

MATEMATICA E STATISTICA (PARI) – CdL in BIOLOGIA

SIMULAZIONE 1

1) Geometria analitica (6 punti)

Si considerino l'ellisse di centro $C(0; -1)$ e semiassi orizzontale a e verticale b di lunghezza pari a 1 e $\sqrt{3}$, rispettivamente, nonché la retta passante per i punti $A(-2; 2)$ e $B(1; -1)$.

- Si tracci il grafico delle due curve. (2 punti)
- Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra l'ellisse e la retta. (4 punti)

2) Studio di funzione: Eutrofizzazione di un lago (12 punti)

L'eutrofizzazione di un lago è un processo ecologico in cui un corpo idrico subisce un arricchimento eccessivo di nutrienti, in particolare azoto e fosforo, a causa di agenti inquinanti come fertilizzanti agricoli o scarichi domestici. Dopo un'iniziale calo della quantità di biomassa, dovuta alla diminuzione della qualità dell'acqua, vi è una crescita sempre maggiore di alghe e di altre piante acquatiche che man mano si adattano sempre di più al nuovo ecosistema, usufruendo del continuo aumento delle sostanze nutritive provenienti dagli stessi inquinanti. Questo processo ha effetti negativi sull'ecosistema del lago con moria della maggior parte della biodiversità inizialmente presente.

Sia data la seguente funzione, che modella la quantità di biomassa in un lago, in condizioni di eutrofizzazione e in funzione del tempo:

$$B(t) = \frac{t^2 + k}{t + 2}$$

Dove k è una costante che dipende dalle caratteristiche del bacino d'acqua interessato ed il tempo è dato in mesi.

Si vuole adattare la funzione ad un bacino d'acqua specifico, nel quale si è osservato un'inversione di tendenza nella quantità di massa e, quindi, un valore minimo di essa dopo un mese dall'inizio del processo di inquinamento.

- Trovare il valore che deve avere k perché la funzione possa essere adattata al lago considerato. (3 punti)
- Utilizzando il valore di k trovato, studiare la funzione generica $B(x)$, tracciandone il grafico. (7 punti)
- Tracciare un grafico per punti della funzione $B(t)$ che descriva il fenomeno nel corso di un anno. (2 punti)

3) Calcolo integrale: Eutrofizzazione di un lago – Popolazione ittica (8 punti)

Facendo riferimento alle condizioni di cui all'esercizio precedente, sia data la seguente funzione, che modella la velocità di variazione di popolazione ittica in condizioni di eutrofizzazione e in funzione del tempo:

$$v(t) = -k t e^{-t^2}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla che dipende dalla popolazione iniziale ed il tempo è dato in mesi.

- Ricavare la costante k nel caso di una popolazione iniziale di 1000 unità (si assuma nulla la costante di integrazione c). (5 punti)
- Dopo quanto tempo si può ritenere estinta la popolazione di pesci nel lago? (3 punti)

4) Statistica: La migrazione autunnale dei pettirossi (4 punti)

I pettirossi europei migrano principalmente dall'Europa settentrionale e centrale verso il Mediterraneo e l'Africa settentrionale. La migrazione autunnale inizia solitamente tra settembre e ottobre, quando i pettirossi lasciano le loro aree di riproduzione per spostarsi verso climi più miti. La durata del viaggio può variare notevolmente a seconda della distanza da percorrere e delle condizioni meteorologiche. I pettirossi, come molti altri uccelli migratori, preferiscono migrare di notte. Questo comportamento li aiuta a evitare i predatori e a ridurre lo stress dovuto alle condizioni climatiche ed utilizzano una combinazione di segnali visivi (come il sole e le stelle), il campo magnetico terrestre e la memoria geografica per orientarsi durante il viaggio. Durante la migrazione, i pettirossi fanno soste regolari per riposarsi e nutrirsi, accumulando energie per le tappe successive del loro viaggio.

Durante un periodo di dieci anni, viene tracciato via gps il percorso di migrazione autunnale di vari pettirossi nel percorso dalla Scandinavia verso l'Italia meridionale, ottenendo la tabella delle frequenze del numero di settimane impiegate nella migrazione:

Settimane	3	4	5	6	7	8
Frequenza	8	24	29	27	24	18

Si vuole validare l'ipotesi che il numero di settimane impiegate per la migrazione sia di 5 settimane, utilizzando un test adeguato.