3061.8841(1 + 0.05)^{-2} + 1549.8812(1 + 0.05)^{-3} = 8437.017$$

Esercizio 4

Iniziamo con il calcolare il rendimento del CTZ:

$$i_{CTZ} = (\frac{100}{98.10})^{0.5} - 1 = 0.00963$$

Il rendimento di Tizio è invece:

$$i_{Tizio} = (\frac{98.25}{98.10})^3 - 1 = 0.00459$$

Il rendimento del nuovo acquirente:

$$i_{Nuovo} = (\frac{100}{98.25})^{\frac{13}{20}} - 1 = 0.0106$$

Esercizio 5

Il numero di obbligazioni emesse è pari a $N = \frac{50MLN}{2000} = 25000$, mentre la cedola di una singola obbligazione è pari a:$0.02 \cdot 2000 = 40$. Le obbligazioni vengono ripagate in 10 anni (2500 per anno), segue che la vita media residua di una obbligazione in vita al terzo anno è:

$$e_3 = \frac{2500}{17500} \sum_{i=1}^{7} i = 0.143 \cdot 28 = 4$$

La Nuda Proprietà di un'obbligazione al settimo anno risulta pari a:

$$NP_7 = \left(\frac{2000}{1.045}\right) \cdot p_{7,8} + \left(\frac{2000}{1.045^2}\right) \cdot p_{7,9} + \left(\frac{2000}{1.045^3}\right) \cdot p_{7,10} = 1832.62$$

Notando che $p_{7,s} = \frac{1}{3}$, con $s = 8, 9, 10$.
Per l'usufrutto invece:

$$U_7 = \left(\frac{40}{1.045^{0.5}} + \frac{40}{1.045}\right) \cdot p_{7,8} + \left(\frac{40}{1.045^{0.5}} + \frac{40}{1.045} + \frac{40}{1.045^{1.5}} + \frac{40}{1.045^2}\right) \cdot p_{7,9} +$$
$$+ \left(\frac{40}{1.045^{0.5}} + \frac{40}{1.045} + \frac{40}{1.045^{1.5}} + \frac{40}{1.045^2} + \frac{40}{1.045^{2.5}} + \frac{40}{1.045^3}\right) \cdot p_{7,10} = 150.41$$

Esercizio 6

Iniziamo con il calcolare il valore della cedola: $ced = 0.02 \cdot 1000 = 20$, e sfruttiamo i prezzi dei BOT per ricavare i tassi spot:

$$i_{6mesi} = \left(\frac{100}{99.2}\right)^2 - 1 = 0.0162$$
$$i_{12mesi} = \left(\frac{100}{99.2}\right) - 1 = 0.0111$$
$$i_{18mesi} = \left(\frac{100}{99.2}\right)^{\frac{12}{18}} - 1 = 0.0108$$
$$i_{24mesi} = \left(\frac{100}{99.2}\right)^{0.5} - 1 = 0.0096$$
$$i_{30mesi} = \left(\frac{100}{99.2}\right)^{\frac{12}{30}} - 1 = 0.0101$$

E sfruttiamoli per calcolare la Duration al 19/09/2018:

$$D = \frac{0.5 \cdot 20(1.016)^{-0.5} + 20(1+0.011)^{-1} + 1.5 \cdot 20(1+0.011)^{-1.5} + 2 \cdot 20(1+0.0096)^{-2.5} + 2.5 \cdot 1020(1+0.010)^{-2.5}}{20(1.016)^{-0.5} + 20(1+0.011)^{-1} + 20(1+0.011)^{-1.5} + 20(1+0.0096)^{-2.5} + 1020(1+0.010)^{-2.5}}$$
$$= 2.407$$

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \alpha e^{(y-x)}$$

(a) Verificare se essa può essere assunta come funzione fattore di montante, ed in tale caso determinare la relazione fra il parametro ed il tasso effettivo per unità di tempo,

(b) calcolare il montante corrispondente ad un capitale iniziale C= 1000 fra 4 anni e tre mesi (assumendo il tempo in anni)

(c) calcolare la forza d'interesse e usare la forza d'interesse per verificare se il regime è scindibile.

SOLUZIONE:

Essendo

(a) $f(x,x) = 1 \rightarrow \alpha = 1$

(b) $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha e^{(y-x)} > 0 \ \forall y > x$ solo nel caso $\alpha > 0$,

In tal caso, posto $t = (y-x)$ si ha il regime traslabile $r(t) = \alpha e^t$, e per $t = y-x = 1$ si ha $r(1) = 1+\alpha e$ per cui il tasso effettivo per unità di tempo è pari a $i = \alpha e = e$, da cui si deduce il significato finanziario del parametro α. Il regime di sconto ad esso coniugato è dato da $v(t) = \frac{1}{1+\alpha e^t}$. Assumendo il tempo in anni, il valore attuale si ottiene da

$$C = 1000e^{4.25} = 70.105,4$$

Calcolo la forza d'interesse

$$\begin{aligned}
\delta(x,y) &= \frac{1}{r(x,y)}\frac{\partial}{\partial y}r(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\ln r(x,y) \\
\delta(x,y) &= \frac{\alpha e^{(y-x)}}{\alpha e^{(y-x)}} = 1
\end{aligned}$$

Troviamo che non dipende da x quindi il regime e' scindibile.

Ricordiamo il teorema su *Scindibilità e forza d'interesse: Un regime* $r(x,y)$ *è scindibile* $\Leftrightarrow$ *la forza d'interesse* $\delta(x,y)$ *è indipendente da* x

- Dimostrazione:
  (*Necessarietà*)*.Sappiamo che* $r(x,y) = r(x,\tau)r(\tau,y)$ e facciamo i logaritmi:

$$\ln r(x,y) = \ln r(x,\tau) + \ln r(\tau,y) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\ln r(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\ln r(x,\tau) + \frac{\partial}{\partial y}\ln r(\tau,y) \\
\delta(x,y) &= 0 \qquad\qquad + \quad \delta(\tau,y)
\end{aligned}$$

la forza d'interesse non dipende dal primo argomento e abbiamo dimostrato: $\delta(x,y) = \delta(\tau,y)$.
(*Sufficienza*) per ipotesi è

$$\delta(x,y) = \delta(\tau,y)$$

da

$$\begin{aligned}
\int_x^y \delta(x,\xi)d\xi &= \int_x^\tau \delta(x,\xi)\,d\xi + \int_\tau^y \delta(x,\xi)\,d\xi \\
&= \int_x^\tau \delta(x,\xi)\,d\xi + \int_\tau^y \delta(\tau,\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

passando all'esponenziale:

$$e^{\int_x^y \delta(x,\xi)d\xi} = e^{\int_x^\tau \delta(x,\xi)d\xi} \cdot e^{\int_\tau^y \delta(\tau,\xi)d\xi}$$

$$r(x,y) = r(x,\tau) \cdot r(\tau,y) \tag{2}$$

2. (punti 5) L'impresa Cracco ha depositato in Banca €150.000 su un conto di risparmio che viene remunerato a un tasso pari al 3%. L'impresa Cracco versa mensilmente i suoi profitti che sono in misura dell'1% del capitale versato:

   - si ipotizzi che la banca remuneri i pagamenti mensili a un tasso nominale convertibile 12 volte nell'anno $j(12) = 3.5\%$
   - che la banca debba ritirare ogni 6 mesi un importo pari al 10% di C per far fronte alle spese periodiche.
   - che dopo 12 mesi di operatività il versamento mensile diventi pari al 2% di C.

     (a) Calcolare quanto troverà Cracco sul suo conto di risparmio dopo 4 anni.

     (b) dato il montante calcolato in a) si ipotizzi che Cracco abbia versato €150.000 al tempo 0 e 4 importi alla fine di ogni anno pari al 15% di C. Determinare il TIR realizzato

   (a) SOLUZIONE
   Calcolo il tasso annuo equivalente al $j(12)$ e il corrispondente tasso mensile $i_{12} = \frac{0.035}{12} = 0.00292$. e il tasso annuo equivalente

$$i = (1 + i_{12})^{12} - 1 = (1 + 0.00292)^{12} = 0.0356$$

   e il tasso semestrale equivalente al tasso del 3% :

$$i_2 = (1 + 0.03)^{0.5} - 1 = 0.01489$$

   (b) L'operazione effettuata è la seguente

$$\begin{aligned} & 150000 \cdot (1+0.03)^4 + (0.01 \cdot 150000) \cdot \frac{(1.00292)^{12} - 1}{0.00292} \cdot (1.03)^3 + (0.02 \cdot 150000) \cdot \frac{(1.00292)^{36} - 1}{0.00292} \\ & -0.10 \cdot 150000 \cdot \frac{(1.01489)^8 - 1}{0.01489} \\ M \quad = \quad & +3.025\,2 \times 10^5 - 1.264\,4 \times 10^5 = 176.080 \end{aligned}$$

   (c)

$$150000 \cdot (1+i)^4 + 0.15 \cdot 150000 \cdot \frac{(1+i)^4 - 1}{i} = 176080$$

3. (punti 4) Marco deve rimborsare un prestito di €150.000 con rate costanti quadrimestrali pari a 18.000 ad un tasso del 4% :

   - calcolare il numero delle rate;
   - nel caso in cui il numero delle rate non risultasse intero si ipotizzi di pagare il residuo al tempo n+1
   - redigere il piano di ammortamento e calcolare la nuda proprietà e l'usufrutto dopo il primo anno ipotizzando il tasso di valutazione sia uguale al 6%

   (a) SOLUZIONE:
   Calcolo prima il tasso equivamlente quadrimestrale:

$$i_3 = (1 + 0.04)^{1/3} - 1 = 0.0132$$

Figure 1:

Ricordando la formula

$$\begin{aligned} A &= R \cdot \frac{1-v^n}{i} \rightarrow n = \frac{\ln(1-\frac{A}{R}i)}{\ln(v)} \\ n &= \frac{0.11}{0.013} = 8.39 \end{aligned}$$

ci vogliono 8 rate quarimestrali, quindi due anni e mezzo e una frazione di rata pari a 0.39. Per determinare l'importo da corrispondere al 9 quadrimestre, come richiesto:

$$K = 150000 - 18000 \cdot \frac{1-(1.0132)^{-8}}{0.0132} = 14190$$

questo importo lo capitalizzo per 9 quadrimestri per ottenere $R_9 = 14190 \cdot (1.0132)^9 = 15968$. Redigo ora il piano di ammortamento

t	D	C	I	R
0	150.000			
1	133.980	16020	1980	18000
2	117.749	16231	1769	18000
3				18000
4				18000
5				18000
6				18000
7				18000
8				18000
9				15602

(b) Calcolo la Nuda Propietà e l'Usufrutto al tasso $i = 6\%$. Essendo pagamenti quadrimestrali :

$$i_3 = (1.06)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0.0196$$

$$\begin{aligned} U &= 1.337 \cdot (1.0196)^{-1} + 1117 \cdot (1.0196)^{-2} + \\ &\quad 894 \cdot (1.0196)^{-3} + 669 \cdot (1.0196)^{-4} + 440 \cdot (1.0196)^{-5} + 202 \cdot (1.0196)^{-6} \\ &= 3117.3 \\ NP &= 16663 \cdot (1.0196)^{-1} + 16883 \cdot (1.0196)^{-2} + \\ &\quad 17106 \cdot (1.0196)^{-3} + 17331 \cdot (1.0196)^{-4} + 17560 \cdot (1.0196)^{-5} + 15760 \cdot (1.0196)^{-6} \end{aligned}$$

4. (punti 4) Il Ministero dell'Economia e delle Finanze comunica i risultati dell'emissione della prima tranche del nuovo BTP a 30 anni. Il titolo ha scadenza 1° settembre 2050, godimento 1° settembre 2020 e tasso annuo 2,45%, pagato in due cedole semestrali. L'importo emesso è stato pari a 7 miliardi di euro. Il titolo è stato collocato al prezzo di €99,280 per ogni €100 di valore.

   - Calcolare il rendimento effettivo di tale obbligazione qualora venisse acquistata il 1/09/2020 e tenuta fino al 1 settembre 2050
   - Sapendo che il taglio di ogni BTP è pari a €1.000 calcolare il numero di obbligazioni emesse. Tali obbligazioni verranno rimborsate con estrazione a sorte dopo i primi 15 anni con il seguente piano di estrazione

t	%N
15	30
20	25
25	20
30	25

;

   - Calcolare la vita media di un'obbligazione vivente al 20esimo anno
   - Ipotizzare di voler calcolare il prezzo di un'obbligazione vivente al 20 esimo nel caso in cui debba fornire un rendimento effettivo del 2%

SOLUZIONE:

La cedola corrisposta è pari a $C = \frac{J(2)}{2} \cdot 1000 = \frac{0.0245}{2} \cdot 1000 = 12.25$

Per calcolare il rendimento effettivo devo risolvere la seguente equazione

$$\begin{aligned} 992,80 &= 12.25 \cdot a_{60\rceil TIR_2} + 1000 \cdot (1+TIR_2)^{-60} \\ &= 12.25 \cdot \frac{1-(1+TIR_2)^{-60}}{TIR_2} + 1000 \cdot (1+TIR_2)^{-60} \\ TiR_2 &\simeq 0.015 \end{aligned}$$

Per calcolare la vita media dell'obbligazione devo cacolare le probabilità di estrazione al 20esimo anno. Il numero di obbligazioni emesse è pari ad

$$N = \frac{CC}{C} = \frac{7.000.000.000}{1.000} = 7 milioni$$

divise a partire dal momento del rimborso (dal 15esimo anno in poi.

t	N_k	L_K
0	0	
15	2.100.000	6.900.000
20	1.7500.000	3.150.000
25	1.400.000	1.750.000
30	1.750.000	0

pertanto

k	$p_{20,k+1}$	e_k
25	$\frac{1.400}{3.150} = 0.44$	5
30	$\frac{1.759}{3.150} = 0.56$	10

la vita media è

$$\overline{e}_1 = 10 \cdot 0.56 + 5 \cdot 0.44 = 7.75$$

Il prezzo di un'obbligazione vivente al 20esimo che paga un rendimento effettivo del 2% si ottiene:

$$\begin{aligned} P &= \left[12.25 \cdot \frac{1-(1.0097)^{-20}}{0.0097} + 1000 \cdot (1.02)^{-10}\right] \cdot 0.44 + \left[12.25 \cdot \frac{1-(1.0097)^{-10}}{0.0097} + 1000 \cdot (1.02)^{-5}\right] \cdot 0.56 \\ &= 458.52 + 572.26 = 1030.8 \end{aligned}$$

5. L'obbligazione ENI che scade il 1/07/2022 e paga una cedola semestrale al tasso $j(2) = 3.25\%$ viene venduta oggi al prezzo 111,5:

   (a) calcolare il TIR di questa obbligazione

   (b) calcolare il corso secco e il rateo oggi

      - si ipotizzi che il 1/gennaio 2020 si disponeva dei seguenti fattori di sconto, $v(0,t)$:

   -
$$
\begin{aligned}
Bot_6 &= 0,992 \\
BOT_{12} &= 0,988 \\
Ctz_{18} &= 0,981 \\
CtZ_{24} &= 0,976 \\
CtZ_{30} &= 0,97 \\
CtZ_{36} &= 0,96
\end{aligned}
$$

   - calcolare la duration di Macauley il 1/1/2020
   - calcolare il prezzo che tale obbligazione dovrebbe avere il 1/7/2021 sulla base della struttura per scadenza vigente il 1/1/2020

SOLUZIONE: Il titolo paga cedole pari a $i_2 \cdot 100 = \frac{0.0325}{2} \cdot 100 = 1.625$

1.625	1.625	1.625	1.625	101.625
__|__	__|__	__|__	___|	___|
1/7/2020	1/1/2021	1/7/2021	1/01/2022	1/07/2022

calcolo il TIR:

$$
\begin{aligned}
111.5 - Rateo &= 1.625 \cdot a_{5\rceil TIR_2} + 100 \cdot (1 + TIR_2)^{-5} \\
&= 1.625 \cdot \frac{1 - (1 + TIR_2)^{-5}}{TIR_2} + 100 \cdot (1 + TIR_2)^{-5} \\
TiR_2 &\simeq 0.015
\end{aligned}
$$

Il corso secco si calcola

$$
\begin{aligned}
Corso\sec co &= P_{telquel} - Rateo \\
& 111.5 - \frac{17}{180} \cdot 1.625 \\
&= 111.35
\end{aligned}
$$

Calcolo la Duration utilizzando la struttura per scadenza

$$
D(1/1/2020) = \frac{0.5 \cdot 1.625 \cdot 0.992 + 1 \cdot 1.625 \cdot 0.988 + 1.5 \cdot 1.625 \cdot 0.981 + 2 \cdot 1.625 \cdot 0.97 + 2.5 \cdot 101.625 \cdot 0.96}{1,625 \cdot 0.992 + 1.625 \cdot 0.988 + 1.625 \cdot 0.981 + 1.625 \cdot 0.97 + 101.625 \cdot 0.96} = 2.42
$$

Calcolo il prezzo al 1/7/2021 dopo aver calcolato i tassi forward:

$P_{1/7/21}$	1.625	101.625
__|____	___|____	___|__
1/7/2021	1/01/2022	1/07/2022

$$
P = 1.625 \cdot (1 + \widetilde{i}_{18,/24})^{-0.5} + 101.625 \cdot (1 + \widetilde{i}_{18,30})^{-1}
$$

per calcolare il tasso forward al 1/7/2021 utilizzo le funzioni di sconto e calcolo i fattori di sconto forward

$$
\begin{aligned}
v\,(18,24) &= \frac{0.976}{0.981} = 0.9949; \\
v\,(18,30) &= 0.98878
\end{aligned}
$$

$$P = 1.6255 \cdot 0.9949 + +101.625 \cdot 0.98878 = 102.1$$

6. Il candidato descriva come

   - il prezzo di un titolo obbligazionario dipenda dal numero di cedole
   - misurare la volatilità del prezzo di un titolo rispetto a variazioni del tasso d'interesse (utilizzare la duration modificata e la convexity)

   SOLUZIONE:

   Teorema 5.1. A*nalizzando il corso secco* $P(n)$ *del titolo in funzione del numero* n *delle rate, ed a parità di altre condizioni, ossia fissati* K, C*, ed il tasso implicito (tasso di mercato)* j*, si vede che il prezzo* $P(n)$ *può aumentare o diminuire, a seconda delle condizioni di mercato. Posto* $P(n+1)$ *il corso secco del titolo avente* $(n+1)$ *scadenze otteniamo:*

$$\begin{array}{rcl} P(n+1) & < & P(n) \quad se \quad P < K \quad (\ j > i\ ) \\ P(n+1) & = & P(n) \quad se\ P = K \quad (\ j = i\ ) \\ P(n+1) & > & P(n) \quad se\ P > K \quad (\ j < i\ ) \end{array}$$

   Infatti abbiamo

$$\begin{array}{rcl} P(n) & = & Cv + \cdots + Cv^n + Kv^n \\ P(n+1) & = & Cv + \cdots + Cv^n + Cv^{n+1} + Kv^{n+1} \end{array} \tag{3}$$

   ed esplicitando il secondo prezzo in funzione del primo:

$$\begin{array}{rcl} P(n+1) & = & P(n) - Kv^n + Cv^{n+1} + Kv^{n+1} \\ & = & P(n) + Kv^n (v-1) + Cv^{n+1} \\ & = & P(n) - Kv^n \cdot \dfrac{j}{1+j} + Cv^{n+1} \\ & = & P(n) - Kv^{n+1} \cdot j + Cv^{n+1} \\ & = & P(n) + v^{n+1} (C - Kj) \qquad\qquad [C = iK] \\ & = & P(n) + v^{n+1} K (i - j) \end{array} \tag{4}$$

   da cui il risultato.

   Inoltre, essendo

$$P = iKa_{\overline{n}|j} + \frac{K}{(1+j)^n} \tag{5}$$

esiste il limite del prezzo P per $n \to \infty$, dai limiti

$$a_{\overline{\infty}|j} = \frac{1}{j} \quad \text{e} \quad \frac{1}{(1+j)^n} \to 0$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} P = P_\infty = \frac{iK}{j} = \frac{C}{j} \tag{6}$$

Si è così ottenuto che per $j > i$ (rispettivamente $j < i$) al crescere del numero di rate il prezzo diminuisce (rispettivamente cresce) e tende al valore limite $P_\infty = \frac{C}{j}$

Consideriamo

$$V_0(j) = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+j)^{-t_k} \tag{7}$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dj} V_0(j) & = & -\dfrac{1}{(1+j)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+j)^{-t_k} \\ & = & -\dfrac{1}{(1+j)} D(j) V_0(j) \end{array}$$

si introduce il rapporto:

$$\frac{V_0'(j)}{V_0(j)} = -\frac{1}{(1+j)} D(j) = D_M(j) \tag{8}$$

Per stimare l'effettiva variazione di prezzo dovuta ad una variazione Δj del tasso questo nuovo indice viene approssimato sostituendo la derivata della funzione con il suo rapporto incrementale, o equivalentemente, considerando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione Valore

$$V_0(j+\Delta j) = V_0(j) + V_0'(j)\,\Delta j + t.o.s.$$

approssimato ai termini del primo ordine (e trascurando quelli di ordine superiore $t.o.s.$)

$$V_0(j+\Delta j) \simeq V_0(j) + V_0'(j)\,\Delta j$$

$$\frac{V_0(j+\Delta j) - V_0(j)}{V_0(j)} \simeq \frac{V_0'(j)}{V_0(j)}\Delta j$$

e dalla (8) otteniamo

$$\frac{V_0(j+\Delta j) - V_0(j)}{V_0(j)} \simeq -\Delta j \frac{D(j)}{1+j}$$

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} \simeq \Delta j \cdot D_M(j) \tag{9}$$

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} \simeq -\Delta j \cdot D(j) \tag{10}$$

Si nota che in ogni caso ad aumenti del tasso implicito, e quindi variazioni $\Delta j > 0$, corrisponde una diminuzione del prezzo, o valore attuale V_0 (mentre ad una diminuzione del tasso, $\Delta j < 0$, il prezzo aumenta).

$$V_0(j+\Delta j) = V_0(j) + V_0'(j)\,\Delta j + \frac{1}{2}V_0''(j)\,\Delta j^2 + t.o.s.$$

si deduce

$$\frac{V_0(j+\Delta j) - V_0(j)}{V_0(j)} \simeq \frac{V_0'(j)}{V_0(j)}\Delta j + \frac{1}{2}\frac{V_0''(j)}{V_0(j)}\Delta j^2 \tag{11}$$

in cui

$$\frac{V_0'(j)}{V_0(j)} = -\frac{1}{(1+j)} D(j)$$

e, derivando ulteriormente $V_0'(j)$:

$$\begin{aligned}
V_0''(j) &= \frac{d}{dj}[\,-\frac{1}{(1+j)}\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+j)^{-t_k}\,] \\
&= \frac{1}{(1+j)^2}\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+j)^{-t_k} - \frac{1}{(1+j)}\sum_{k=1}^{n}(-t_k^2) R_k (1+j)^{-t_k-1} \\
&= \frac{1}{(1+j)^2}\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+j)^{-t_k} + \frac{1}{(1+j)^2}\sum_{k=1}^{n} t_k^2 R_k (1+j)^{-t_k} \\
&= \frac{1}{(1+j)^2}\sum_{k=1}^{n}(t_k + t_k^2) R_k (1+j)^{-t_k}
\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{V_0''(j)}{V_0(j)} &= \frac{1}{(1+j)^2}\frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k + t_k^2) R_k (1+j)^{-t_k}}{V_0(j)} \\
&= \frac{1}{(1+j)^2} C(j)
\end{aligned}$$

in quanto si definisce *convessità* di V, o *Convexity*, il rapporto

$$C(j) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k + t_k^2)R_k\,(1+j)^{-t_k}}{V_0\,(j)}$$

in tal modo l'espressione in (11) diviene:

$$\frac{V_0\,(j+\Delta j) - V_0\,(j)}{V_0\,(j)} \simeq -D\,(j)\,\frac{\Delta j}{(1+j)} + \frac{1}{2}C(j)\frac{\Delta j^2}{(1+j)^2}$$

Si ha:

$$V_0\,(j+\Delta j) \simeq V_0\,(j) + V_0\,(j)\,[\;-D\,(j)\,\frac{\Delta j}{(1+j)} + \frac{1}{2}C(j)\frac{\Delta j^2}{(1+j)^2}\;]$$

1. (punti 6) (T) Il candidato descriva i regimi finanziari

   (a) dia la definizione formale;
   (b) confronti analiticamente le leggi di sconto;
   (c) confronti graficamente le leggi di sconto.
   (d) descriva i tassi equivalenti
   (e) Descriva il tasso nominale convertibile m volte nell'anno.

   SOLUZIONE:

   Ogni funzione $r(t)$ che soddisfi le proprietà

$$\begin{array}{lrcl} 1) & r(0) & = & 1 \\ 2) & r'(t) & \geq & 0 \end{array}$$

   può essere assunta come fattore di montante e definisce una "legge di capitalizzazione".

$r(t)$ può essere utilizzata da un individuo per rappresentare l'equivalenza finanziaria fra due importi monetari esigibili in tempi diversi.

Si definisce "regime di capitalizzazione" una famiglia di funzioni fattore di montante che dipendono da uno o più parametri.

La funzione $r(t)$ può essere espressa anche in funzione di $t = (y - x)$, mantenendo l'intervallo (x, y), in cui x è pensato come istante iniziale e y istante finale, introducendo funzioni a due tempi:

$$r(x, y)$$

e soddisfa

$$r(x, x) = 1 \tag{1}$$

La funzione $r(x, y)$ rappresenta il montante in y considerato equivalente ad un capitale unitario in x, e relativamente al capitale iniziale di importo C il montante è dato da

$$M(x, y) = Cr(x, y) \tag{2}$$

2) *monotonia rispetto ad* y:

$$y_1 < y_2 \implies r\left(x, y_1\right) \leq r\left(x, y_2\right) \qquad \forall x \text{ fissato, } x < y_1$$

ed una condizione sufficiente affinchè si verifichi (e con la disuguaglianza forte) è che sia

$$\frac{\partial}{\partial y} r(x, y) > 0 \qquad \forall y > x$$

È chiaro che data una legge di capitalizzazione $r(t)$, possiamo sempre scriverla come funzione a due tempi, infatti è sufficiente sostituire $(y - x)$ al posto di t. e quindi rappresenta una legge.

Un regime finanziario di capitalizzazione $r(x, y)$ si dice che è traslabile (o uniforme) se la funzione di montante soddisfa

$$r(x, y) = r(x + \tau, y + \tau) \qquad \forall \tau \tag{3}$$

Si ha inoltre che vale il seguente
In questo caso supponiamo fissato un importo M al tempo y e vogliamo determinare una funzione che fornisca l'importo (che indichiamo con C) al tempo x $(x < y)$ che riteniamo "*equivalente*" ad M in y, del tipo così che si possa scrivere

$$C_x = Mv(x, y) \tag{4}$$

La funzione $v(x,y)$ è detta funzione fattore di sconto o fattore di attualizzazione a due tempi. Essa rappresenta il valore in x considerato equivalente ad un valore (montante) unitario in y

Si dice che un regime di attualizzazione è traslabile, o uniforme, se la legge di sconto soddisfa

$$v(x,y) = v(x+\tau, y+\tau) \qquad \forall \tau \tag{5}$$

Si ha inoltre che vale il seguente
Possiamo allora assumere, considerando regimi traslabili, che la funzione di attualizzazione sia rappresentata da una funzione ad un tempo (durata dell'ope-razione finanziaria) $t = (y - x)$, che indichiamo con $v(t)$, e le condizioni date sopra, le (**??**) e (**??**) (o la (**??**)) si traducono nelle seguenti condizioni che deve soddisfare $v(t)$:

- $v(0) = 1$
- $\frac{d}{dt}v(t) = v'(t) < 0$

Si noti che mentre la funzione di capitalizzazione $r(t)$ è crescente (all'aumentare della durata finanziaria richiediamo che il montante aumenti), la funzione di sconto $v(t)$ è decrescente, ha una derivata negativa rispetto al tempo (o durata finanziaria), in quanto (intuitivamente) all'aumentare della durata richiediamo che il valore attuale diminuisca.
È chiaro che per essere entrambi d'accordo due controparti usano regimi di attualizzazione e di sconto che soddisfano le relazioni

$$\begin{aligned} Cr(x,y)v(x,y) &= C \\ Mv(x,y)r(x,y) &= M \end{aligned}$$

ossia vale

$$r(x,y)v(x,y) = 1 \qquad \forall x \le y \tag{6}$$

Diamo così la seguente **definizione**: *Due regimi finanziari, di capitalizzazione e di attualizzazione, $r(x,y)$ e $v(x,y)$, si dicono coniugati se soddisfano*

$$r(x,y)v(x,y) = 1 \qquad \forall x \le y$$

In termini di funzioni ad un tempo avremo ovviamente che due regimi $r(t)$ e $v(t)$ sono coniugati (o definiscono leggi coniugate) se vale

$$r(t)v(t) = 1 \qquad \forall t$$

così che è sempre possibile ottenere una funzione, nota l'altra, passando alla funzione reciproca:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{r(t)} \\ r(t) &= \frac{1}{v(t)} \end{aligned}$$

Le leggi finanziarie più usate nella matematica finanziaria si basano sui fattori di montante appartenenti a tre diverse famiglie di funzioni:di tipo affine (o lineare, RIS); di tipo esponenziale (RIC); di tipo iperbolico (RIA) che rappresentano modi diversi di calcolare gli interessi.

RIS è caratterizzato da una funzione fattore di montante di tipo affine:

$$r(t) = 1 + \alpha t \qquad \alpha > 0, \quad t \ge 0 \tag{7}$$

2. (punti 5)Il signor Verdi h chiesto un prestito di €30.000 che rimborserà in tre anni con rate uguali pagate semestralmente ad un tasso $i = 3\%$. Dopo il pagamento della quarta rata l'intermediario finanziario modifica i termini del contratto e chiede che il rimborso del restante prestito avvenga ad un tasso del 5% sempre con rate costanti. Il candidato:

   (a) calcoli la rata corrisposta nei primi due anni;

   (b) rediga il piano di rimborso

   (c) la nuova rata corrisposta nel terzo anno

(d) il TIR effettivo di tale piano di rimborso
SOLUZIONE:Calcolo il tasso equivalente semestrale:

$$i_2 = (1.03)^{0.5} - 1 = 0.014889$$

La rata semestrale che dovrà versare per sei semestri è pari a

$$R = \frac{30000}{a_{6\rceil 0.014889}} = 5263{,}77$$

Redigo il piano di ammortamento

t	Rk	Ck	Ik	Dk
0				30000
0,5	5263,77	4817,1	446,67	25182,9
1	5263,77	4888,822	374,9482	20294,08
1,5	5263,77	4961,611	302,1585	15332,47
2	5263,77	5035,485	228,2851	10296,98
2,5	5263,77	5110,458	153,3118	5186,524
3	5263,77	5186,548	77,22215	-0,02426

- dopo il pagamento della quarta rata il Debito residuo è pari a 10.296,91 calcolo la nuova rata

$$R_1 = \frac{10296,91}{a_{2\rceil 0.0247}} = 5339,94$$

- calcolo il TIR effettivo:

$$30000 = R_1 \cdot a_{6\rceil i_2} + R_2 \cdot a_{2\rceil i_2} \cdot (1 + i_2)^{-4}$$

3. (punti 4) Rosa acquista un macchinario dal costo di €50.000 più IVA al 22%. Il pagamento può essere efftuato scegliendo fra due opzioni

(a) versando €20.000 subito e firmando un impegno di pagamento di importo X da onorare tra 9 mesi ad un tasso di valutazione dell'8% nel RIS.

(b) versando due queste uguali, di importo Y, la prima ora e l'altra fra nove mesi al tasso di valutazione i=7% nel RIS

- Determinare l'importo X
- Determinare l'importo Y
- Quale delle due forme di pagamento si preferisce in base al criterio del REA ipotizzando un tasso del 5%
- Determinare, se esiste , il tasso di svolta rispetto al quale si inverte la preferenza

SOLUZIONE: Il costo del macchinario è dato da

$$C = 50000 \cdot 1.22 = 61000$$

pagando una quota oggi ed una fra nove mesi determino l'importo X:

$$X = (61000 - 20000) \cdot \left(1 + 0.08 \cdot \frac{9}{12}\right) = 43460$$

nell'opzione 2 invece

$$\begin{aligned} 61000 &= Y + \frac{Y}{1 + 0.07 \cdot \frac{9}{12}} \\ &= Y\left(1 + \frac{1}{1 + 0.07 \cdot \frac{9}{12}}\right) = 1.9501Y \\ Y &= \frac{61000}{1.950} = 31282 \end{aligned}$$

Calcolo ora il REA delle due opzioni:

$$\begin{aligned} REA_a &= 61000 - 20000 - 43460 \cdot (1.05)^{-\frac{9}{12}} = -898.43 \\ REA_B &= 61000 - 31282 - 31282 \cdot (1.05)^{-\frac{9}{12}} = -440,0 \end{aligned}$$

si preferisce l'opzione B

Calcolo il tasso di svolta:

$$\begin{aligned} 61000 - 20000 - 43460 \cdot (1+i)^{-\frac{9}{12}} &= 61000 - 31282 - 31282 \cdot (1+i)^{-\frac{9}{12}} \\ 11282 - 12178 \cdot (1+i)^{-\frac{9}{12}} &= 0 \\ i &= \left(\frac{11282}{12178}\right)^{-\frac{12}{9}} - 1 = 0.107 \end{aligned}$$

Possiamo verificare che sia davvero un tasso di svolta:

$$\begin{aligned} 61000 - 20000 - 43460 \cdot (1.12)^{-\frac{9}{12}} &= 1081.3 \\ 61000 - 31282 - 31282 \cdot (1.12)^{-\frac{9}{12}} &= 985.00 \end{aligned}$$

4. (punti 4) Sergio compra un CTZ oggi al prezzo P=980, dopo 8 mesi rivende il titolo al prezzo $P_1 = 989,0$ alla Banca UBI. Determinare:

   (a) il rendimento atteso oggi da Sergio

   (b) il rendimento realizzato da Sergio tra 8 mesi

   (c) il rendimento atteso da UBI banca

   Calcolo il rendimento atteso da Sergio al momento dell'acquisto

$$\begin{aligned} 980 \cdot (1+i)^2 &= 1000 \\ i &= \left(\frac{1000}{980}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.0105 \end{aligned}$$

   Dopo 8 mesi

$$\begin{aligned} 980 \cdot (1+i)^{\frac{8}{12}} &= 989 \\ i &= \left(\frac{989}{980}\right)^{\frac{12}{8}} - 1 = 0.0138 \end{aligned}$$

   UBI realizza

$$\begin{aligned} 989 \cdot (1+i)^{\frac{16}{12}} &= 1000 \\ i &= \left(\frac{1000}{989}\right)^{\frac{12}{16}} - 1 = 0.0083 \end{aligned}$$

5. ENI ha emesso in data 1 Febbraio 2014, 50.000 obbligazioni ciascuna di valore nominale K=€2.000. Tali obbligazioni pagano una cedola annuale sulla base del tasso $j(4) = 4\%$ e verrano rimborsate in un arco temporale di 6 anni in coincidenza della data di emissione, con il seguente schema:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{5}N$$

nessuna obbligazione il quarto anno e le restanti distribuite in proporzione 2/3 e 1/3 nei restanti anni .

- Calcolare la vita media dell'obbligazione al 2 Febbraio 2015.
- Calcolare il TIR medio di un'obbligazione ancora in vita il 2 Febbraio 2018 che viene venduta a €1980.

- Calcolare la nuda proprietà e l'usufrutto dell'obbligazione ancora in vita al 2 Febbraio 2018 ipotizzando che il tasso di mercato j sia del 5%.

6. Si Calcoli la duration dell'obbligazione ENI illustrata nell'esercizio precedente il 1/2/2017:

   - si ipotizzi che il 1/2/2017 si disponga dei prezzi di titoli di puro sconto con le seguenti scadenze $P(0,t)$:

$$\begin{aligned} CTZ_1 &= 992 \\ CTZ_2 &= 930 \\ Ctz_3 &= 900 \end{aligned}$$

   - Si calcoli il prezzo tel quel dell'obbligazione il 15 Marzo 2019 ipotizzando un tasso di rendimento del 3.5%

7. (T) Il candidato descriva gli ammortamenti distinguendo tra ammortamento progressivo e non:

   (a) descriva l'equivalenza tra le tre condizioni di chiusura di un piano di ammortamento

   (b) descriva la formula di Makeham, spiegando a cosa serve e se puo' essere utilizzata per tutti i tipi di ammortamento

SOLUZIONI ALTRI ESERCIZI

ESERCIZIO 5

Seguendo lo schema di rimborso delle obbligazioni si ottiene che:

- Nei primi 3 anni, in ciascun anno vengono rimborsate:

$$N_1 = \frac{1}{5} 50000 = 10000 \tag{1}$$

- le 20000 obbligazioni vengono rimborsate negli ultimi 2 anni (nel quarto anno non viene rimborsata nessuna obbligazione, dunque si ha:

$$\begin{aligned} N_5 &= \frac{2}{3} 20000 = 13333 \\ N_6 &= \frac{1}{3} 20000 = 6667 \end{aligned} \tag{2}$$

Dunque la vita media di un'obbligazione al 2 Febbraio 2015 (quindi dopo il primo "round" di rimborso) sarà pari a:

$$VM = 1\frac{10000}{40000} + 2\frac{10000}{40000} + 3\frac{0}{40000} + 4\frac{13333}{40000} + 5\frac{6667}{20000} = 3,75 \approx \textit{3 anni e 9 mesi.} \tag{3}$$

Il TIR medio di un'obbligazione ancora in vita al Febbraio 2018 si ottiene facendo la media ponderata dei due TIR possibili in caso di rimborso dopo un anno o dopo due anni:

$$\begin{aligned} 1980 &= 2081,21(1 + TIR_1)^{-1} \\ 1980 &= 81,21(1 + TIR_2)^{-1} + 2081,21(1 + TIR_2)^{-2} \end{aligned} \tag{4}$$

ricordando che le cedole annuali dell'obbligazione sono pari a:

$$C = 2000((1 + \frac{j(4)}{4})^4 - 1) = 81,21 \tag{5}$$

Il TIR medio è dunque pari a:

$$TIR = \frac{2}{3}TIR_1 + \frac{1}{3}TIR_2 = \frac{2}{3}0,051 + \frac{1}{3}0,046 = 0,0493 \tag{6}$$

La NP e L'U sono dati dall'attualizzazione rispettivamente di quote capitale e interessi dell'obbligazione, dunque per avere i valori dell'obbligazione ancora in vita al 2 Febbraio 2018 bisogna farne un valore atteso:

$$\begin{aligned} NP &= \frac{2}{3}2000(1 + 0,05)^{-1} + \frac{1}{3}2000(1 + 0,05)^{-2} = 1269,84 + 604,68 = 1874,52 \\ U &= \frac{2}{3}81,21(1 + 0,05)^{-1} + \frac{1}{3}(81,21(1 + 0,05)^{-1} + 81,21(1 + 0,05)^{-2}) = 101,90 \end{aligned} \tag{7}$$

ESERCIZIO 6

Ottenendo i fattori di sconto utilizzando i prezzi degli Zero Coupon Bond con la relazione $v(t, s) = P(t, s)/K$ possiamo calcolare la Duration dell'obbligazione al 1/2/2017 (supponendo che sopravviva fino all'ultimo anno):

$$\begin{aligned} D_{1/2/2017} &= \frac{1 \cdot 81,21(0,992) + 2 \cdot 81,21(0,930) + 3 \cdot 2081,21(0,900)}{81,21(0,992) + 81,21(0,930) + 2081,21(0,900)} \\ &= 2,88 \approx \textit{2 anni, 10 mesi e 17 giorni.} \end{aligned} \tag{8}$$

Il prezzo tel quel dell'obbligazione è dato dalla somma del rateo di interessi e del corso secco. Utilizzando lo standard che prevede un anno composto da 12 mesi da 30 giorni, il rateo di interessi è pari a:

$$R = 81,21\frac{44}{360} = 9,93 \tag{9}$$

Mentre il corso secco si ottiene con:

$$CS = 2081,21(1+0,035)^{-\frac{316}{360}} = 2019,30 \tag{10}$$

Quindi il prezzo tel quel al 15 Marzo 2019 sarà pari a:

$$P_{telquel} = 2019,30 + 9,93 = 2029,23 \tag{11}$$

ESERCIZIO 7

Vedi manuale.

1. (T) Cose è la curva per scadenza dei tassi d'interesse (curva dei tassi spot).

   a) come si costruisce?

   b) che strumenti mi servono per determinare i tassi spot?

   c) descrivere i tassi forward

   d) descrivere la relazione esistente tra tassi spot e forward

   d) cos'è la proprietà di scindibilità e a cosa serve?

2. Rosa compra un Titolo zero coupon il 28/6/2019 con scadenza 18 mesi e paga €97,10 per €100 di valore nominale.

   (a) Calcolare il tasso a scadenza corrisposto da tale titolo?

   (b) il 5/12/2019 il titolo viene venduto a Pippo ad €98,70 che rendimento realizza Pippo?

   (c) qual'e' il rendimento effettivo realizzato da Rosa; e' maggiore o minore del rendimento all'emissione?

   Soluzione

   (a) Tasso a scadenza corrisposto :

   $$i_{0,18m} = \left(\frac{100}{97.10}\right)^{\frac{12}{18}} - 1 = 0.01981$$

   (b) all'acquisto Pippo si impegna a realizzare il seguente rendimento

   $${}_{5/12/2019}i = \left(\frac{100}{98.70}\right)^{\frac{365}{388}} - 1 = 0.012386$$

   (c) Il rendimento realizzato da Rosa

   $${}_{5/12/2019}i(211 giorni) = \left(\frac{98.70}{97.10}\right)^{\frac{365}{211}} - 1 = 0.0286$$

3. La Dunlop ha emesso obbligazioni per un valore totale pari a €200 milioni ciascuna dal valore nominale di 10.000€ che rimborserà in un periodo massimo di 6 anni. Il tasso di remunerazione del prestito è effettuato al tasso nominale convertibile semestralmente del 4%, e si prevede che il rimborso avvenga in modo progressivo, ciascun anno dei primi quattro viene rimborsato il 10% delle obbligazioni le restanti divise equamente nei successivi due anni .

   - Calcolare la vita media di un'obbligazione vivente al terzo anno
   - Calcolare la Nuda proprietà e l'Usufrutto per un'obbligazione vivente al quarto anno, ipotizzando che il tasso di mercato sia pari ad $i = 4.5\%$

   SOLUZIONE:

   Numero obbligazioni:

   $$N = 200000000/10000 = 20.000$$

   piano di rimborso:

   $$N = 20.000,00$$

$$
\begin{aligned}
N_1 &= 0.10 \cdot 20000 = 2000 \\
N_2 &= 1800; N_3 = 1620, N_4 = 1458; \\
N_5 &= N_6 = 6561
\end{aligned}
$$

La vita media al 3 anno

$$
\begin{aligned}
e_3 &= 1 \cdot \frac{N_4 = 1458}{L_3 = 14580} + 2 \cdot \frac{6561}{14580} + 3 \cdot \frac{6561}{14580} \\
&= 1 \cdot \frac{1458}{14580} + 2 \cdot \frac{6561}{14580} + 3 \cdot \frac{6561}{14580} = 2.35
\end{aligned}
$$

Per calcolare la NP e l'U di un'obbligazione vivente t=4 devo calcolare l'importo che viene corrisposto come cedola: $j(2) = 0.04$, quindi $i_{\frac{1}{2}} = 0.02$ e la Cedola $C = .02 \cdot 10000 = 200$. Calcolo quindi l'Usufrutto

$$
\begin{aligned}
U &= \left[200 \cdot (1.045)^{-0.5} + 200 \cdot (1.045)^{-1}\right] \cdot \frac{6561}{13122} + \left[200 \cdot (1.045)^{-1.5} + 200 \cdot (1.045)^{-2}\right] \cdot \\
387.03 \cdot 0.5 + 370.37 \cdot 0.5 &= 378.7
\end{aligned}
$$

Per il calcolo della NP

$$
NP = \frac{10000}{1.045} \cdot 0.5 + \frac{10000}{1.045^2} \cdot 0.5 = 9363
$$

4. Calcolare la duration di un titolo biennale emesso il 28 dicembre 2018 che paga cedole semestrali corrisposte al $j(2) = 5\%$, valore nominale $K = 5000$, in data odierna

   - si ipotizzi che oggi puoi disporre dei prezzi dei seguenti titoli di puro sconto:

$$
\begin{aligned}
Bot_{6mesi} &= 99,2 \\
Bot_{12mesi} &= 98,9 \\
Bot_{18mesi} &= 98,4 \\
Bot_{24mesi} &= 98,1
\end{aligned}
$$

   - E' possibile prevedere il prezzo a cui dovrà essere venduto tale titolo il 5/01/2020, se si calcolarlo.

Soluzione: Il titolo emesso il 28 Dicembre 2018 in data 28/6/2019 ha una vita residua di 18 mesi. Paga cedole pari a

$$
C = \frac{0.05}{2} \cdot 5000 = 0.025 \cdot 5000 = 125
$$

Calcolo la duration solo dopo essermi calcolato i tassi spot per le scadenze necessarie (6m, 12 e 18) I tassi spot vengono calcolati sulla base della seguente formula

$$
i_{0,t_1} = \left(\frac{K}{P}\right)^{\frac{12}{t_1}} - 1
$$

Pertanto abbiamo

$$
\begin{aligned}
i_{0,6} &= \left(\frac{100}{99.2}\right)^{\frac{12}{6}} - 1 = 0.01619 \\
i_{0,12} &= \left(\frac{100}{98.9}\right)^{\frac{12}{12}} - 1 = 0.0112 \\
i_{0,18} &= \left(\frac{100}{98.4}\right)^{\frac{12}{18}} - 1 = 0.010811
\end{aligned}
$$

La duration è quindi data da

$$D = \frac{0.5 \cdot 125 \cdot (1.01619)^{-0.5} + 1 \cdot 125 \cdot (1.0112)^{-1} + 1.5 \cdot 5125 \cdot (1.010811)^{-1.5}}{125 \cdot (1.01619)^{-0.5} + 125 \cdot (1.0112)^{-1} + 5125 \cdot (1.010811)^{-1.5}} = 1.465$$

Il 5/01/2020 il titolo avrà una vita residua pari a 358 giorni visto che scade il 28/12/2020, Occorrerebbe avere il prezzo di un titolo BoT che scada il 5/1/2020 per poter calcolare i corrispondente tassi forward. Non avendoli non e' possibile calcolarlo

(a) La formula sarebbe

$$\widehat{P}_{5/1/2020} = \frac{125}{(1+\widetilde{i}_{190;175})^{175/365}} + \frac{5125}{(1+\widetilde{i}_{190;358})^{358/365}}$$

5. (T) Si descriva cos'e' il tasso nominale convertibile m volte nell'anno, $j(m)$, e la sua relazione con il tasso di interesse annuo i. Dimostrare la relazione tra i e j.

1. (T)Il candidato descriva le condizioni di chiusura di un piano di ammortamento.
   (a) dimostri l'equivalenza tra la condizione iniziale e la condizione elementare
   (b) quali sono le caratteristiche principali del piano di ammortamento a rata costante?
   (c) il piano di ammortamento di tipo bullet che tipo di prestito rappresenta?

2. Sia data la seguente operazione finanziaria:
   - deposito il capitale C in un conto corrente il 19/7/2019 che paga interessi ad un tasso $j(4) = 3\%$ (ricordare che $j(m)$non è un tasso)
   - dopo 3 mesi verso mensilmente un importo pari ad $\frac{1}{10}$ di C su tali versamenti la banca mi riconosce un tasso i pari al 2%;
   - dopo 1,5 anni prelevo $\frac{1}{2}C$.

   Si determini il valore di C ipotizzando che al 19/07/2021 sul conto in banca la somma accumulata sia pari a €520.000,00, sapendo che la banca prevede di aumentare il tasso di remunerazione ogni sei mesi di 25punti base.

3. Poldo chiede un prestito a Intesa San Paolo chiedendo di pagare una rata semestrale pari a €$91.273,11$ per un massimo di sei semestri, ipotizzando che vi sia un tasso pari a $i = 0,0302$ si determini l'importo che Poldo dovrà rimborsare.
   - redigere il piano di ammortamento;
   - si ipotizzi che dopo i primi tre semestri la banca chieda a Poldo un pagamento aggiuntivo pari al 5% del debito residuo in coincidenza del pagamento delle restanti rate. Si determini il tasso effettivo corrisposto per tale prestito da Poldo.
   - calcolare la NP e l'Usufrutto dopo il pagamento della 4 rata sul prestito originario, immaginando che il tasso di mercato sia pari al 3,5%.

4. 0ggi sul mercato Statunitense i Treasury Bills hanno i seguenti fattori di sconto:

$$
\begin{aligned}
v(0,6mesi) &= 0,995 \\
v(0,1) &= 0,992 \\
v(0;1,5) &= 0,989 \\
v(0,2) &= 0,98
\end{aligned}
$$

   - calcolare i corrispondenti tassi spot;
   - calcolare i tassi forward che potranno valere tra un anno.

5. Tizio acquista un'obbligazione quinquennale il 19/01/2016 che paga cedole semestrali corrisposte ad un tasso $j(2) = 4\%$.
   - Calcolare il prezzo dell'obbligazione in data odierna utilizzando i dati dell'esercizio 4.
   - calcolare, inoltre, la Duration alla data odierna del titolo ipotizzando che la curva dei tassi sia piatta con un tasso pari alla media dei tassi spot calcolati nell'esercizio 4
   - si ipotizzi, inoltre che tale tasso possa aumentare di 25 punti base tra sei mesi, calcolare la variazione che riportera' il prezzo del titolo al 19/1/2020, utilizzando l'informazione sulla duration .

6. Come si misura la variabilità del valore di un flusso finanziario al variare del tasso d'interesse? Descrivere il ruolo della Duration

   - perche' si puo' affermare"*un portafoglio è immunizzato nell'istante T corrispondente alla sua durata media finanziaria D(0)"* cosa implica cio'? Il candidato illustri tutto cio' che sa su questo argomento.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Un piano di ammortamento $\{R_k, t_k\}$ è equo quando il valore attuale della rendita (al tasso o tassi concordati) è uguale al capitale C.
Assumendo un tasso annuo i fissato, la condizione di *chiusura iniziale*, è:

$$C = \sum_{k=1}^{n} R_k v^{(t_k - t_0)} \qquad \left(v = (1+i)^{-1}\right) \tag{1}$$

Usando regimi scindibili si può equivalentemente avere la *condizione di chiusura finale*:

$$C(1+i)^{(t_n - t_0)} = \sum_{k=1}^{n} R_k \, (1+i)^{(t_n - t_k)} \tag{2}$$

Molto usati sono gli ammortamenti progressivi, con rimborso graduale del prestito dove ogni rata R_k è costituita da due termini:

$$R_k = C_k + I_k \tag{3}$$

una quota capitale C_k, destinata alla diminuzione del debito ed una quota interessi I_k, generalmente pari agli interessi maturati, o comunque relativa alla remunerazione del debito.
Le condizioni che richiediamo siano soddisfatte in un piano di ammortamento sono:

- $R_k = C_k + I_k \quad \forall k$;
- ogni quota capitale C_k
- incrementa il debito estinto: $E_k = E_{k-1} + C_k$
- diminuisce il debito residuo: $D_k = D_{k-1} - C_k$

così che ad ogni epoca la somma del debito estinto e del debito residuo è costante, ed uguale al debito iniziale:

$$E_k + D_k = E_{k-1} + D_{k-1} = E_0 + D_0 = C$$

la quota interessi, I_k, è proporzionale al debito residuo del periodo precedente, secondo un tasso fissato i:

$$I_k = i D_{k-1} \tag{4}$$

si verifica la condizione di chiusura, detta elementare

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = C \Longleftrightarrow E_n = C \Longleftrightarrow D_n = 0 \tag{5}$$

Le tre condizioni di chiusura (elementare, iniziale e finale) sono equivalenti quando si utilizzi una legge scindibile. Nel caso di ammortamento regolato da una legge non scindibile (come avviene in alcuni contratti di credito al consumo e di finanziamenti agevolati alle imprese o a dipendenti pubblici) le parti devono accordarsi su che cosa significhi aver chiuso l'ammortamento. Noi assumiamo sempre di usare il regime RIC. L'equivalenza tra condizione di chiusura iniziale e finale è ovvia in quanto la seconda è dedotta dalla prima moltiplicando entrambi i membri per $(1+i)^n$. Per dimostrare l'equivalenza tra condizione di chiusura elementare (5) (o una sua formulazione equivalente), e quella iniziale (1) occorre far vedere che

$$C = \sum_{k=1}^{n} R_k \, (1+i)^{-k} \quad \text{implica} \quad C = \sum_{k=1}^{n} C_k \tag{6}$$

e viceversa.

Dimostriamo $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} R_k &= C_k + I_k \\ &= (D_{k-1} - D_k) + iD_{k-1} \\ &= D_{k-1}(1+i) - D_k \end{aligned}$$

si ha per ipotesi

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} D_{k-1}(1+i)(1+i)^{-k} - \sum_{k=1}^{n} D_k (1+i)^{-k} \\ &= D_0 + D_1 (1+i)^{-1} + D_2(1+i)^{-2} + \ldots + D_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} \\ &\quad -D_1 (1+i)^{-1} - D_2(1+i)^{-2} - \ldots - D_n(1+i)^{-n} \\ &= D_0 - D_n(1+i)^{-n} \\ &= C - D_n(1+i)^{-n} \end{aligned}$$

da cui segue $D_n = 0$ che è equivalente alla (5).
Viceversa $\Leftarrow$per ipotesi vale la (5) e quindi è $D_n = 0$ e si può percorrere a ritroso il medesimo ragionamento:

$$\begin{aligned} C &= C - D_n (1+i)^{-n} \\ &= D_0 - D_n (1+i)^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} D_{k-1}(1+i)(1+i)^{-k} - \sum_{k=1}^{n} D_k (1+i)^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k} \end{aligned}$$

Il piano di ammortamento a rata costante anche detto piano di ammortamento francese ha la caratteristica di avere rate costanti determinate sulla base della seguente relazione

$$A = R \cdot a_{n\rceil i} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Le rate sono composte da una quota interessi molto alta all'inizio che va decrescendo versa la scadenza del debito. Al contrario le quote capitale risultano crescenti. generalizzando si ottiene

$$C_k = (1+i)C_{k-1} \qquad \forall k$$

o anche

$$vC_k = C_{k-1}, \qquad \left[v = (1+i)^{-1}\right]$$

Per $k = n$, da

$$\begin{aligned} R &= C_n + iD_{n-1} \\ &= C_n + iC_n \\ &= (1+i)C_n \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{matrix} C_n & = vR \\ C_{n-1} & = v^2R \\ \vdots & \vdots \\ C_1 & = v^nR \end{matrix} \tag{7}$$

Per le quote interessi decrescenti (essendo R costante), si ha anche l'espressione

$$I_k = R - C_k = R - Rv^{n-k+1} = R(1 - v^{n-k+1})$$

Il piano bullet è un piano che prevede un flusso di rate del tipo $\{iC,\ iC, ...,\ iC + C\}$:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{iC}{1+i} + \frac{iC}{(1+i)^2} + ... + \frac{iC+C}{(1+i)^n} \\ &= iCv + iCv^2 + ... + iCv^n + Cv^n \\ &= C\, i\left(v + v^2 + ... + v^n\right) + Cv^n \\ &= C\ [ia_{n\urcorner i} + v^n] \\ &= C \end{aligned}$$

(essendo $a_{n\urcorner i} = \frac{1-v^n}{i}$).
Invece il valore attuale, in $t = 0$, della rendita $\{iC,\ iC, ..., iC + C\}$ valutata ad un tasso $j \neq i$, è diverso da C:

$$\begin{aligned} V_0(j) &= iC\left(v + v^2 + ... + v^n\right) + Cv^n \qquad v = (1+j)^{-1} \\ &= iCa_{n\urcorner j} + Cv^n \end{aligned} \tag{8}$$

Questo è il caso generico in cui si suppone che la rendita rappresenti il flusso delle cedole e del valore nominale di un titolo acquistato in $t = 0$ al prezzo P. Un'operazione simile può essere assimilata ad un acquisto di titoli obbligazionari

ESERCIZIO 2

Calcolo il tasso equivalente al tasso nominale convertibile 4 volte nell'anno ricordando la seguente relazione

$$\begin{aligned} J(4) &= 4 \cdot i_{\frac{1}{4}} \to i_{\frac{1}{4}} = \frac{0.03}{4} = 0.0075 \\ i &= (1 + 0.0075)^4 - 1 = 0.0339 \end{aligned}$$

Inoltre devo ricordare che 1punto base è pari a un centesimo di punto percentuale e pertanto l'aumento di 25 punti base implica un aumento di 0.0025, quindi i tassi nei due anni dell'operazione saranno i seguenti:

$$0.0339; 0.0364; 0.0389; 0.0414$$

$$\begin{aligned} C \cdot (1.0339)^{0.5} \cdot (1.0364)^{0.5} \cdot (1.0389)^{0.5} \cdot (1.0414)^{0.5} + \frac{1}{10}C \cdot s_{21\urcorner i_{12}} - \frac{1}{2}C \cdot (1.0414)^{0.5} &= 520000 \\ 1.0767 \cdot C + C\frac{1}{10} \cdot \frac{(1+0.0017)^{21} - 1}{0.0017} - 0.5102C &= 520000 \\ 2.7008C &= 520000 \\ C &= 192.540 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

La formula per il calcolo delle rate di un piano di ammortamento è la seguente

$$A = 91273.11 \cdot \frac{1 - (1 + 0.015)^{-6}}{0.015} = 520.000$$

Dopo il terzo pagamento il $D_4 = 178519.566$ pertanto la penale è pari a $0.05 \cdot 178519.566 = 8926$ lo stesso per D_5

Pertanto il piano si modifica nel modo seguente

Calcolo quindi il TIR del piano

$$520000 = 91273.11 \cdot a_{3\urcorner i_2} + 100199.089 \cdot (1 + i_2)^{-4} + 95769.324 \cdot (1 + i_2)^{-5} + 91273.11 \cdot (1 + i_2)^{-6}$$

La NP e L'U al 4 anno sono pari a

$$\begin{aligned} NP &= 88595.32 \cdot (1.035)^{-0.5} + 89924.3 \cdot (1.035)^{-1} = 17397 \\ U &= 2677.31 \cdot (1.035)^{-0.5} + 1348.86 \cdot (1.035)^{-1} = 3934.4 \end{aligned}$$

	R	Ck	Dk	Ik
0			520000	
0,5	91273,11	83473,11	436526,89	7800
1	91273,11	84725,21	351801,68	6547,9
1,5	91273,11	85996,08	265805,6	5277,03
2	91273,11	87286,03	178519,57	3987,08
2,5	91273,11	88595,32	89924,256	2677,79
3	91273,11	89924,25	0,0100105	1348,86

Figure 1: Piano ammortamento

t	R	Ck	Dk	Ik
0			520000	
0,5	91273,11	83473,11	436526,89	7800
1	91273,11	84725,21	351801,68	6547,9
1,5	91273,11	85996,08	265805,6	5277,03
2	100199,09	87286,03	178519,57	3987,08
2,5	95769,324	88595,32	89924,256	2677,79
3	91273,11	89924,25	0,0100105	1348,86

Figure 2: Piano ammortamento aggiornato con la penale

ESERCIZIO 4

Otteniamo i tassi spot (in base annua):

- $i(0, \textit{6 mesi}) = (\frac{1}{0{,}995})^2 - 1 = 0,01$
- $i(0,1) = \frac{1}{0{,}992} - 1 = 0,008$
- $i(0;1,5) = (\frac{1}{0{,}989})^{\frac{1}{1,5}} - 1 = 0,0074$
- $i(0,2) = (\frac{1}{0{,}98})^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,1$

Tassi forward $i(0;1,T)$*(in base annua)*:

- $i(0;1;1,5) = (\frac{m(0;1,5)}{m(0,1)})^2 - 1 = (\frac{v(0,1)}{v(1;1,5)})^2 - 1 = (\frac{0{,}992}{0{,}989})^2 - 1 = 0,006$
- $i(0;1,2) = \frac{v(0,1)}{v(0,2)} - 1 = \frac{0{,}992}{0{,}98} = 0,012$

ESERCIZIO 5

Il valore dell'obbligazione B (supponendo K=100) in data odierna (19/7/2019) è data da:

$$V(0;B) = 2v(0, \textit{6 mesi}) + 2v(0,1) + 102v(0;1,5) = 104,85 \tag{9}$$

La media dei tassi spot calcolati all'esercizio precedente è 3,1%, dunque la Duration odierna con la struttura piatta è data da:

$$D(0,B) = \frac{0,5 \cdot 2(1,031)^{-0,5} + 1 \cdot 2(1,031)^{-1} + 1,5 \cdot 102(1,031)^{-1,5}}{2(1,031)^{-0,5} + 2(1,031)^{-1} + 102(1,031)^{-1,5}} = 1,47 \approx \textit{1 anno, 5 mesi e 19 giorni} \tag{10}$$

Per ottenere la variazione di prezzo che otterrà il titolo al 19/01/2020 bisogna utilizzare la seguente relazione:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\Delta i \cdot \frac{D}{1+i} \tag{11}$$

Sapendo che:

$$D(t;B) = D(0;B) - t \tag{12}$$

abbiamo che la Duration del titolo tra 6 mesi sarà pari a 0,97. Quindi:

$$\Delta V = -0,0025 \cdot \frac{0,97}{1+0,031} \cdot 101,34 \approx -0,24 \tag{13}$$

ESERCIZIO 6

Vedi manuale.

1. (punti 6) (T) Si descriva il problema associato alla valutazione di una rendita finanziaria di N termini

   (a) il candidato descriva il caso generico di determinazione del valore attuale o del montante

   (b) si descriva come si calcola il valore attuale di una rendita costante e periodica, descrivendo tutto il procedimento.

   (c) il valore attuale di rendite differite e frazionate.

   (d) oltre al problema del calcolo del valore attuale e del montante indicare gli altri elementi esaminabili.

   SOLUZIONE

   Si definisce *rendita finanziaria* una successione di importi R_k esigibili alle epoche $t_{k,}$ $k \geq 1$, l'importo R_k è detto **rata** (o termine), l'epoca t_k in cui è disponibile la rata è detta scadenza $k-$esima.

L'ipotesi $t_k \neq t_j$ non è restrittiva per il "principio di additività" (se vi sono più importi ad una medesima scadenza t_k se ne considera la somma algebrica). Il regime che generalmente si considera è il RIC, essendo l'unico regime traslabile e scindibile. Definiamo $V(t_0)$ detto anche *valore attuale della rendita*, la somma di A_k:

$$A_k = R_k(1+i)^{-(t_k-t_0)} \qquad \forall k$$

$$V\,(t_0) = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{-(t_k-t_0)} = \sum_{k=1}^{n} R_k e^{-\delta(t_k-t_0)}$$

Il montante della rendita in $T \geq t_n$ è la somma dei montanti in T delle singole rate R_k ai tempi t_k:

$$\begin{aligned} M_k &= R_k(1+i)^{(T-t_k)} \qquad \forall k \\ &= R_k e^{\delta(T-t_k)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V(T) &= \sum_{k=1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{(T-t_k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} R_k e^{\delta(T-t_k)} \end{aligned}$$

Consideriamo dei casi particolari, molto comuni, per i quali si hanno particolari espressioni per $V(t_0)$ e $V(T)$. Diamo le seguenti definizioni:

1) una rendita è detta **costante** se $R_k = R \quad \forall k$
   in particolare, rendita **unitaria** se $R_k = R = 1 \quad \forall k$
2) una rendita è detta **periodica** se $t_k - t_{k-1} = \text{cost} \quad \forall k$
   in particolare, rendita **annua** se $t_k - t_{k-1} = 1$ anno $\forall k$
3) rendita immediata **posticipata**
4) rendita immediata anticipata
5) **differita** di p periodi posticipata
6) **differita** di p periodi anticipata
7) rendita **limitata** (un numero limitato, n, di rate)
8) rendita **perpetua** (un numero illimitato di rate)

Rendita costante e peridica. Ricordando che $v = (1+i)^{-1}$ si ha:

$$\begin{aligned} V_0 &= a_{n\rceil i} = \sum_{k=1}^{n} v^k = v + v^2 + ... + v^n \\ &= v(1 + v + ... + v^{n-1}) \\ &= v(1 + v + ... + v^{n-1})\frac{1-v}{1-v} \\ &= \frac{v}{1-v}(1 + v + ... + v^{n-1})(1-v) \\ &= \frac{v}{1-v}(1 - v^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{n\rceil i} &= 1 + v + ... + v^{n-1} \\ &= (v + v^2 + ... + v^n) \cdot \frac{1}{v} \\ &= \frac{1}{v} \cdot a_{n\rceil i} \\ &= (1+i)a_{n\rceil i} \end{aligned} \tag{1}$$

mentre per una rendita costante di rata R si avrà

$$V_0 = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i} \tag{2}$$

e

$$\ddot{a}_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to\infty}(1+i)a_{n\rceil i} = \frac{1+i}{i} = 1 + \frac{1}{i} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} {}_{p\prime}a_{n\rceil i} &= v^{p+1} + ... + v^{p+n} \\ &= v^p\,(v + ... + v^n) \\ &= v^p a_{n\rceil i} \\ &= a_{n+p\rceil i} - a_{p\rceil i} \end{aligned} \tag{4}$$

Rendita frazionata Per rendite costanti periodiche, di periodo $\frac{1}{m}-esimo$ di anno, è sufficiente considerare, nelle formule precedenti, il tasso periodale i_m (al posto del tasso annuo i) e, quindi, $v_m = \frac{1}{1+i_m}$ come fattore di attualizzazione.

$$V_0 = a_{N\rceil i_m} = \frac{1 - v_m^N}{i_m} = \sum_{k=1}^{N} v_m^k$$

dove N è il numero di periodi, non necessariamente uguali ad un numero intero di anni.
Nel caso particolare che sia $N = m \cdot n$ possiamo pensare ad una rendita di n anni frazionata in m periodi per ogni anno. Essendo

$$\begin{aligned} v_m^N &= v_m^{n\cdot m} = (1+i_m)^{-n\cdot m} \\ &= \left[(1+i_m)^m\right]^{-n} \\ &= (1+i)^{-n} \\ &= v^n \end{aligned}$$

otteniamo

$$V_0 = \frac{1 - v^n}{i_m}$$

se la rata costante R_m vale $\frac{1}{m}$ (anzichè 1) otteniamo (essendo $mi_m = j_m$, tasso nominale convertibile):

$$\frac{1}{m}\frac{1 - v_m^N}{i_m} = \frac{1 - v^n}{j_m} = \frac{i}{j_m}a_{n\rceil i}$$

In generale, indicato con A il valore attuale di una rendita, un'equazione del tipo:

$$A = R \cdot a_{n\rceil i} \tag{5}$$

ossia

$$A = R \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

può essere utilizzata per determinare una qualunque delle variabili A, R, n, i (oppure v), assegnate le altre. (Assumere i o v come variabile è indifferente essendo fra loro legate da: $v = \frac{1}{1+i}$ ed $i = \frac{1}{v} - 1$)

2. Kenneth riesce a risparmiare €250 ogni mese e deve scegliere come investirli tra le due opzioni:
   (a) depositare questa somma su un conto bancario che riconosce interessi calcolati in RIS ad un tasso nominale convertibile $j(3) = 4\%$ (si ricordi che questo non è un tasso) e che la banca capitalizzi gli interessi a fine anno;
   (b) in un fondo di risparmio che prevede un versamento di €200 mensile che viene remunerato ad un tasso $i = 4\%$ per i primi due anni e del $i' = 4.75\%$ per il successivo periodo. Si ipotizzi inoltre che l'importo eccedente i €200 puo' versarlo sul conto corrente che riconosce un interesse annuo del 3%

   Calcolare quale opzione risulta piu' conveniente per Kenneth sulla base del montante che avrà realizzato dopo 3 anni.

   SOLUZIONE

a) Calcolo il tasso equivalente al tasso $j(3) \to$i$_3$ $= \frac{0.04}{3} = 0.0133 \to i = (1.01333)^3 - 1 = 0.04052\,5$.Il montante a fine anno viene calcolato utilizzando la formula per il montante di una rendita mensile in capitalizzazione semplice (ipotizzando che il versamento venga effettuato a fine di ogni mese):

$$\begin{aligned}
{}_aM(1) &= 250\left[\left(1 + 0.0405\frac{11}{12}\right) + \left(1 + 0.0405\frac{10}{12}\right) + \ldots + \left(1 + 0.0405\frac{1}{12}\right) + 1\right] \\
&= 250 \cdot \left[12 + \frac{0.0405}{12} \cdot \frac{11 \cdot 12}{2}\right] \\
&= 250\,[12 + 0.00337 \cdot 66] \\
&= 250 \cdot 12.222 = 3055.5
\end{aligned}$$

Il montante realizzato alla fine del terzo anno dopo il versamento delle 36 rate sarà dato da:

$$\begin{aligned}
{}_aM\,(3) &= M\,(1)\, s_{3\rceil 0.0405} \\
&= 3055.5 \cdot \frac{(1.0405)^3 - 1}{0.00405} = 95428
\end{aligned}$$

b) Calcoliamo il tasso equivalente mensile:

$$\begin{aligned}
i &= 0.04 \to i_{12}(a) = (1.04)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.00327 \\
i' &= 0.0475 \to i'_{12} = (1.0475)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.00387
\end{aligned}$$

Il montante realizzato investendo 200 € nel fondo di accumulazione ammonta a:

$$\begin{aligned}
{}_bM'\,(3) &= 200 \cdot s_{24\rceil 0.00327} \cdot (1.0475)^1 + 200 \cdot s_{12\rceil 0.00387} \\
&= 200 \cdot \frac{(1.00327)^{24} - 1}{0.00327} \cdot (1.0475)^1 + 200 \cdot \frac{(1.00387)^{12} - 1}{0.00387} \\
&= 5221.7 + 2451.7 = 7673.4
\end{aligned}$$

I 50 euro mensili che vengono depositati mensilmente generano un montante $i_{12} = (1.03)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.0025$

$$50 \cdot \frac{(1.0025)^{36} - 1}{0.0025} = 1881$$

Il montante realizzato alla fine del terzo anno dopo il versamento delle 36 rate sarà dato da:

$$_bM^{''}(3) = 7673.4 + 1881 = 9554.4$$

La seconda opzione risulta più vantaggiosa

3. Marco deve rimborsare un prestito in 4 anni di importo C con rate R_k una diversa dall'altra. Le uniche informazioni che abbiamo sono le seguenti :

   - $E_2 = 1000$; $D_2 = 1500$;
   - $I_1 = 250$; $R_1 = 650; C_3 = C_4$

   Redigere il piano di ammortamento determinando D_0 e il tasso di remunerazione del prestito

   - calcolare la nuda proprietà e l'usufrutto al secondo anno ipotizzando il tasso di valutazione sia uguale al 5%

SOLUZIONE: Ricordiamo le principali regola per la redazione di un piano di ammortamento:
$I_k = i \cdot D_{k-1} \rightarrow 250 = 2500 \cdot i \rightarrow i = 0.10$
$E_k + D_k = D_0 \rightarrow E_2 + D_2 = 2500 = D_0$
$R_k = C_k + I_k \rightarrow R_1 = 650; I_1 = 250; C_1 = 400$
$D_k = D_{k-1} - C_k$

4.

t	D	R	I	C	E
0	2500				
1	2100	650	250	400	400
2	1500	810	210	600	1000
3	750	900	150	750	1750
4	0	825	75	750	2500

La nuda proprietà e l'Usufrutto:

$$\begin{aligned} NP_2 &= 750 \cdot (1.05)^{-1} + 750 \cdot (1.05)^{-2} = 1394.6 \\ U_2 &= 150 \cdot (1.05)^{-1} + 75 \cdot (1.05)^{-2} = 210.88 \end{aligned}$$

5. Pippo compra un'obbligazione quinquennale emessa il 13/02/2017 al prezzo oggi di €103.5

   - Calcolare il rendimento effettivo di tale obbligazione, ipotizzando paghi cedole semestrali calcolate sulla base del tasso $j(2) = 3\%$, e che l'acquirente tenga il titolo fino a scadenza.

   SOLUZIONE
   L'obbligazione con valore nominale pari a K =€100, e cedola pari a $C = \frac{0.03}{2} \cdot 100$ =€1.5 Il rendimento effettivo di un'obbligazione che oggi ha due anni alla scadenza e quindi 4 cedole ancora da attualizzare:

$$103.5 = 1.5 \cdot \frac{1 - (1 + i_2)^{-4}}{i_2} + 100 \cdot (1 + i_2)^{-4}$$

   In presenza di una cedola pari al 3% su base semestrale un prezzo pari a €100 garantirebbe un rendimento del 3%, visto che il prezzo oggi è sopra la pari il rendimento effettivo deve essere inferiore al 3%. Ipotizzo un tasso pari a $i^* = 1.5\% \rightarrow i_2^* = (1.015)^{0.5} - 1 = 0.0074$:

$$1.5 \cdot \frac{1 - (1 + 0.0074)^{-4}}{0.0074} + 100 \cdot (1 + 0.0074)^{-4} = 102.98$$

   Abbiamo che $P^* < P$, quindi il tasso proposto è ancora troppo alto. Proponiamo $i' = 1\% \rightarrow i_2^* = (1.01)^{0.5} - 1 = 0.00498$

$$1.5 \cdot \frac{1 - (1 + 0.00498)^{-4}}{0.00498} + 100 \cdot (1 + 0.00498)^{-4} = 103.96$$

   $P^{'} > P$ pertanto il tasso di rendimento effettivo sarà compreso tra i^* e $i\prime$.

6. Nel caso in cui al 13/08/2020 si disponesse dei seguneti prezzi di titoli di puro sconto:

$$\begin{aligned} Bot_6 &= 99.8 \\ BOT_{12} &= 99.5 \\ Ctz_{18} &= 99.2 \end{aligned}$$

   - a quale prezzo verrebbe quotato il titolo?
   - Calcolare il rendimento realizzato da Pippo che ha comprato il titolo dell'esercizio 4 e l'ha rivenduto il 13/08/2020.
   - Ipotizzando di trovarsi al 13/08/2020 si calcolino i tassi forward al 13/02/2021.

   SOLUZIONE:
   Sulla base dei prezzi spot posso calcolare i tassi spot

$$\begin{aligned} i_{0,6} &= \left(\frac{100}{99.8}\right)^2 - 1 = 0.004 \\ i_{0,12} &= \left(\frac{100}{99.5}\right) - 1 = 0.005 \\ i_{0,18} &= \left(\frac{100}{99.2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0.0054 \end{aligned}$$

Il prezzo al quale Pippo può vendere l'obbligazione al 13/08/2020 si ottiene dalla seguente formula:

$$P = \frac{1.5}{(1.004)^{0.5}} + \frac{1.5}{(1.005)} + \frac{101.5}{(1.0054)^{1.5}} = 103.67$$

Il rendimento realizzato da Pippo si calcola tenendo conto che Pippo vende a €103.67 e riceve la cedola pari a €1.5.Quindi acquista a 103.5 e rivende a 105.17

$$\begin{aligned} 103.5 \cdot (1+i)^{0.5} &= 105.17 \\ i &= \left(\frac{105.17}{103.5}\right)^2 - 1 = 0.032 \sim 3.2\% \end{aligned}$$

   Per calcolare i tassi forward a 13/02/2021 considero

13/08/20______13/2/21|_____13/08/21|_____13/2/22|

|______________|____________|______________|

e al 13/2/2021 posso calcolare il tasso forward a sei mesi e ad un anno ed il tasso a sei mesi che varra' dal 18/08/2021

$$\begin{aligned} f_{13/2/21,6mesi} &\rightarrow (1.004)^{0.5} \cdot \left(1 + f_{13/2;6mesi}\right)^{0.5} = (1.05) \\ f_{13/2/21,12mesi} &\rightarrow (1.004)^{0.5} \cdot \left(1 + f_{13/2;12mesi}\right)^{1} = (1.054)^{1.5} \\ f_{13/8/21,6mesi} &\rightarrow (1.005)^{1} \cdot \left(1 + f_{13/8;6mesi}\right)^{0.5} = (1.054)^{1.5} \end{aligned}$$

7. Si calcoli la duration del titolo dell'esercizio 5 nell'ipotesi di curva dei tassi d'interesse piatta al 13/05/2021 al 5%.

   SOLUZIONE:

   Calcolo la duration in presenza di curva dei tassi piatta e tenendo conto che al 13/05/2021 dovro' prevedere il pagamento di due cedole la prima dopo 92 giorni (dal 13/05 al 13/08) e di 184 giorni :

$$D(13/05/2021) = \frac{\frac{92}{365} \cdot 1.5 \cdot (1.05)^{-\frac{92}{365}} + \frac{184}{365} \cdot 101.5 \cdot (1.05)^{-\frac{184}{365}}}{1.5 \cdot (1.05)^{-\frac{92}{365}} + 101.5 \cdot (1.05)^{-\frac{184}{365}}} = 0.50039$$

   ovvero 0.50039·365 = 182.64 circa 6 mesi.

8. A cosa serve la formula di MakeHam? Si dimostri che si puo' applicare a qualsiasi tipo di prestito

   In un ammortamento a *scadenze periodiche*, $t_{k+1} - t_k = \tau$ costante, indicato con i il tasso tecnico (periodale) e j il tasso di valutazione (periodale), il valore dell'usufrutto alla scadenza t_m può essere espresso mediante la seguente formula:

$$U_m = \frac{i}{j}\left[D_m - NP_m\right] \tag{6}$$

Usando quindi la formula di Makeham il valore attuale all'epoca t_m è dato da

$$V_m = \frac{i}{j}\left[D_m - NP_m\right] + NP_m \tag{7}$$

Dimostrazione. Per definizione abbiamo

$$\begin{aligned} D_m &= \sum_{k=m+1}^{n} C_k \\ NP_m &= \sum_{k=m+1}^{n} C_k(1+j)^{-(k-m)} = \sum_{k=m+1}^{n} C_k v^{k-m} \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} D_m - NP_m &= \sum_{k=m+1}^{n} C_k \left(1 - v^{k-m}\right) \\ &\quad \text{(moltiplicando e dividendo per } j\text{)} \\ &= j \sum_{k=m+1}^{n} C_k \underbrace{\left(\frac{1 - v^{k-m}}{j}\right)}_{a_{\overline{k-m}|j} = v + v^2 + \ldots + v^{k-m}} \end{aligned}$$

esplicitando e riordinando in modo diverso:

$$\begin{aligned} D_m - NP_m &= j\,\{C_{m+1}v + \\ &\quad C_{m+2}\left(v + v^2\right) + \ldots \\ &\quad C_n\left(v + v^2 + \ldots + v^{n-m}\right)\} \\ &= j\,\{v\left(C_{m+1} + C_{m+2} + \ldots + C_n\right) + \\ &\quad v^2\left(C_{m+2} + \ldots + C_n\right) + \ldots \\ &\quad v^{n-m}\left(C_n\right)\} \\ &= j\left\{vD_m + v^2 D_{m+1} + \ldots + v^{n-m} D_{n-1}\right\} \end{aligned}$$

infine moltiplicando e dividendo per i si ottiene il risultato:

$$\begin{aligned} D_m - NP_m &= \frac{j}{i}\sum_{k=1}^{n-m} v^k i D_{m+k-1} \\ &= \frac{j}{i}\sum_{k=1}^{n-m} v^k I_{m+k} \\ &= \frac{j}{i} U_m \end{aligned}$$

1. (punti 5) Che cos'è una legge finanziaria ed un regime finanziario:

   (a) si descriva un regime scindibile e traslabile;
   (b) si illustrino le funzioni di sconto nei tre regimi e si descriva la differenza grafica ed analitica;
   (c) si descriva la forza d'interesse nei tre regimi.
   (d) descriva la relazione esistente tra tasso nominale convertibile m volte nell'anno e tasso istantaneo d'interesse (o forza d'interesse) .

2. (punti 5) Spaulding prende un prestito di €1.000.000 che dovra' rimborsare in tre anni Si rivolge a due diversi intermediari.

   (a) l'intermediario ALFA chiede una remunerazione in capitalizzazione semplice al tasso $j(6) = 4.5$.
   (b) l'intermediario BETA chiede una remunerazione in capitalizzazione composta al tasso $i_6 = 0.0065$.
   Tale prestito lo usa per investire in un'attività produttiva che genera un tasso di remunerazione annuo pari ad $i = 5\%$
   Determinare la differenza di guadagno realizzato da Spaulding ricorrendo all'intermediario Alfa e quello sostenuto nel caso dell'intermediario Beta.
   Quale tasso di costo renderebbe i due interemediari perfettamente equivalenti?
   SOLUZIONE:
   Per l'impresa ALFA Calcolo il tasso equivalente al tasso $j(6) \rightarrow i_6 = \frac{0.045}{6} = 0.0075 \rightarrow i = (1 + 0.0075)^6 - 1 = 0.04585\_$
   Per l'impresa BETA $\rightarrow i = (1 + 0.0065)^6 - 1 = 0.0396$
   Calcolo il Montante dopo 3 anni

$$_{ALFA}M(3) = 1.000.000(1 + 3 \cdot 0.04585) = 1.137.550 \quad (1)$$
$$M(3)_{BETA} = 1.000.000(1 + 0.0396)^3 = 1.123.693 \quad (2)$$

   L'investimento in attività produttive rende

$$\widetilde{M}(3) = 1.000.000(1.05)^3 = 1.157.625 \quad (3)$$

   Confronto le due alternative
   $\widetilde{M}(3) - M_{ALFA}(3) = 20.075$
   $\widetilde{M}(3) - M_{BETA}(3) = 33.932$
   Risuterebbe più redditizia l'opzione BETA.
   Affinchè le due opzioni siano equivalenti deve essere

$$\begin{gathered}(1 + 3i_{ALFA}) = (1 + i_{BETA})^3 \\ 1.137.550 = 1.000.000(1 + i)^3 \rightarrow\rightarrow i_{BETA} = 0.04389\end{gathered} \quad (4)$$
$$1000.000(1 + i_{BETA})^3 = 1.123.693 = 1.000.000 \cdot (1 + 3\widehat{i}) \rightarrow \widehat{i} = 0.0412 \quad (5)$$

3. (punti 5) Mark va da HSBC bank e chiede un mutuo di €52.500. Il gestore dei crediti propone due modalità di rimborso su un orizzonte temporale di 3 anni

   - Modalità 1: quote interesse costanti pari al 10%del debito iniziale, quote capitale costanti

t	D	I	C	R	E
0	52500				
1	35000	5250	17500	22750	17500
2	17500	5250	17500	22750	35000
3	0	5250	17500	22750	52500

t	D	I	C	R	E
0	52500				
1	37309	7613	15191	22803	15191
2	19916	5410	17394	22803	32584
3	0	2888	19916	22803	52500

- Modalità 2: metodo rata costante al tasso annuo del 14.5%
  (a) redigere i due piani di ammortamento.

(b) Confrontare i due piani di rimborso: quali sono i vantaggi e gli svantaggi associati a ciascun metodo?

(c) Individuare il piano di rimorso piu' conveniente per Mark.

(d) Determ$_1$inare il tasso d'interesse che viene applicato nella prima modalità.

Redigo i due piani di ammortamento tenendo conto che nel caso 1 :

$I_1 = I_2 = I_3 = 0.10 \cdot 52500 = 5250$;

$C_1 = C_2 = C_3 = \frac{52500}{3} = 17500$;

Nel caso 2 calcolo la rata costante

$$R = \frac{52500}{\frac{1-(1.145)^{-3}}{0.145}} = 22.803 \tag{6}$$

Calcolo il tasso d'interesse applicato ogni anno $i_1 = 0.10$; $i_2 = \frac{5250}{35000} = 0.15$; $i_3 = \frac{5250}{17500} = 0.30$. Una prima approssimazione si puo' avere calcolando il tasso medio $E(i) = \frac{0.10+0.15+0.30}{3} = 0.1833$

Il secondo piano di rimborso

Il piano di rimborso più conveniente per Mark in termini di esborso annuo risulta essere ceramente il piano 1 visto che la rata corroisposta risulta essere inferiore di 23 euro.

Se si considera il tasso d'interesse corrisposto pero' il piano due ha un tasso medio meno alto del primo. Per poter fare un confronto corretto occorre calcolare il TIC dei due piani:

$$22750 \cdot \frac{1-(1+i*)^{-3}}{i*} = 52500 \rightarrow i* = 0.1435 \tag{7}$$

4. (punti 4)Un'obbligazione emessa dal Governo Italiano ha un valore nominale di €1000, paga cedole annuali al 3% . L'obbligazione è stata acquistata ad un prezzo P=1.120.

   Ha emesso 2.000 obbligazioni che rimborsa con la seguente modalita' in tre anni

   $$N_2 = 2N_1; N_3 = 3N_1$$

   (a) Calcolare la vita media dell'obbligazione dopo che è avvenuta la prima estrazione.
   (b) Calcolare il prezzo dell'obbligazione dopo la prima estrazione ipotizzando che il tasso di mercato sia pari a $j = 1.5\%$ SOLUZIONE: Calcolo il numero delle obbligazioni rimborsate ciascun anno:

$$6N_1 = 2000 \rightarrow N_1 = 333 \rightarrow L_1 = 1667 \tag{8}$$
$$N_2 = 666 \tag{9}$$
$$N_3 = 998 \tag{10}$$

Pertanto la vita media dopo la prima estrazione

$$e_1 = 1 \cdot p_{1,2} + 2 \cdot p_{1,3} \tag{11}$$
$$= 1 \cdot \frac{666}{1667} + 2 \cdot \frac{999}{1667} = 1,6 \tag{12}$$

Calcolo il prezzo dell'obbligazione che paga una cedola pari a $C = 0.03 \cdot 1000 = 30$

$$P_1 = \left[\frac{30}{1.015} + \frac{1030}{(1.015)^2}\right] \cdot p_{1,3} + \frac{1030}{1.015} \cdot p_{1,2} \tag{13}$$
$$= \left[\frac{30}{1.015} + \frac{1030}{(1.015)^2}\right] \cdot 0.6 + \frac{1030}{1.015} \cdot 0.4 = 1023.5 \tag{14}$$

5. (punti 5) Siano dati i prezzi dei titoli di puro sconto

- $$\begin{array}{r} Bot_6 = 996 \\ Bot_1 = 989 \\ Ctz_{18} = 980 \\ CtZ_{24} = 976 \\ CtZ_{36} = 97 \end{array}$$

- (a) Calcolare i tassi spot
  (b) Calcolare i tassi forward che dovranno valere dopo 18 mesi
  (c) Sia data un'obbligazione quadriennale, emessa il 18/01/2019 , che paga cedole semestrali al tasso $j(2) = 2.5\%, K = 1000$; calcolare il prezzo in data odierna sulla base della struttura dei tassi spot calcolati al punto (a).
  (d) e' possibile stimare il prezzo dell'obbligazione il 18/07/2022?
  SOLUZIONE:

$$i_{0,6} = \left(\frac{1000}{996}\right)^2 - 1 = 0.008; \tag{15}$$
$$i_{0,1=}\frac{1000}{989} - 1 = 0.011 \tag{16}$$
$$i_{0,1,5} = \left(\frac{1000}{980}\right)^{\frac{12}{18}} - 1 = 0.01356 \tag{17}$$
$$i_{0,2} = \left(\frac{1000}{976}\right)^{0.5} - 1 = 0.0122 \tag{18}$$
$$i_{0,3} = \left(\frac{1000}{970}\right)^{\frac{12}{36}} - 1 = 0.0102 \tag{19}$$

- Calcolo i tassi forward prevalenti al tempo 18 mesi:

$$i_{18,24} \Rightarrow (1.01356)^{\frac{18}{12}} (1 + i_{18,24})^{0.5} = (1.0122)^2 \Rightarrow i_{18,24} = 0.00813 \tag{20}$$
$$i_{18,36} \Rightarrow (1.01356)^{\frac{18}{12}} (1 + i_{18,36})^{1.5} = (1.0102)^3 \Rightarrow i_{18,36} = 0.006851 \tag{21}$$

Calcolo il prezzo dell'obbligazione in data odierna

$$P = \frac{12.5}{(1.008)^{0.5}} + \frac{12.5}{(1.011)^1} + \frac{12.5}{(1.0135)^{1.5}} + \frac{1012.5}{(1.0102)^2} = 1059.9 \tag{22}$$

Per calcolare il prezzo dell'obbligazione al 18/07/2022 avrei bisogno del tasso forward $i_{24,30}$che non ho posso calcolarlo solo facendo un'interpolazione

6. (punti 2) Il candidato descriva il Return on Equity, Il Return on Investment e la Leva finanziaria.
7. (punti 4) Si descriva la Duration di Macaulay, la duration modificata ed il suo utilizzo per analizzare le operazioni finanziarie.

1. (T)Il candidato descriva lle rendite e le principali caratteristiche

   (a) descriva come si calcola il valore attuale di una rendita
   (b) il valore attuale di una rendita costante
   (c) descriva come si calcola il numero delle rate, n, o il tasso d'interesse, i.

   SOLUZIONE

   Una rendita $\{R_k, t_k\}$ *è* una successione di importi esigibili in epoche diverse. Abbiamo iversi tipi di rendite....

(vedi il manuale) Il caso di una rendita generica prevede il calcolo del valore attuale ad un tasso prefissato i

$$V_{t_0} = \sum_{k=1}^{n} R_k v^{(t_k - t_0)} \qquad \left(v = (1+i)^{-1}\right) \tag{1}$$

2. Giacomo si reca presso la Banca Fairfax ed effettua la seguente operazione

   - deposita il capitale C oggi, la banca riconosce interessi ad un tasso $j(2) = 5\%$ (ricordare che $j(m)$non è un tasso)
   - dopo 6 mesi concorda di aprire un piano di accumulo al tasso $i = 3,5\%$ dove versa ogni due mesi un importo pari ad $\frac{1}{3}$ di C ;
   - dopo altri 2 anni ritira $\frac{1}{2}C$.

   Calcolare il valore di C ipotizzando che fra tre anni sul conto in banca la somma accumulata sia pari a €640.000,00, ipotizzando che la banca aumentava il tasso di remunerazione ogni sei mesi di 25punti base.

   SOLUZIONE

   Calcolo il tasso equivalente al tasso nominale convertibile 2 volte nell'anno ricordando la seguente relazione

$$\begin{aligned} J(2) &= 2 \cdot i_{\frac{1}{2}} \to i_{\frac{1}{2}} = \frac{0.05}{2} = 0.025 \\ i &= (1+0.025)^2 - 1 = 0.0506 \end{aligned}$$

   Calcolo il tasso equivalente bimestrale al tasso annuo $i = 3,5\%$:

$$i_6 = (1+0.035)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0.00575 \tag{2}$$

   Inoltre devo ricordare che 1 punto base è pari a un centesimo di punto percentuale e pertanto l'aumento di 25 punti base implica un aumento di 0.0025, quindi il tasso annuo dopo i primi 6 mesi diventa 0.0506+0.0025=0.0531 e nei mesi successivi :

$$0.0556; 0.0581; 0.0606; 0.0631$$

$$C \cdot (1.0506)^{0.5} \cdot (1.0531)^{0.5} \cdot (1.0556)^{0.5} \cdot (1.0581)^{0.5} \cdot (1.0606)^{0.5} \cdot (1.0631)^{0.5} + \frac{1}{3}C \cdot s_{15\rceil i_6} - \frac{1}{2}C \cdot (1.0631)^{0.5} = 640000$$
$$1.1804 \cdot C + C\frac{1}{3} \cdot \frac{(1+0.00575)^{15}-1}{0.00575} - 0.5155C = 640000$$
$$5.8713C = 640000$$
$$C = 109.004$$

   : __

3. Un prestito di importo A viene rimborsato con 6 rate quadrimestrali di €52.328 , determinare l'importo sapendo che vi sia un tasso pari a $i = 0,04$:

   - si rediga il piano di ammortamento;
   - dopo il primo anno la banca impone una commissione aggiuntiva di 50 euro a rata per le restanti rate. Qual'è il tasso effettivo applicato per il rimborso del prestito?
   - Calcolare la NP e l'Usufrutto dopo il pagamento della 4 rata sul prestito originario, immaginando che il tasso di mercato sia pari al 2,5%.

   SOLUZIONE

   Si tratta di un ammortamento a rate costanti quadrimestrali. Devo calcolare il tasso equivalente quadrimestrale al tasso i=0.04

$$i_3 = (1.04)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.013159 \tag{3}$$

   La formula per il calcolo delle rate di un piano di ammortamento è la seguente

$$A = 53.238 \cdot \frac{1 - (1 + 1.013)^{-6}}{0.013} = 300.000$$

   Redigo quindi il piano di ammortamento

t	D	C	I	R	E
0	300000				
1	251620	48380	3948	52328	48380
2	202603	49017	3311	52328	97397
3	152941	49662	2666	52328	147059
4	102626	50315	2013	52328	197374
5	51648	50977	1350	52328	248352
6	0	51648	680	52328	300000

   Nel caso in cui dopo il primo anno la banca introduca una commissione aggiuntiva di €50 da pagare sulle rate 4, 5 e 6 devo trovare il tasso di costo del mio prestito che si ottiene risolvendo la seguente equazione nell'incognita i_3^* :

$$300000 = 52328 \cdot a_{3\rceil i_3^*} + 52378 \cdot (1 + i_3)^{-4} + 52428 \cdot (1 + i_3)^{-5} + 52478 \cdot (1 + i_3)^{-6} \tag{4}$$
$$i_3^* = 0.0134 \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

   La NP e L'U dopo il quarto pagamento sono pari a

$$NP = \quad 50977 \cdot (1.025)^{-\frac{1}{3}} + 51648 \cdot (1.025)^{-\frac{2}{3}} =$$
$$U = \quad 1350 \cdot (1.025)^{-\frac{1}{3}} + 680 \cdot (1.025)^{-\frac{2}{3}} =$$

4. 0ggi sul mercato Telematico dei Titoli di Stato vi sono i seguenti fattori di sconto:

$$v(0, 6mesi) = \quad 0,98$$
$$v(0,1) = \quad 0,972$$
$$v(0;1,5) = \quad 0,97$$
$$v(0,2) = \quad 0,96$$

- calcolare i corrispondenti tassi spot;
- calcolare i tassi forward che potranno valere tra un anno.

SOLUZIONE

Ricordiamo la relazione

$$P(1+i_{t_0,t_1})^{(t_1-t_0)} = K \to P = K \cdot \frac{1}{(1+i_{t_0,t_1})^{(t_1-t_0)}} = K \cdot v(t_0,t_1) \quad (7)$$

$$0.98 = \frac{1}{(1+i_{t_0,t_1})^{(t_1-t_0)}} \to i_{0,6m} = \left(\frac{1}{0.98}\right)^{12/6} - 1 = 0.041 \quad (8)$$

$$0.972 = \frac{1}{(1+i_{0,1})^{(1)}} \to i_{0,12m} = \left(\frac{1}{0.972}\right) - 1 = 0.0288 \quad (9)$$

$$i_{0,18m} \to 0.97 \to \left(\frac{1}{0.97}\right)^{\frac{12}{18}} - 1 = 0.0205 \quad (10)$$

$$i_{0,24m} \to 0.96 \to \left(\frac{1}{0.96}\right)^{\frac{12}{24}} - 1 = 0.0206 \quad (11)$$

$$(12)$$

5. per calcolare i tassi forward uso la relazione :

$$(1+i_{to,t1})^{t1-t0}\,(1+f_{t1,t2})^{(t2-t1)} = (1+i_{t0,t2})^{(t2-t0)} \quad (13)$$

$$f_{1,1.5} = \left[\frac{(1+0.0205)^{1.5}}{(1.0288)}\right]^2 - 1 \quad (14)$$

$$f_{1,2} = \left[\frac{(1+0.0206)^2}{(1.0288)}\right] - 1 \quad (15)$$

6. Luigi ha acquistato un'obbligazione quinquennale tre anni fa che paga cedole semestrali corrisposte ad un tasso $j(2) = 5\%$.

   - Calcolare il prezzo dell'obbligazione in data odierna utilizzando i tassi spot dell'esercizio precedente
   - Calcolare la Duration del titolo ipotizzando che la curva dei tassi sia piatta con un tasso pari alla media dei tassi spot
   - utilizzando la duration calcolata determinare la variazione del prezzo dell'obbligazione in presenza di un aumento di 50 punti base.

     Ipotizzo che il valore nominale dell'obbligazione sia K=1000€, pertanto la cedola è pari a

$$\frac{0.05}{2} \cdot 1000 = 25 \cdot \quad (16)$$

Il prezzo dell'obbligazione è dato dal valore attuale dei flussi di cassa generati dal pagamento delle cedole semestrali

$$P = \frac{25}{(1.041)^{0.5}} + \frac{25}{(1.0288)} + \frac{25}{(1.0205)^{1.5}} + \frac{1025}{(1.0206)^2} 1119.2 \quad (17)$$

Calcolo il tasso medio per calcolare la duration associata a una curva piatta

$$E(i) = \frac{0.041 + 0.0288 + 0.0205 + 0.0206}{4} = 0.027725 \quad (18)$$

$$D = \frac{\left(0.5\frac{25}{(1.0277)^{0.5}} + 1\frac{25}{(1.0277)^{1}} + 1.5 \cdot \frac{25}{1.0277)^{1.5}} + 2 \cdot \frac{1025}{(1.0277)^{2}}\right)}{\left(\frac{25}{(1.0277)^{0.5}} + \frac{25}{(1.0277)^{1}} + \frac{25}{1.0277)^{1.5}} + \frac{1025}{(1.0277)^{2}}\right)} = 1.93 \tag{19}$$

Ricordando poi che la Duration è un indicatore di sensitività rispetto a variazioni del tasso d'interesse posso calcolare di quanto varierebbe il prezzo del titolo in conseguenza di una variazione del tasso di 50 p.b.

$$P' - P = P \cdot D_M \cdot \Delta i$$
$$P' - 1119.2 = 1119.2 \cdot \left(-\frac{1.93}{0.0277}\right) \cdot 0.0050$$
$$P' = 1119.2 - 389.83 = 729.37$$

7. (T) Descrivere i principali criteri di valutazine di investimenti:

   - evidenziare i vantaggi e gli svantaggi del REA.
     evidenziare i vantaggi e gli svantaggi del TIR
     descrivere il criterio dei saldi parziali

(20)

1. (T)Il candidato descriva le rendite

   (a) come si determina il valore attuale di una rendita immediata posticipata di N rate costanti?

   (b) come si determina il valore attuale di una rendita di N termini differita di p periodi anticipata ?

   (c) Come si determina il N di rate?

   (d) come si determina il tasso di rendimento?

2. Sia data la seguente operazione finanziaria:

   - deposito il capitale C in un conto corrente il 19/7/2019 che paga interessi ad un tasso $j(4) = 3\%$ (ricordare che $j(m)$non è un tasso)
   - dopo 3 mesi verso mensilmente un importo pari ad $\frac{1}{10}$ di C su tali versamenti la banca mi riconosce un tasso i pari al 2%;
   - dopo 1,5 anni prelevo $\frac{1}{2}C$.

   Si determini il valore di C ipotizzando che al 19/07/2021 sul conto in banca la somma accumulata sia pari a €520.000,00, sapendo che la banca prevede di aumentare il tasso di remunerazione ogni sei mesi di 25punti base.

3. Poldo chiede un prestito a Intesa San Paolo chiedendo di pagare una rata semestrale pari a €$91.273,11$ per un massimo di sei semestri, ipotizzando che vi sia un tasso pari a $i = 0,0302$ si determini l'importo che Poldo dovrà rimborsare.

   - redigere il piano di ammortamento;
   - si ipotizzi che dopo i primi tre semestri la banca chieda a Poldo un pagamento aggiuntivo pari al 5% del debito residuo in coincidenza del pagamento delle restanti rate. Si determini il tasso effettivo corrisposto per tale prestito da Poldo.
   - calcolare la NP e l'Usufrutto dopo il pagamento della 4 rata sul prestito originario, immaginando che il tasso di mercato sia pari al 3,5%.

4. Oggi sul mercato Statunitense i Treasury Bills hanno i seguenti fattori di sconto:

$$\begin{aligned} v(0, 6mesi) &= \quad 0,995 \\ v(0,1) &= \quad 0,992 \\ v(0;1,5) &= \quad 0,989 \\ v(0,2) &= \quad 0,98 \end{aligned}$$

   - calcolare i corrispondenti tassi spot;
   - calcolare i tassi forward che potranno valere tra un anno.

5. Tizio acquista un'obbligazione quinquennale il 19/01/2016 che paga cedole semestrali corrisposte ad un tasso $j(2) = 4\%$.

   - Calcolare il prezzo dell'obbligazione in data odierna utilizzando i dati dell'esercizio 4.
   - calcolare, inoltre, la Duration del titolo ipotizzando che la curva dei tassi sia piatta con un tasso pari alla media dei tassi spot calcolati nell'esercizio 4

- si ipotizzi, inoltre che tale tasso possa aumentare di 25 punti base tra sei mesi, calcolare la variazione che riportera' il prezzo del titolo al 08/12/2022, utilizzando l'informazione sulla duration .

6. Come si misura la variabilità del valore di un flusso finanziario al variare del tasso d'interesse? Descrivere il ruolo della Duration.

   Perche' si puo' affermare *"un portafoglio è immunizzato nell'istante T corrispondente alla sua durata media finanziaria D(0)"* cosa implica cio'? Il candidato illustri tutto cio' che sa su questo argomento.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Vedi manuale.

ESERCIZIO 2

Calcolo il tasso equivalente al tasso nominale convertibile 4 volte nell'anno ricordando la seguente relazione

$$\begin{aligned} J(4) &= 4 \cdot i_{\frac{1}{4}} \rightarrow i_{\frac{1}{4}} = \frac{0.03}{4} = 0.0075 \\ i &= (1+0.0075)^4 - 1 = 0.0339 \end{aligned}$$

Inoltre devo ricordare che 1punto base è pari a un centesimo di punto percentuale e pertanto l'aumento di 25 punti base implica un aumento di 0.0025, quindi i tassi nei due anni dell'operazione saranno i seguenti:

$$0.0339; 0.0364; 0.0389; 0.0414$$

$$\begin{aligned} C \cdot (1.0339)^{0.5} \cdot (1.0364)^{0.5} \cdot (1.0389)^{0.5} \cdot (1.0414)^{0.5} + \frac{1}{10} C \cdot s_{21\rceil i_{12}} - \frac{1}{2} C \cdot (1.0414)^{0.5} &= 520000 \\ 1.0767 \cdot C + C \frac{1}{10} \cdot \frac{(1+0.0017)^{21} - 1}{0.0017} - 0.5102C &= 520000 \\ 2.7008C &= 520000 \\ C &= 192.540 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

La formula per il calcolo delle rate di un piano di ammortamento è la seguente

$$A = 91273.11 \cdot \frac{1-(1+0.015)^{-6}}{0.015} = 520.000$$

	R	Ck	Dk	Ik
0			520000	
0,5	91273,11	83473,11	436526,89	7800
1	91273,11	84725,21	351801,68	6547,9
1,5	91273,11	85996,08	265805,6	5277,03
2	91273,11	87286,03	178519,57	3987,08
2,5	91273,11	88595,32	89924,256	2677,79
3	91273,11	89924,25	0,0100105	1348,86

Figure 1: Piano ammortamento

Dopo il terzo pagamento il $D_4 = 178519.566$ pertanto la penale è pari a $0.05 \cdot 178519.566 = 8926$ lo stesso per D_5

Pertanto il piano si modifica nel modo seguente

Calcolo quindi il TIR del piano

$$520000 = 91273.11 \cdot a_{3\rceil i_2} + 100199.089 \cdot (1+i_2)^{-4} + 95769.324 \cdot (1+i_2)^{-5} + 91273.11 \cdot (1+i_2)^{-6}$$

La NP e L'U al 4 anno sono pari a

$$\begin{aligned} NP &= 88595.32 \cdot (1.035)^{-0.5} + 89924.3 \cdot (1.035)^{-1} = 17397 \\ U &= 2677.31 \cdot (1.035)^{-0.5} + 1348.86 \cdot (1.035)^{-1} = 3934.4 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

t	R	Ck	Dk	Ik
0			520000	
0,5	91273,11	83473,11	436526,89	7800
1	91273,11	84725,21	351801,68	6547,9
1,5	91273,11	85996,08	265805,6	5277,03
2	100199,09	87286,03	178519,57	3987,08
2,5	95769,324	88595,32	89924,256	2677,79
3	91273,11	89924,25	0,0100105	1348,86

Figure 2: Piano ammortamento aggiornato con la penale

Ricordiamo la relazione

$$\begin{aligned} P(1+i_{t_0,t_1})^{(t_1-t_0)} &= & K \rightarrow P = K \cdot \frac{1}{(1+i_{t_0,t_1})^{(t_1-t_0)}} = K \cdot v(t_0,t_1) \\ 0.995 &= & \frac{1}{(1+i_{t_0,t_1})^{(t_1-t_0)}} \rightarrow i_{0,6m} = \left(\frac{1}{0.995}\right)^{12/6} - 1 = 0.0100 \\ 0.992 &= & \frac{1}{(1+i_{0,1})^{(1)}} \rightarrow i_{0,6m} = \left(\frac{1}{0.992}\right) - 1 = 0.008 \\ 0.989 &\rightarrow & \left(\frac{1}{0.989}\right)^{\frac{12}{18}} - 1 = 0.0074 \\ 0.98 &\rightarrow & \left(\frac{1}{0.98}\right)^{\frac{12}{24}} - 1 = 0.010 \end{aligned}$$

Tassi forward $i(0;1,T)$*(in base annua)*:

- $i(0;1;1,5) = (\frac{m(0;1,5)}{m(0,1)})^2 - 1 = (\frac{v(0,1)}{v(1;1,5)})^2 - 1 = (\frac{0,992}{0,989})^2 - 1 = 0,006$
- $i(0;1,2) = \frac{v(0,1)}{v(0,2)} - 1 = \frac{0,992}{0,98} = 0,012$

ESERIZIO 5

Il prezzo dell'obbligazione in data odierna si può calcolare attualizzando con i fattori di sconto osservati sul mercato il flusso di poste dell'obbligazione, che ha cedole semestrali pari a 2, essendo $j(2) = 4\%$

$$P_{08/06/2021} = 2(0,995) + 2(0,992) + 2(0,989) + 102(0,98) = 105,91 \tag{1}$$

La media dei tassi spot risulta essere 0,0089 quindi la Duration alla data odierna risulta essere:

$$\begin{aligned} D_{08/06/2021} &= \frac{0,5 \cdot 2(1+0,0089)^{-0,5} + 1 \cdot 2(1+0,0089)^{-1} + 1,5 \cdot 2(1+0,0089)^{-1,5} + 2 \cdot 102(1+0,0089)^{-2}}{2(1+0,0089)^{-0,5} + 2(1+0,0089)^{-1} + 2(1+0,0089)^{-1,5} + 102(1+0,0089)^{-2}} \\ &= 1,943895 \approx \textit{1 anno, 11 mesi e 10 giorni.} \end{aligned} \tag{2}$$

Per ottenere la variazione di prezzo che otterrà il titolo al 8/12/2022 bisogna utilizzare la seguente relazione:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\Delta i \cdot \frac{D}{1+i} \tag{3}$$

Sapendo che:

$$D(t;B) = D(0;B) - t \tag{4}$$

abbiamo che la Duration del titolo tra 6 mesi sarà pari circa 1,444 anni. Quindi:

$$\Delta V = -0,0025 \cdot \frac{1,44}{1+0,0089} \cdot 106,16 \approx -0,38 \tag{5}$$

In cui V è rappresentato dal valore al denominatore della Duration, ovvero il valore attualizzato delle poste dell'obbligazione supponendo una struttura piatta.

ESERCIZIO 6

Vedi manuale.

1. (T)Il candidato descriva gli ammortamenti

   (a) dimostri l'equivalenza tra la condizione di chiusura elementare e la condizione di chiusura iniziale
   (b) descriva le principali caratterstiche dei vari piani di ammortamento
   (c) descriva la differenza tra la rata francese e la rata americana

2. Sia data la seguente operazione finanziaria:

   - deposito il capitale C in un conto corrente il 7/7/2019 che paga interessi ad un tasso $j(2) = 3\%$ (ricordare che $j(m)$non è un tasso)
   - dopo 6 mesi verso mensilmente un importo pari ad $\frac{1}{2}$ di C su tali versamenti la banca mi riconosce un tasso i pari al 2%;
   - dopo un anno verso un importo pari a 2C .

   Si determini il valore di C ipotizzando che al 7/07/2021 sul conto sono disponibili €500.000 e la banca ha detratto dal mio conto ogni 6 mesi €25 e il tasso d'interesse su mercato e' sempre del 2%

3. Kevyn chiede un prestito chiedendo di pagare una rata costante semestrale pari a €71.000 per un massimo di 2 anni, ipotizzando che vi sia un tasso pari a $i = 0,0302$ si determini l'importo che Kevyn dovrà rimborsare.

   - redigere il piano di ammortamento;
   - si ipotizzi che dopo i primi tre semestri la banca chieda a Kevyn un pagamento aggiuntivo pari al 5% del debito residuo in coincidenza del pagamento delle restanti rate. Si determini il tasso effettivo corrisposto per tale prestito da Kevyn.
   - calcolare la NP e l'Usufrutto dopo il pagamento della 4 rata sul prestito originario, immaginando che il tasso di mercato sia pari al 3,5%.

4. 0ggi sul mercato Statunitense i Treasury Bills hanno i seguenti fattori di sconto:

$$\begin{aligned} v(0, 6mesi) &= \quad 0,995 \\ v(0,1) &= \quad 0,992 \\ v(0;1,5) &= \quad 0,989 \\ v(0,2) &= \quad 0,98 \end{aligned}$$

   - calcolare i corrispondenti tassi spot;
   - calcolare i tassi forward che potranno valere tra un anno.

5. Tizio acquista un'obbligazione triennale il 7/01/2020 che paga cedole semestrali corrisposte ad un tasso $j(2) = 4\%$.

   - Calcolare il prezzo dell'obbligazione in data odierna utilizzando i dati dell'esercizio precedente
   - calcolare, inoltre, la Duration del titolo ipotizzando che la curva dei tassi sia piatta con un tasso pari alla media dei tassi spot calcolati nell'esercizio su Treasury bill.
   - Si ipotizzi, inoltre che tale tasso possa aumentare di 25 punti base tra sei mesi, calcolare la variazione che riportera' il prezzo del titolo al 7/01/2022, utilizzando l'informazione sulla duration.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Vedi manuale.

ESERCIZIO 2

- Calcolo il tasso effettivo annuo:

$$i = (\frac{j(2)}{2} + 1)^2 = (\frac{0.03}{2} + 1)^2 = 0,302 \tag{1}$$

Il valore del deposito del capitale C dopo 2 anni sarà pari a:

$$V_1 = C(1 + 0,0302)^2 \tag{2}$$

- Sapendo che la seconda operazione ha un tasso $i = 2\%$, allora avrà un tasso $i_{12} = (1 + 0,02)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,165\%$ Il valore della seconda operazione dopo 2 anni sarà pari a:

$$V_2 = \sum_{k=0}^{18} \frac{1}{2} C(1 + 0,02)^{\frac{k}{12}} = \frac{1}{2} C s_{19|0,00165} = \frac{1}{2} C 19,285 \tag{3}$$

- Il valore del versamento effettuato dopo un anno pari a 2C si ipotizza che venga effettuato al tasso $i = 2\%$ dunque risulta pari a:

$$V_3 = 2C(1 + 0,02)^1 \tag{4}$$

- le detrazioni pari a 25 €fatte semestralmente dalla banca ammontano dopo due anni alla quantità (negativa):

$$V_4 = -\sum_{k=0}^{4} 25(1 + 0,02)^{\frac{k}{2}} = -25 s_{5|0,995\%} = -127,51 \tag{5}$$

Il valore di C dunque sarà dato dall'equazione (dove l'incognita è rappresentata da C):

$$500.000€ = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \tag{6}$$

C è pari a circa 39244,73 €

ESERCIZIO 3

L'ammontare del debito si può calcolare facendo la somma delle rate attualizzate al tempo t=0.

$$D = \sum_{k=1}^{4} 71000(1 + 0,0302)^{-\frac{k}{2}} = 71000 a_{4|i_{sem}} = 273669,55 \tag{7}$$

In cui k è il semestre.

Il piano di ammortamento diventa dunque il seguente, avendo cura di calcolare gli interessi I_k utilizzando il tasso semestrale $(1 + 0,0302)^{0,5} - 1 = 0,0150$:

tempo	Rk	Ck	D	Ik
0			273669,5	
0,5	71000	66898,33	206771,2	4101,67
1	71000	67900,98	138870,2	3099,02
1,5	71000	68918,66	69951,6	2081,34
2	71000	69951,59	0,0	1048,41

L'ammontare che la banca chiede a Kevyn dopo i primi tre semestri è pari a $0,05 * 69951,59 = 3497,58$. Per trovare il tasso di interesse effettivo corrisposto da Kevyn è necessario risolvere la seguente equazione:

$$273669,55 = 71000 a_{3|i_2} + (71000 + 3497,58)(1 + i_2)^4 \tag{8}$$

Il valore di NP e Usufrutto dopo il pagamento della quarta rata sono nulli poichè le rate sono già state tutte pagate.

ESERCIZIO 4

Otteniamo i tassi spot (in base annua):

- $i(0, \textit{6 mesi}) = (\frac{1}{0{,}995})^2 - 1 = 0,01$
- $i(0,1) = \frac{1}{0{,}992} - 1 = 0,008$
- $i(0;1,5) = (\frac{1}{0{,}989})^{\frac{1}{1,5}} - 1 = 0,0074$
- $i(0,2) = (\frac{1}{0{,}98})^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,1$

Tassi forward $i(0;1,T)$*(in base annua)*:

- $i(0;1;1,5) = (\frac{m(0;1{,}5)}{m(0,1)})^2 - 1 = (\frac{v(0,1)}{v(1;1{,}5)})^2 - 1 = (\frac{0{,}992}{0{,}989})^2 - 1 = 0,006$
- $i(0;1,2) = \frac{v(0,1)}{v(0,2)} - 1 = \frac{0{,}992}{0{,}98} = 0,012$

ESERCIZIO 5

Il valore dell'obbligazione B (supponendo K=100) in data odierna (7/7/2021) è data da:

$$V(0;B) = 2v(0, \textit{6 mesi}) + 2v(0,1) + 102v(0;1,5) = 104,85 \tag{9}$$

La media dei tassi spot calcolati all'esercizio precedente è 3,1%, dunque la Duration odierna con la struttura piatta è data da:

$$D(0,B) = \frac{0,5 \cdot 2(1,031)^{-0,5} + 1 \cdot 2(1,031)^{-1} + 1,5 \cdot 102(1,031)^{-1,5}}{2(1,031)^{-0,5} + 2(1,031)^{-1} + 102(1,031)^{-1,5}} = 1,47 \approx \textit{1 anno, 5 mesi e 19 giorni} \tag{10}$$

Per ottenere la variazione di prezzo che otterrà il titolo al 7/01/2022 bisogna utilizzare la seguente relazione:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\Delta i \cdot \frac{D}{1+i} \tag{11}$$

Sapendo che:

$$D(t;B) = D(0;B) - t \tag{12}$$

abbiamo che la Duration del titolo tra 6 mesi sarà pari a 0,97. Quindi:

$$\Delta V = -0,0025 \cdot \frac{0,97}{1+0,031} \cdot 101,34 \approx -0,24 \tag{13}$$

1. (punti 6) (T) Si descriva cosa è un regime finanziario e una legge finanziaria
   (a) si evidenzi la differenza tra legge e regime;
   (b) si confrontino le leggi di sconto: analiticamente e graficamente;
   (c) cosa sono i tassi equivalenti?
   (d) Si descriva la forza d'interesse e il tasso istantaneo d'interesse.

2. (punti 4)Valerio deposita in banca un capitale di C= €30.000 con l'intento di ritirare il capitale accumulato dopo tre anni. La banca riconosce un tasso semestrale dell'1,25% per i primi 6 mesi e propone un aumento del tasso annuo di 20 punti base ogni sei mesi. A partire dal dodicesimo mese Valerio versa €100 sul conto ogni tre mesi e sei mesi prima di riscuotere la somma accumulata preleva dal conto €350. Il candidato:
   (a) determini quanto preleverà Valerio dopo 36 mesi;
   (b) una volta calcolato il Montante al punto a) si determini quale sarebbe stato il tasso di interesse applicato per l'operazione rappresentata dal versare C al tempo iniziale, riscuotere M a tempo finale, in capitalizzazione semplice.

3. (punti 4) Per acquistare una casa prendi in prestito €150.000 che rimborserai in cinque anni. La banca ti propone due opzioni per il rimborso
   (a) versare una rata costante annuale calcolata al tasso nominale convertibile 4 volte nell'anno del 3,5%
   (b) Rimborsare il capitale alla scadenza versando interessi annualmente ad un tasso $i = 3.4\%$; e versare una quota di capitale su un fondo di accumulo che prevede la costituzione a scadenza di €150.000 ad un tasso $j = 3.2\%$
      - Confrontare i due piani di rimborso e descrivere i vantaggi e svantaggi delle due opzioni.

4. (punti 4) Hai Acquistato un Buono Ordinario del Tesoro con scadenza 12 mesi il 7/06/2021 al prezzo P=987,5, oggi lo rivendi a Mario al al prezzo $P_1 = 987,0$. Determinare:
   (a) il rendimento da te realizzato;
   (b) il rendimento che Mario si aspetta di realizzare.

5. Alitalia ha emesso obbligazioni promettendo una cedola semestrale calcolata sulla base di $j(2) = 3\%$ che scadono tra tre anni. Valore nominale €10.000 e collocate sul mercato ad un prezzo di €9870
   (a) Calcolare il rendimento effettivo di tali obbligazioni.
   (b) Ipotizzare che tra un anno l'obbligazione venga venduta al prezzo €9900; Calcolare il TIR di tale obbligazione .

6. Si Calcoli la duration dell'obbligazione illustrata nell'esercizio precedente il 7/9/2022:
   (a) si ipotizzi che in quella data si disponga dei prezzi di titoli di puro sconto con le seguenti scadenze :
      $\text{BOT}_6 = 993$
      $CTZ_1 = 987$
      $Ctz_{1.5} = 980$
      $CtZ_2 = 977$
   (b) qual'è il corso secco dell'obbligazione in quella data.

7. (T) Il candidato descriva la Nuda Proprietà e l'Usufrutto :
   (a) descriva la formula di Makeham, e dimostri che può essere applicata a tutti i tipi d'ammortamento.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Vedi manuale.

ESERCIZIO 2

1. Siccome è il tasso annuale ad "evolversi", lo calcolo:

$$i = (1 + i_{sem})^2 - 1 = (1 + 0,0125)^2 - 1 = 2,52\% \tag{1}$$

Il montante, dopo 3 anni, dell'operazione finanziaria è dato da:

$$\begin{aligned}
M(0;3) =& C \cdot \prod_{k=0}^{5} (1 + i + 0,0020 \cdot k)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ 100 \cdot \prod_{k=2}^{5} (1 + i + 0,0020 \cdot k)^{\frac{1}{2}} + 100(1 + i + 0,0020 \cdot 2)^{\frac{1}{4}} \cdot \prod_{k=3}^{5} (1 + i + 0,0020 \cdot k)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ 100 \cdot \prod_{k=3}^{5} (1 + i + 0,0020 \cdot k)^{\frac{1}{2}} + 100(1 + i + 0,0020 \cdot 3)^{\frac{1}{4}} \cdot \prod_{k=4}^{5} (1 + i + 0,0020 \cdot k)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ 100 \cdot \prod_{k=4}^{5} (1 + i + 0,0020 \cdot +100k)^{\frac{1}{2}} + 100(1 + i + 0,0020 \cdot 4)^{\frac{1}{4}} (1 + i + 0,0020 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ 100(1 + i + 0,0020 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} \\
&- 350(1 + i + 0,0020 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} \\
&= 33173,57
\end{aligned} \tag{2}$$

2. Il tasso di interesse cercato è i in:

$$M(0;3) = C * (1 + 3i) \tag{3}$$

quindi, i è dato da:

$$\begin{aligned}
i &= (\frac{M(0;3)}{C} - 1)\frac{1}{3} \\
&= (\frac{33173,57}{30000} - 1)\frac{1}{3} \\
&\approx 3,53\%
\end{aligned} \tag{4}$$

ESERCIZIO 3

1. Il tasso è pari a:

$$i = (1 + \frac{0,035}{4})^4 - 1 \approx 3,55\% \tag{5}$$

Quindi la rata costante annuale è pari a:

$$R = \frac{150000}{a_{5|0,0355}} = 40886,15 \tag{6}$$

2. La quota di interessi versata annualmente è pari a $150000 \cdot 0,034 = 5100$. La quota capitale viene versata in un fondo di accumulo con tasso i pari a:

$$i = (1 + \frac{0,032}{2})^2 - 1 = 0,0323 \tag{7}$$

$$A_k = \frac{150000}{s_{5|3,23\%}} = 28123,58 \tag{8}$$

Dunque, la somma delle due quote definisce una rata costante R pari a: $28123,58 + 5100 = 33223,58$

Si evince che il secondo piano di ammortamento risulta essere più conveniente in termini di esborso, avendo una rata nettamente inferiore.

ESERCIZIO 4

1.
$$TIR_{annuo} = (\frac{987}{987,5})^{\frac{12}{3}} - 1 = -0,20\% \tag{9}$$

2.
$$TIR_{annuo} = (\frac{1000}{987})^{\frac{12}{9}} - 1 = 1,76\% \tag{10}$$

ESERCIZIO 5

Essendo j(2) = 3% la cedola semestrale sarà pari a $10000 \cdot 0,015 = 150$

1. Il rendimento effettivo (in base semestrale) è dato dal tasso i_2 che risolve la seguente equazione:
$$150a_{6|i_2} + 10000(1+i_2)^{-6} - 9870 = 0 \tag{11}$$

2. Supponendo che invece l'obbligazione venga pagata 9900 € tra 1 anno, il TIR (sempre in base semestrale) è dato dal tasso i_2 che risolve la seguente equazione:
$$150a_{4|i_2} + 10000(1+i_2)^{-4} - 9900 = 0 \tag{12}$$

ESERCIZIO 6

1. Utilizzo i prezzi dei titoli di puro sconto dati come fattori di sconto, dividendoli prima per il rimborso finale (pari a 1000).
$$\begin{aligned} D_{7/9/2022} &= \frac{0,5 \cdot 150 \cdot 0,993 + 150 \cdot 0,987 + 1,5 \cdot 150 \cdot 0,980 + 2 \cdot 10150 \cdot 0,977}{150 \cdot 0,993 + 150 \cdot 0,987 + 150 \cdot 0,980 + 10150 \cdot 0,977} \\ &= 1,957 \approx \textit{1 anno, 11 mesi e 15 giorni} \end{aligned} \tag{13}$$

2. Il corso secco dell'obbligazione è rappresentato dal denominatore della Duration calcolata sopra, pari a 10360,55 €.

ESERCIZIO 7

Vedi manuale.

1. (T)Il candidato descriva gli ammortamenti
   (a) La condizion Iniziale e a condizione elementare. Dimostri l'equivalenza.
   (b) come si determina il TAEG d un piano di ammortamento?
   (c) Cos'è la Nuda proprietà e l'Ususfrutto?

2. Si consideri la seguente operazione:
   (a) deposito C= €1.000 ogni 6 mesi e la banca riconosce interessi ad un tasso $j(2) = 3\%$.
   (b) posso inoltre versare ogni 12 mesi un importo di €500 che verranno remunerati ad un tasso i da determinare
   (c) A quale tasso deve essere remunerato il capitale per avere dopo due anni un importo pari a €12.200.

3. Un piano di ammortamento per il rimborso di un mutuo di €200.000 in 3 anni con pagamenti semestrali viene costruito ipotizzando di versare le prime tre rate costanti calcolate a un tasso $i = 0,03$ e le altre una pari al doppio della precedente :
   (a) redigere il piano di ammortamento;
   (b) si ipotizzi che dopo il pagamento della quarta rata la Banca chieda il rimborso di metà del debito residuo e di ricalcolare il valore delle rate
   (c) si determini ex posto il tasso effettivo pagato per il mutuo.

4. 0ggi sul mercato abbiamo i seguenti prezzi dei titoli di puro sconto :

$$\begin{aligned} P(0,6mesi) &= && 998 \\ P(0,1) &= && 995 \\ P(0;1,5) &= && 990 \\ P(0,2) &= && 988 \end{aligned}$$

   (a) calcolare i corrispondenti tassi spot.
   (b) Calcolare i tassi forward che potranno valere tra un anno.
   (c) Calcolare il prezzo di un'obbligazione che scade tra 2 anni, valore nominale K=1000 e paga cedole al tasso $j(2) = 4\%$ utilizzando i tassi spot calcolati al punto precedente.
   (d) Calcolare, inoltre, la Duration del titolo ipotizzando che la curva dei tassi sia piatta con un tasso pari alla media dei tassi spot calcolati.

5. Descrivere la relazione tra prezzo di un'obbligazione e numero di cedole

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Vedi manuale.

ESERCIZIO 2

Supponiamo che la valutazione del capitale dopo 2 anni venga fatta immediatamente dopo il quarto versamento di C, ed il terzo versamento dei 500 €.

Se $j(2) = 3\%$ allora $i_{sem} = 0,03/2 = 1,5\%$, quindi, il tasso i^* chiesto nel punto (b) è quello che risolve la seguente equazione:

$$\begin{aligned} 12.200 &= 1000 s_{4|i_{sem}} + 500 s_{3|i^*} \\ 12.200 &= 4090,90 + 500\frac{(1+i^*)^3 - 1}{i^*} \end{aligned} \tag{1}$$

In cui i^* è circa 2,43, ovvero 243% .

ESERCIZIO 3

Calcolo la rata sfruttando la relazione:

$$C = \sum k = 1^n R_k v(t, t_k) \tag{2}$$

Ovvero:

$$200000 = Ra_{3|i_2} + 2R(1+i)^{-2} + 4R(1+i)^{-2,5} + 8R(1+i)^{-3} \tag{3}$$

Utilizzando $i = 0,03$ e $i_2 = 0,01489$ R è pari a 12630,87, le altre poste del piano di ammortamento sono state calcolate seguendo le solite regole. Ovvero $I_k = i_2 D_{k-1}$ e $C_k = R_K - I_k$. Per il punto (b) supponiamo che il

t (anni)	Rk	Ck	Dk	Ik
0			200000	
0,5	12630,87	9653,04	190346,96	2977,83
1	12630,87	9796,76	180550,2	2834,11
1,5	12630,87	9942,63	170607,57	2688,24
2	25261,74	22721,54	147886,03	2540,2
2,5	50523,48	48321,58	99564,45	2201,9
3	101046,96	99564,53	-0,08	1482,43

Figure 1: Piano di ammortamento punto (a) Esercizio 3

pagamento della metà del debito residuo avvenga contestualmente al pagamento della quarta rata. A quel punto il debito rimanente (99564,45/2) viene restituito con due rate l'una il doppio dell'altra. Risolvendo l'equazione:

$$49782,23 = R'(1+0,03)^{-0,5} + 2R'(1+0,03)^{-1} \tag{4}$$

da cui si ottiene $R' = 17007,49$

Il tasso effettivo (in base semestrale) pagato per il mutuo è dato dalla soluzione dell'equazione:

$$200000 = 12630,87 a_{3|i_2} + (25261,74 + 49872,22)(1+i_2)^{-4} + 17007,49(1+i_2)^{-5} + 2 \cdot 17007,49(1+i_2)^{-6} \tag{5}$$

ESERCIZIO 4

Calcolo dei tassi spot in base annua:

$$
\begin{aligned}
i(t,s) &= \left(\frac{P(t,s)}{1000}\right)^{-\frac{1}{s-t}} - 1 \\
i(0,\ \textit{6 mesi}) &= \left(\frac{998}{1000}\right)^{-\frac{1}{0,5}} - 1 \approx 0,401\% \\
i(0,1) &= \left(\frac{995}{1000}\right)^{-1} - 1 \approx 0,503\% \\
i(0;1,5) &= \left(\frac{990}{1000}\right)^{-\frac{1}{1,5}} - 1 \approx 0,672\% \\
i(0,2) &= \left(\frac{988}{1000}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \approx 0,605\%
\end{aligned} \tag{6}
$$

I tassi spot che potranno valere tra un anno(in base annua):

$$
\begin{aligned}
i(0;1;1,5) &= \left(\frac{(1+0,00672)^{1,5}}{(1+0,00503)^{1}}\right)^{2} - 1 \approx 0,504\% \\
i(0;1,2) &= \left(\frac{(1+0,00605)^{2}}{(1+0,00503)^{1}}\right)^{1} - 1 \approx 0,707\%
\end{aligned} \tag{7}
$$

Essendo il tasso $j(2) = 4\%$ le cedole dell'obbligazione del punto (c) saranno semestrali, con valore pari a 20 ciascuna. Pertando il prezzo, utilizzando i tassi spot calcolati al punto precedente, sarà pari a:

$$
V(0) = 20(1+0,00401)^{-0,5} + 20(1+0,00503)^{-1} + 20(1+0,00672)^{-1,5} + 1020(1+0,00605)^{-2} = 1067,43 \tag{8}
$$

Essendo la media dei tassi spot pari a 0,545%, la Duration del titolo sarà:

$$
\begin{aligned}
D(0) = &\frac{0,5\cdot 20(1+0,00545)^{-0,5} + 20(1+0,00545)^{-1} + 1,5\cdot 20(1+0,00545)^{-1,5} + 2\cdot 1020(1+0,00545)^{-2}}{20(1+0,00545)^{-0,5} + 20(1+0,00545)^{-1} + 20(1+0,00545)^{-1,5} + 1020(1+0,00545)^{-2}} \\
&= 1,944 \\
&= \textit{1 anno, 11 mesi e 14 giorni}
\end{aligned} \tag{9}
$$

ESERCIZIO 5

Vedi manuale.