

INTEGRALI E STUDIO DI FUNZIONE

Proliferazione di una colonia batterica

Viene condotto uno studio sulla proliferazione batterica all'interno di un campione inizialmente costituito da 1500 microorganismi. Si ottiene che l'andamento della velocità di proliferazione può essere descritta dalla seguente funzione:

$$v_p(t) = \frac{kt}{t^2 + 3t + 2}$$

Dove k è una costante positiva non nulla, il tempo t è espresso in minuti e la velocità di proliferazione v_p in numero di batteri al minuto (min^{-1}).

- Calcolare il valore che deve assumere k perché la velocità di proliferazione dopo dieci minuti sia pari a 100 batteri al minuto.
- Calcolare dopo quanto tempo il numero di batteri raggiunge le 10 000 unità.
- Rappresentare graficamente la funzione $v_p(t)$.
- Rappresentare graficamente la funzione generica $v_p(x)$ con $k = 10$.

Nota: Arrivare fino al calcolo della derivata seconda, senza studiarne il segno né individuare i punti di flesso.

SOLUZIONE

Dati

$N_0 = 1500$ batteri; $v_p(t = 10 \text{ min}) = 100$ batteri/min; $N_x = 10\,000$ batteri

Procedimento

Calcoliamo k imponendo la condizione: $v_p(10) = 100$:

$$\frac{10k}{10^2 + 3 \cdot 10 + 2} = 100 \rightarrow k = 1320$$

Il numero di batteri in funzione del tempo sarà dato dall'integrale della velocità di proliferazione:

$$N(t) = N_0 + \int f(t) dt$$

Il problema chiede di trovare dopo quanto tempo t_x si ha $N = N_x$, ovvero:

$$N_x = N_0 + \int_0^{t_x} f(t) dt$$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito della funzione, utilizzando il metodo dei fratti semplici:

$$\int v_p(t) dt = k \int \frac{t dt}{t^2 + 3t + 2} = k \int \frac{t dt}{(t+1)(t+2)}$$

$$\frac{t}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} = \frac{(A+B)t + (2A+B)}{(t+1)(t+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

$$\frac{t}{(t+1)(t+2)} = \frac{-1}{t+1} + \frac{2}{t+2}$$

$$\begin{aligned} \int v_P(t) dt &= k \int \left(\frac{2}{t+2} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= k [2 \ln(t+2) - \ln(t+1)] + c = \\ &= k \ln \frac{(t+2)^2}{t+1} + c \end{aligned}$$

Possiamo così calcolare t_x tramite l'integrale definito tra 0 e t_x :

$$\begin{aligned} N_x &= N_0 + \int_0^{t_x} v_P(t) dt \\ k \left[\ln \frac{(t_x+2)^2}{t_x+1} - \ln 4 \right] &= N_x - N_0 \\ \frac{(t_x+2)^2}{t_x+1} &= e^{\frac{N_x - N_0}{k} + \ln 4} \\ \frac{(t_x+2)^2}{t_x+1} &= 2504 \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione fratta, si perviene alla seguente equazione di secondo grado:

$$t_x^2 - 2500t_x - 2500 = 0$$

che ammette come unica soluzione valida:

$$t_x = 2501 \text{ min} = 41 \text{ hr } 41 \text{ min}$$

Le derivate prima e seconda della funzione $v_P(t)$ sono, rispettivamente:

$$\begin{aligned} v_P'(t) &= k \frac{2-t^2}{(t^2+3t+2)^2} \\ v_P''(t) &= 2k \frac{t^3-6t-6}{(t^2+3t+2)^3} \end{aligned}$$

Di seguito, vengono riportati i grafici delle funzioni $v_p(t)$ e $v_p(x)$.

