INTEGRALI E STUDIO DI FUNZIONE

Studio di un insetticida

Viene condotto uno studio su un insetticida volto ad eliminare le infestazione di afidi nelle piante da frutto. Si ottiene che un'unità di volume di insetticida, pari a 100 ml, agisce con un'efficacia esprimibile con una funzione che esprime la velocità di variazione del numero afidi al minuto. Questa funzione sia la seguente:

$$v(t) = -ke^{-\sqrt{t}}$$

Dove *k* è una costante positiva non nulla, il tempo *t* è espresso in minuti e la velocità *v* è perciò in numero di afidi al minuto (min^{-1}).

a) Calcolare il valore che deve assumere *k* perché l'insetticida venga ottimizzato per una popolazione di afidi iniziale pari a 100 unità.
b) Studiare la funzione *v(t)* e rappresentarla graficamente.
c) Rappresentare graficamente, studiandola per punti, la funzione *N(t)* che descrive il numero di afidi in funzione del tempo e riportandola nello stesso grafico di *v(t)*.
d) Dopo quanto tempo la popolazione di afidi risulta debellata (i.e.: numero di afidi presenti inferiore all'unità)?

SOLUZIONE

Dati

N_0 = 100 batteri

Procedimento

Il numero di afidi in funzione del tempo sarà dato dall'integrale della velocità di azione dell'insetticida:

$$N(t) = \int v(t)\,dt = \int \left(-ke^{-\sqrt{t}}\right)dt = -k\int e^{-\sqrt{t}}dt$$

Trascurando momentaneamente il fattore moltiplicativo costante " *-k* ", questo integrale può essere risolto per SOSTITUZIONE:

$$x = \sqrt{t} \;\rightarrow\; t = x^2 \;\rightarrow\; dt = 2x\,dx$$

$$\int e^{-x}\cdot 2x\,dx = 2\int xe^{-x}\,dx$$

Usufruendo delle regole degli integrali riconducibili a quelli notevoli, questo integrale può essere a sua volta risolto per PARTI:

$$2\int xe^{-x}\,dx = -2\int x(-e^{-x})\,dx$$

$$-2\int x(-e^{-x})\,dx = -2\left(xe^{-x} - \int e^{-x}\,dx\right) = -2\left[xe^{-x} + \int(-e^{-x}\,dx)\right]$$

$$= -2\,[xe^{-x} + e^{-x} + c] = -2(x+1)e^{-x} + c$$

Ripristinando la variabile *t*, e reintroducendo il fattore " *-k* ", si ottiene infine:

$$N(t) = 2k\left(\sqrt{t}+1\right)e^{-\sqrt{t}}$$

Per ottenere *k* in funzione della popolazione iniziale, basta imporre *t=0*, ottenendo:

$$k = \frac{N_0}{2} = 50$$

Per quanto riguarda lo studio della funzione $v(t)$, si ottengono le seguenti derivate:

$$v'(t) = \frac{k}{2}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$$

$$v''(t) = -\frac{k}{4t}\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)e^{-\sqrt{t}}$$

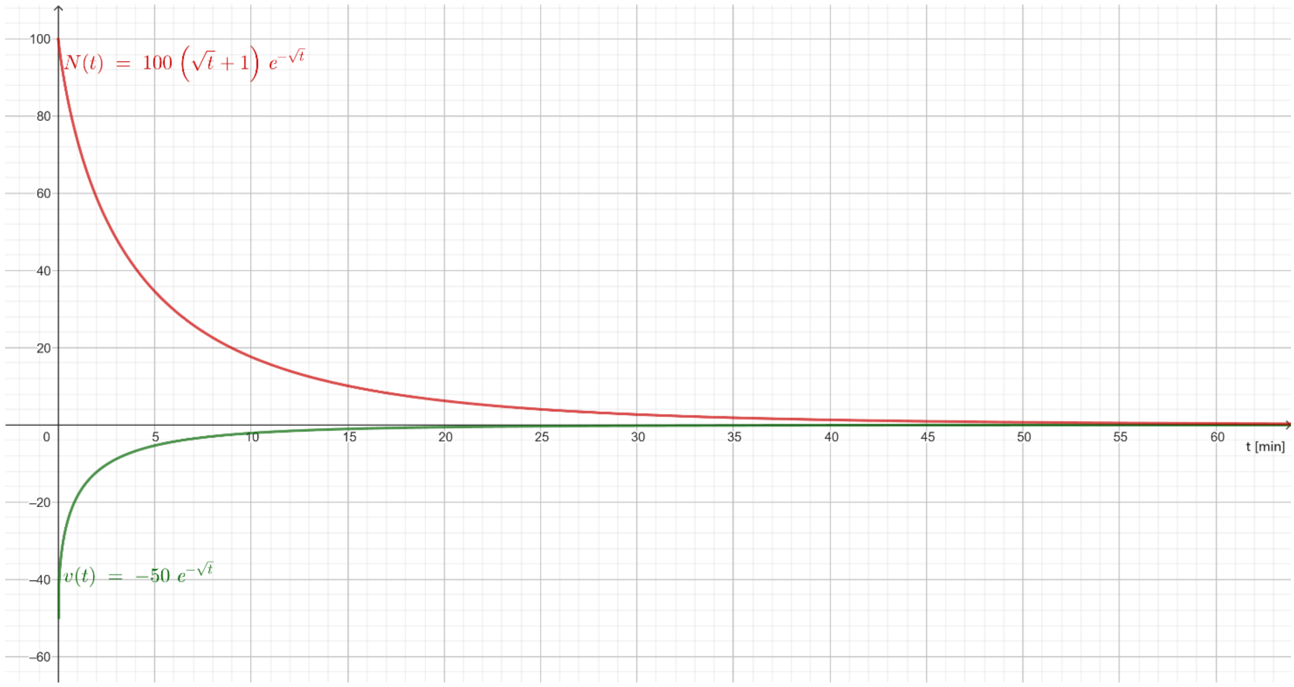
La derivata prima è sempre positiva (funzione crescente) e la derivata seconda è sempre negativa (concavità negativa). Inoltre, non vi sono massimi, minimi o flessi.

Studiando per punti $N(t)$, si può ottenere la seguente tabella:

t [min]	N
0	100,00
1	73,58
2	58,69
3	48,34
4	40,60
5	34,59
6	29,78
7	25,87
8	22,63
9	19,91
10	17,62
20	6,25
30	2,71
40	1,31
44	1,00
45	**0,94**

Dalla quale si evince che la popolazione di afidi può ritenersi debellata dopo 45 minuti.

Di seguito, vengono riportati i grafici delle funzioni $v(t)$ e $N(t)$.



$N(t) = 100\left(\sqrt{t}+1\right)e^{-\sqrt{t}}$
$v(t) = -50\,e^{-\sqrt{t}}$
100
80
60
40
20
0
−20
−40
−60
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
t [min]