

# Controlli automatici

## Proprietà filtranti dei sistemi LTI

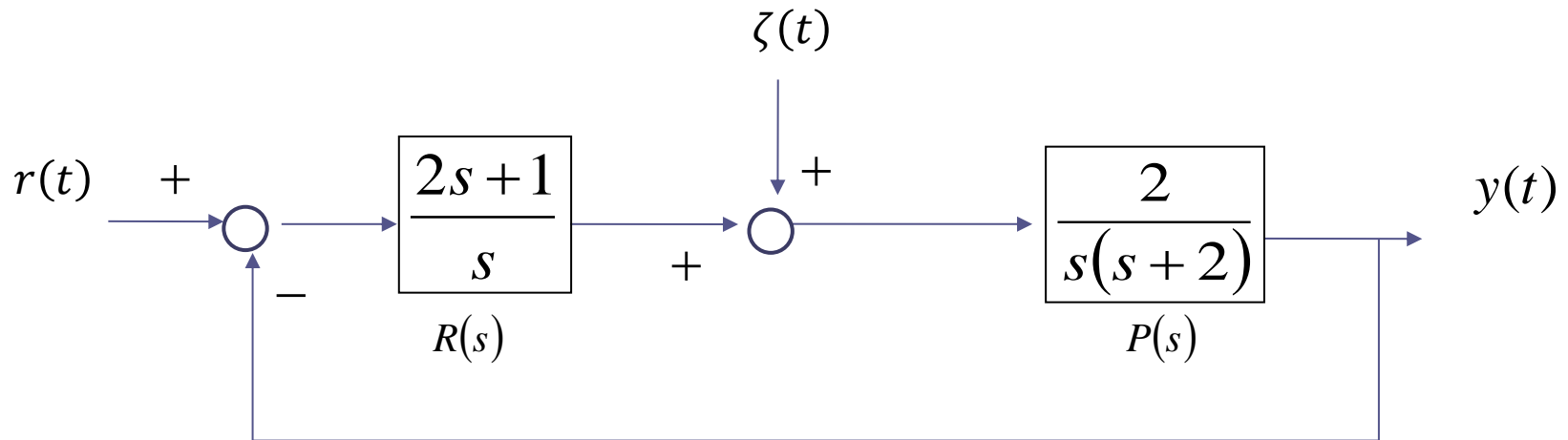
**Prof. Alessandro Pisano**  
`apisano@unica.it`

## Proprietà filtranti dei sistemi LTI

Alla luce di ciò che è stato visto in merito al concetto di risposta armonica, la funzione di risposta armonica, ed in particolare la sua rappresentazione grafica attraverso i diagrammi di Bode, definisce in modo puntuale le **proprietà filtranti** di un sistema dinamico lineare, cioè il fatto che segnali aventi una certa **banda** (l'intervallo di frequenze in cui sono contenute tutte le armoniche significative del segnale) si propaghino inalterati attraverso il sistema di controllo, o al contrario siano attenuati o sfasati in ritardo in una certa misura.

Analizziamo i diagrammi di Bode delle FdT a ciclo chiuso di un sistema di controllo precedentemente studiato in un esempio, e ragioniamoci su

Analizziamo i diagrammi di Bode delle FdT a ciclo chiuso di un sistema di controllo precedentemente studiato in un esempio, e ragioniamoci su



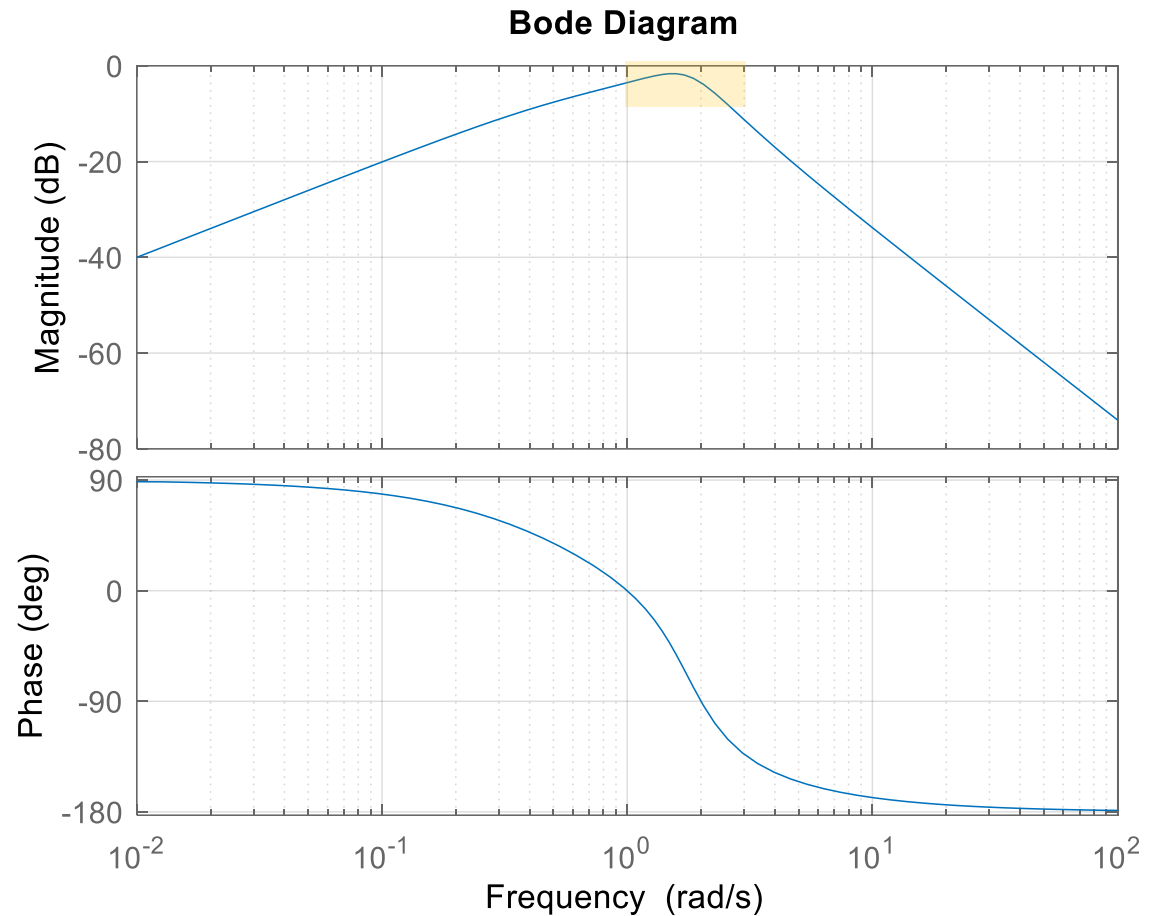
Le FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita e fra il disturbo e l'uscita sono le seguenti

$$W_r^y(s) = \frac{R(s)P(s)}{1+R(s)P(s)} = \frac{\frac{(2s+1)}{s} \cdot \frac{2}{s(s+2)}}{1 + \frac{(2s+1)}{s} \cdot \frac{2}{s(s+2)}} = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+2) + 2(2s+1)} = \frac{4s+2}{s^3+2s^2+4s+2}$$

$$W_\zeta^y(s) = \frac{P(s)}{1+R(s)P(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+2)}}{1 + \frac{(2s+1)}{s} \cdot \frac{2}{s(s+2)}} = \frac{2s}{s^2(s+2) + 2(2s+1)} = \frac{2s}{s^3+2s^2+4s+2}$$

*FdT a ciclo chiuso **disturbo uscita***

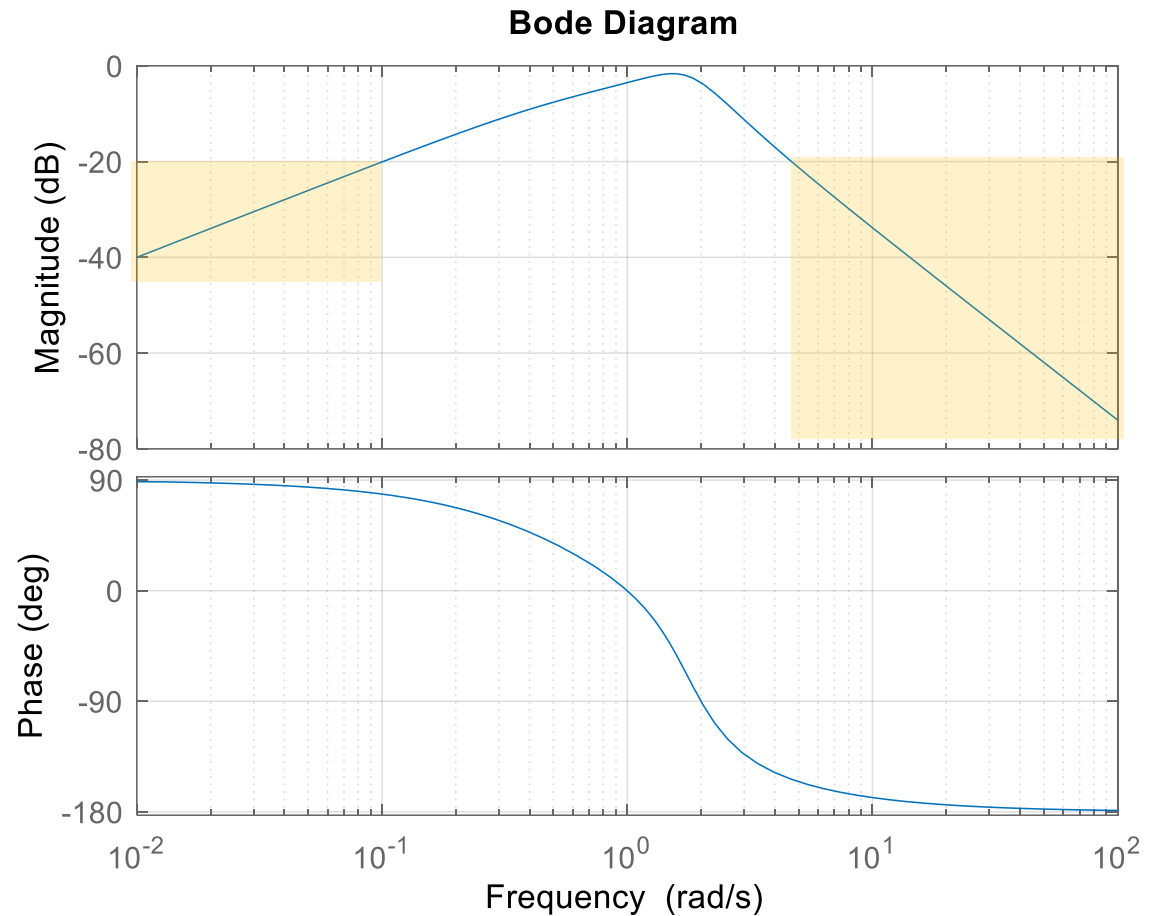
$$W_{\zeta}^y(s)$$



Il diagramma dei moduli ci rivela che **disturbi** aventi componenti spettrali nella banda  $[1 \div 3] \text{ rad/s}$  si propagano sull'uscita con una ampiezza pressochè inalterata, viceversa disturbi più in bassa frequenza o più in alta frequenza vengono attenuati in misura variabile (comportamento **passa-banda (band-pass)**).

*FdT a ciclo chiuso **disturbo uscita***

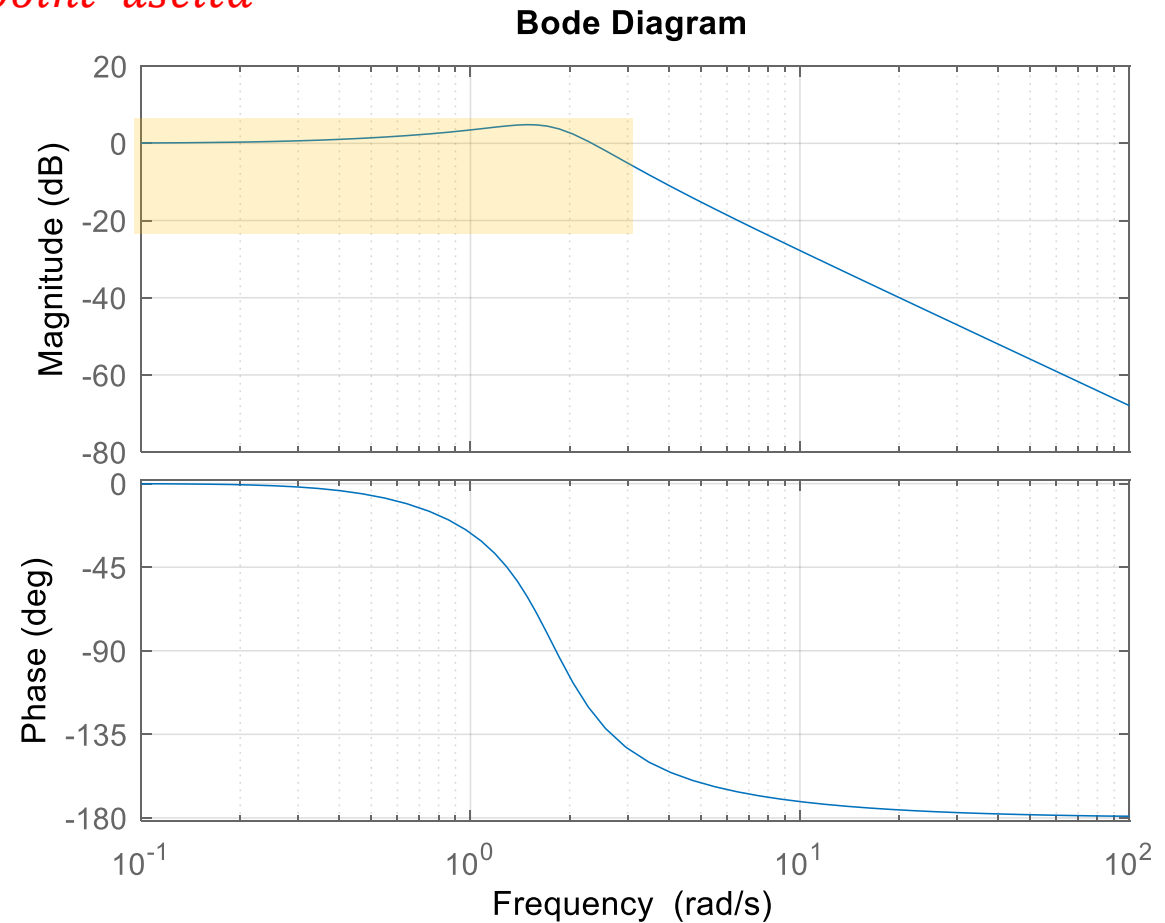
$$W_{\zeta}^y(s)$$



Tutti i disturbi aventi componenti spettrali negli intervalli  $[0 \div 0.1]$  rad/s e  $[5 \div 100]$  rad/s vengono **attenuati in ampiezza di un fattore almeno pari a 10, cioè del 90%** (questo perché in tali intervalli il diagramma del modulo sta sotto il valore di  $-20$  dB)

*FdT a ciclo chiuso set – point uscita*

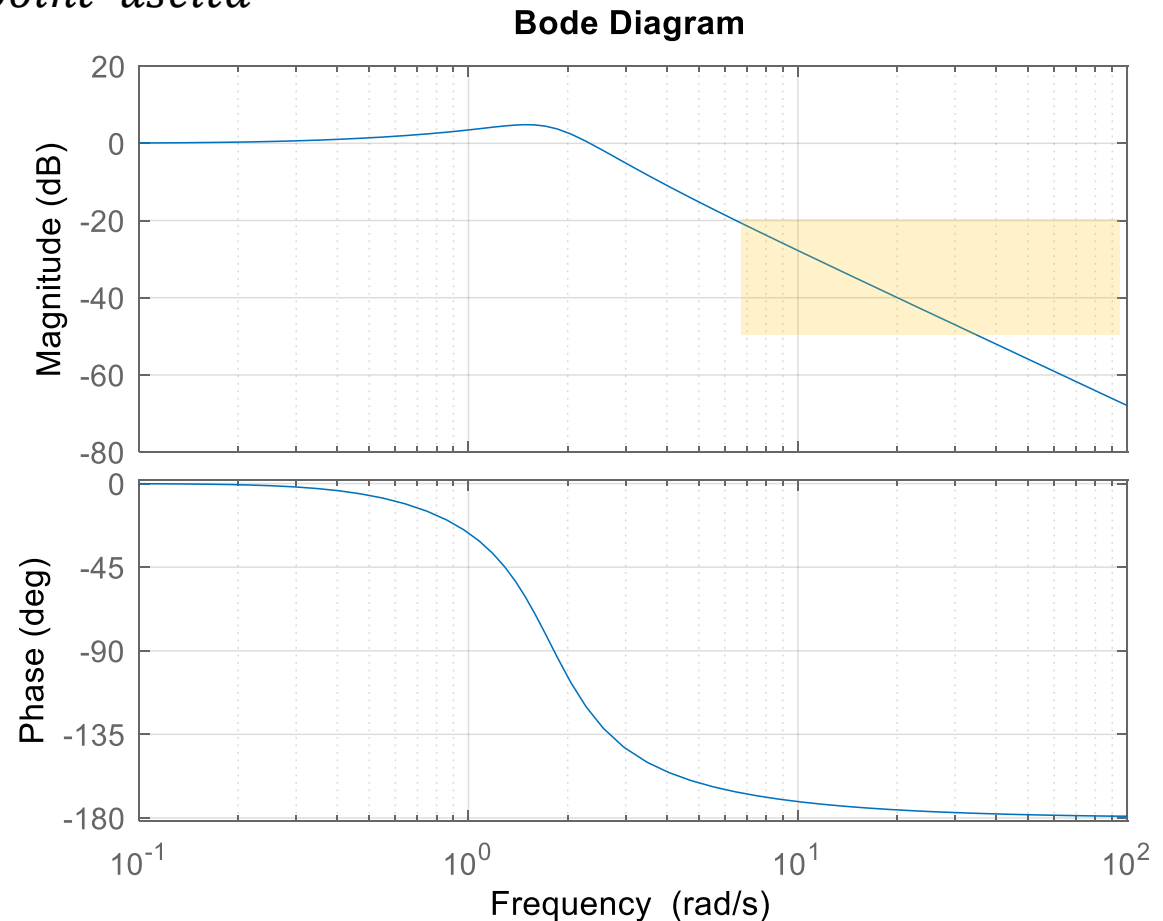
$$W_r^y(s)$$



Il diagramma dei moduli della FdT fra il set point e l'uscita ci rivela che set-point aventi componenti spettrali nella banda  $[0 \div 2.5]$  rad/s vengono replicati dall'uscita con una ampiezza pressoché inalterata.

*FdT a ciclo chiuso set – point uscita*

$$W_r^y(s)$$



Viceversa, set point con componenti spettrali piu in alta frequenza vengono attenuati in misura variabile (comportamento **passa-basso**). Ad esempio, set point con componenti spettrali di frequenza superiore agli 8 rad/sec vengono attenuati in misura almeno pari al 90% (si ricordi infatti che un valore in decibel di -20 corrisponde ad un valore naturale di 0.1)

## Banda passante

La banda passante è una grandezza che si associa a sistemi dinamici asintoticamente stabili e, in prevalenza, ai sistemi di controllo in retroazione.

In un sistema di controllo in retroazione la banda passante  $\omega_b$  viene letta nei diagrammi di Bode della FdT a ciclo chiuso  $W_r^y(s)$  fra il set point e l'uscita.

È la pulsazione  $\omega_b$  tale che

$$|W_r^y(j\omega)| > |W_r^y(j0)| - 3dB \quad \forall \omega < \omega_b$$

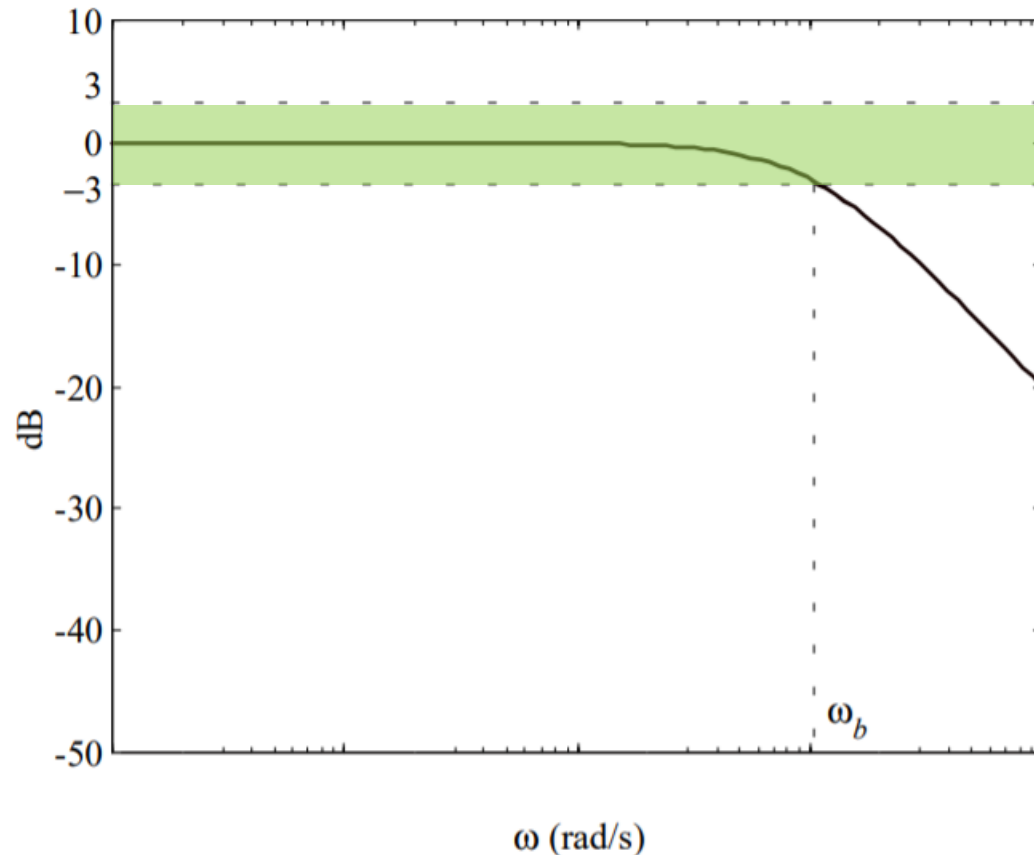
$$|W_r^y(j\omega)| \leq |W_r^y(j0)| - 3dB \quad \forall \omega > \omega_b$$

Per frequenze superiori alla banda passante, l'attenuazione dell'ampiezza rispetto al valore di attenuazione a frequenza nulla è inferiore a  $-3dB$  (in termini naturali  $1/\sqrt{2}$ , in termini percentuali circa il 70%).

Il valore equivalente in Hz viene denotato come  $B_3$ .

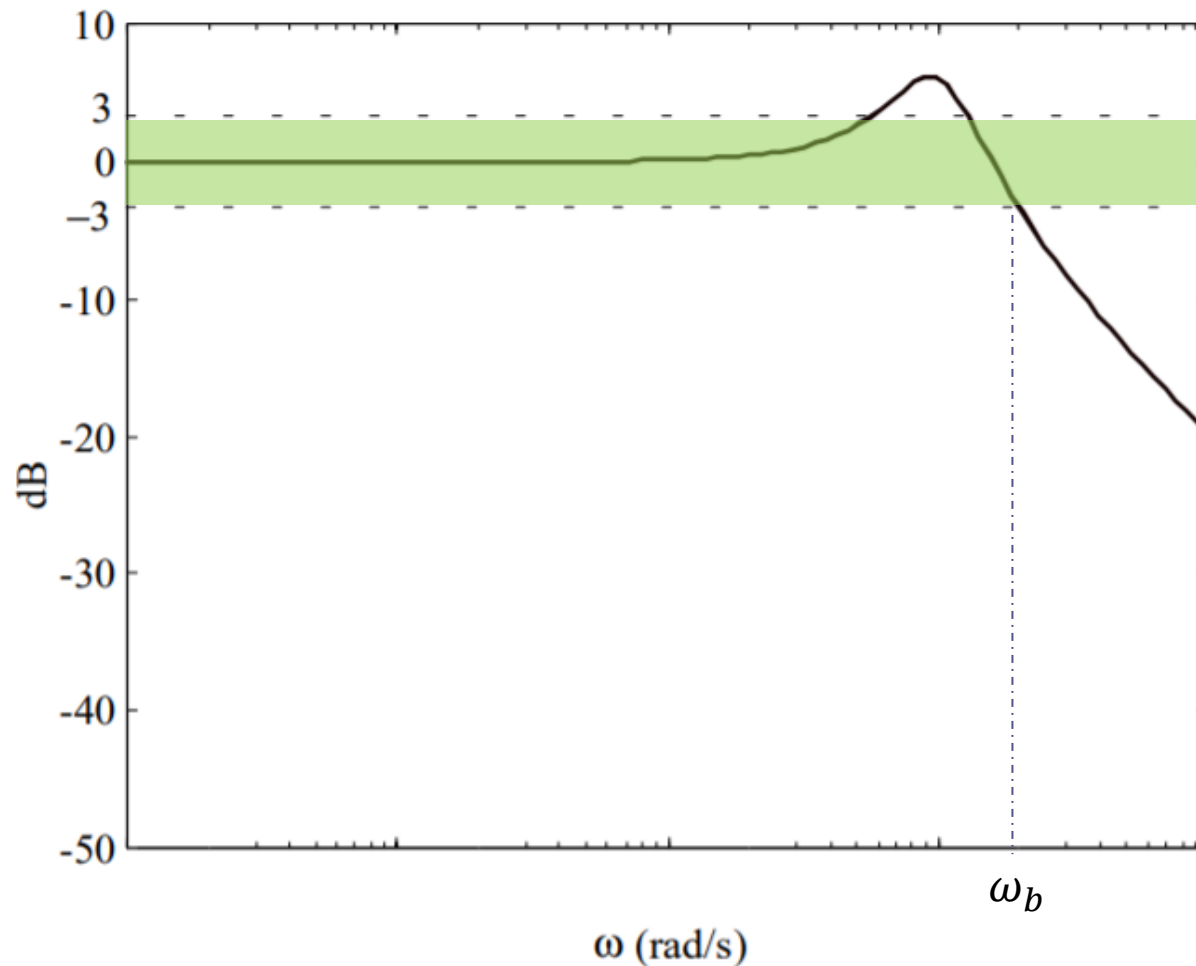
La banda passante è un indicatore delle **proprietà filtranti** di un sistema di controllo ma anche della sua **prontezza di risposta**

Tipico diagramma di Bode dei moduli di una FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita



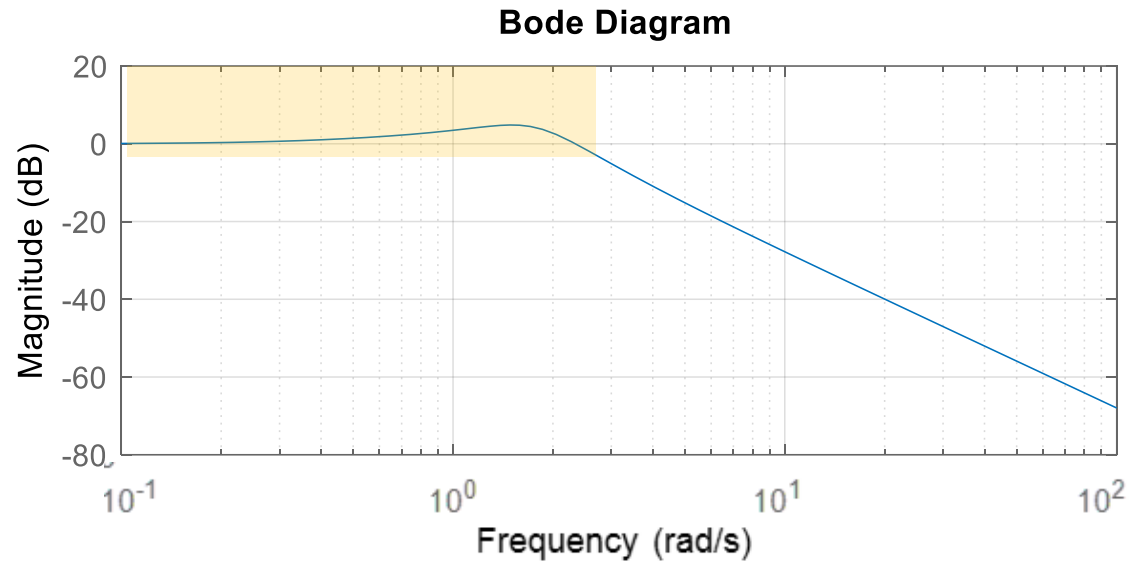
**L'uscita replica con ampiezza pressoché inalterata tutti i set-point con banda pari o inferiore alla banda passante.**

Banda passante nel caso di FdT a ciclo chiuso avente una **risonanza** (si ha una risonanza quando nella FdT a ciclo chiuso sono presenti poli complessi coniugati)



*FdT a ciclo chiuso set – point uscita dell'esempio precedente*

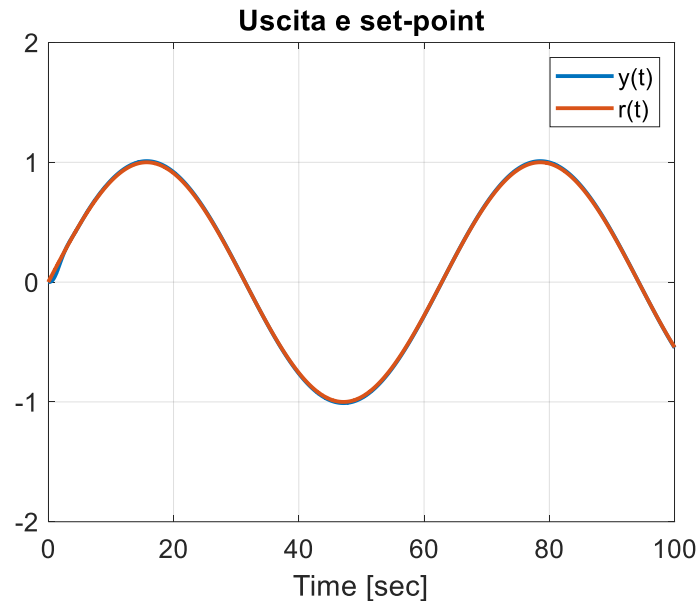
$$W_r^y(s)$$



Il sistema di controllo oggetto del precedente esercizio ha una banda passante  $\omega_b$  intorno ai 2.5 rad/secondo

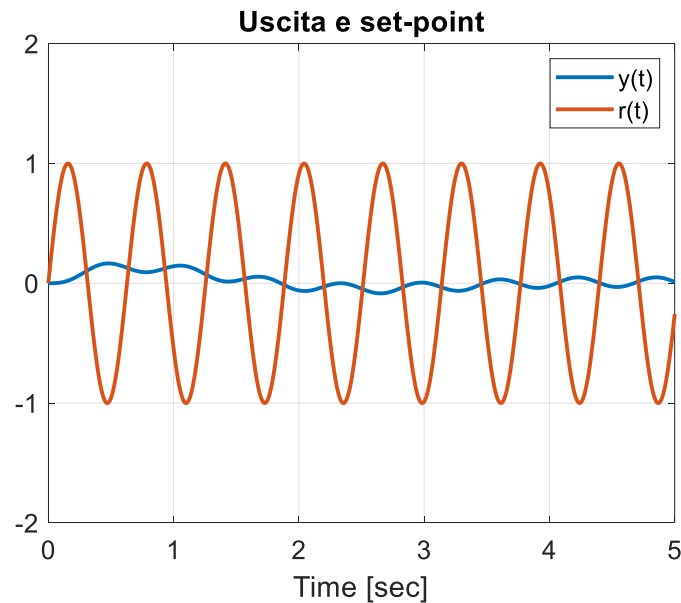
Nella successiva slide vediamo alcuni risultati simulativi in merito all'applicazione di set point sinusoidali aventi frequenza interna alla banda passante o esterna

$$r(t) = \sin(0.1t)$$



Set point **in banda**  
**passante** viene  
riprodotto fedelmente

$$r(t) = \sin(10t)$$



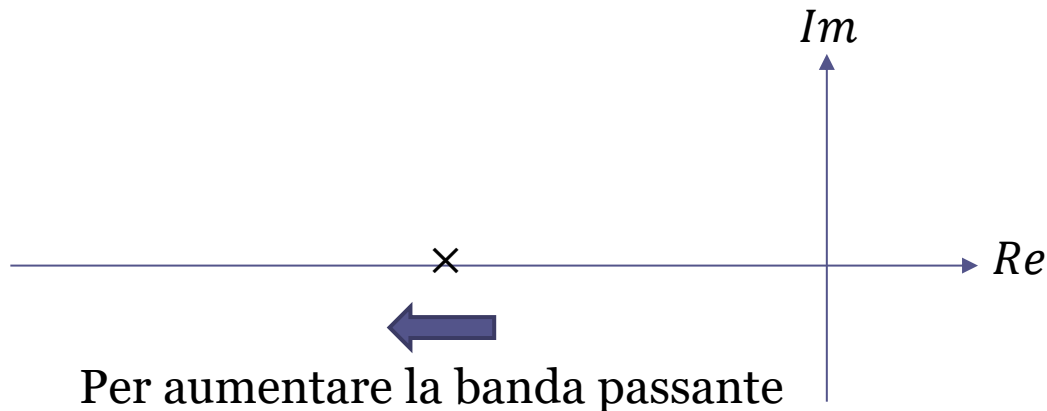
Set point **fuori banda**  
**passante** viene attenuato  
in ampiezza in maniera  
significativa

## Banda passante di sistemi del primo ordine

$$G_1(s) = \frac{\mu}{1 + sT}$$

$$\omega_b = \frac{1}{T}$$

La banda passante aumenta se si riduce al costante di tempo  $T$  del polo (cioè se il polo si sposta verso le alte frequenze)

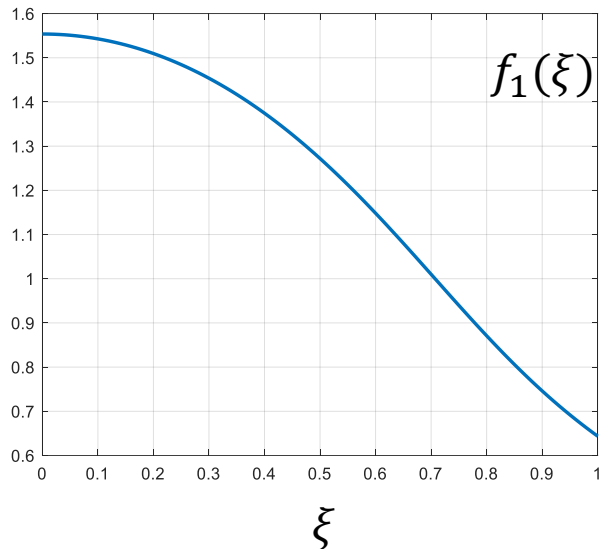


Anche se sono presenti **più poli reali**, la loro traslazione verso le alte frequenze produce un aumento della banda passante

## Banda passante di sistemi del secondo ordine

$$G_2(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}} = \omega_n f_1(\xi)$$



La banda passante è direttamente proporzionale alla pulsazione naturale, ed esibisce un certo grado di dipendenza anche dallo smorzamento, caratterizzato dal grafico a sinistra.

## Banda passante di sistemi del secondo ordine con due poli reali coincidenti

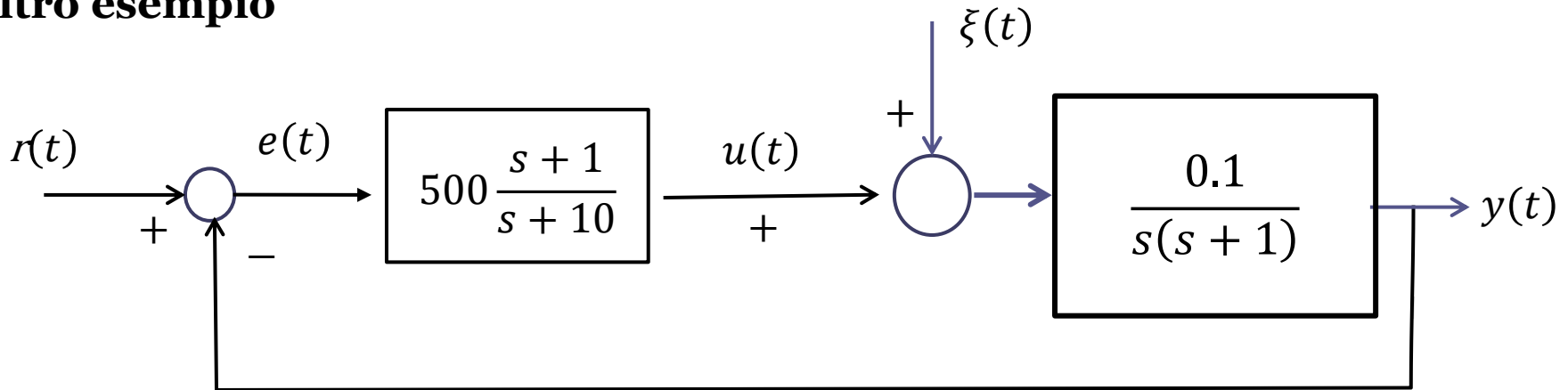
Si deduce dal precedente caso generale ponendo  $\xi = 1$

$$G_3(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} = \frac{\mu}{(Ts + 1)^2}$$

$$T = \frac{1}{\omega_n}$$

$$\omega_b = \omega_n f_1(\xi) \approx 0.65\omega_n = \frac{0.65}{T}$$

## Altro esempio



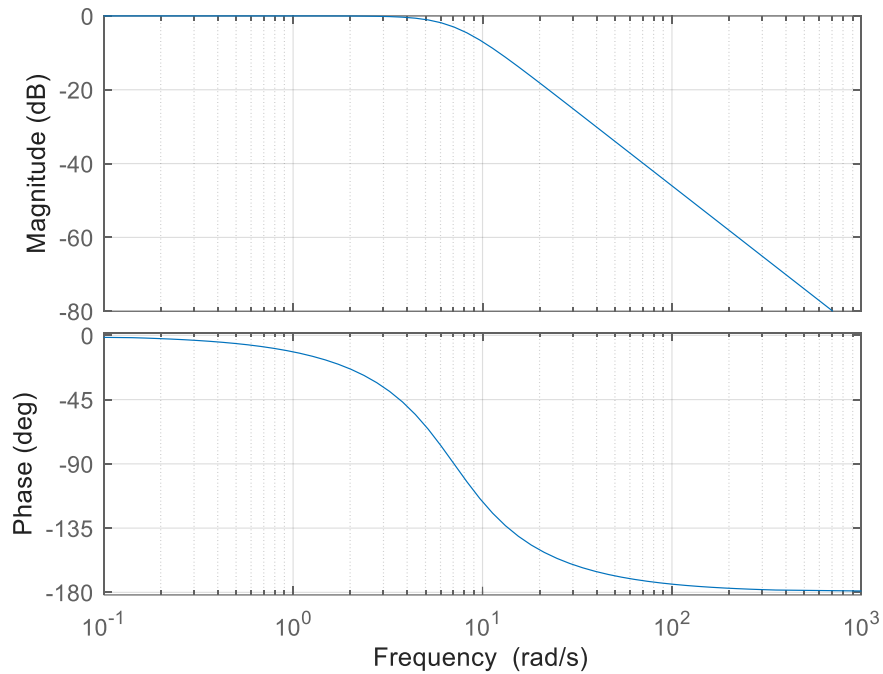
$$W_r^y(s) = \frac{50}{s^2 + 10s + 50}$$

```
figure(1)
bode(50, [1 10 50]), grid
title('Diagrammi di Bode di Wry(s)')
```

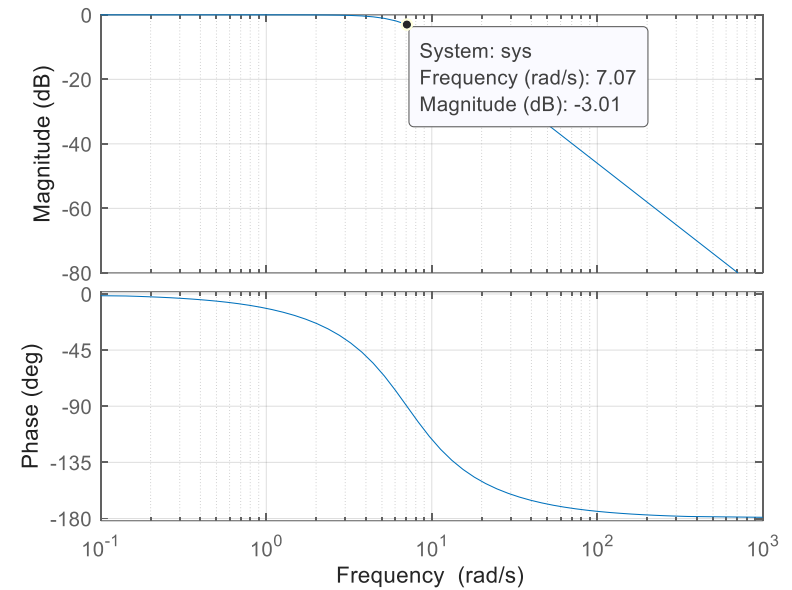
$$W_\xi^y(s) = \frac{0.1s + 1}{s^2 + 10s + 50}$$

```
figure(2)
bode([0.1 1], [1 10 50]), grid
title('Diagrammi di Bode di Wdy(s)')
```

Diagrammi di Bode di Wry(s)



Diagrammi di Bode di Wry(s)



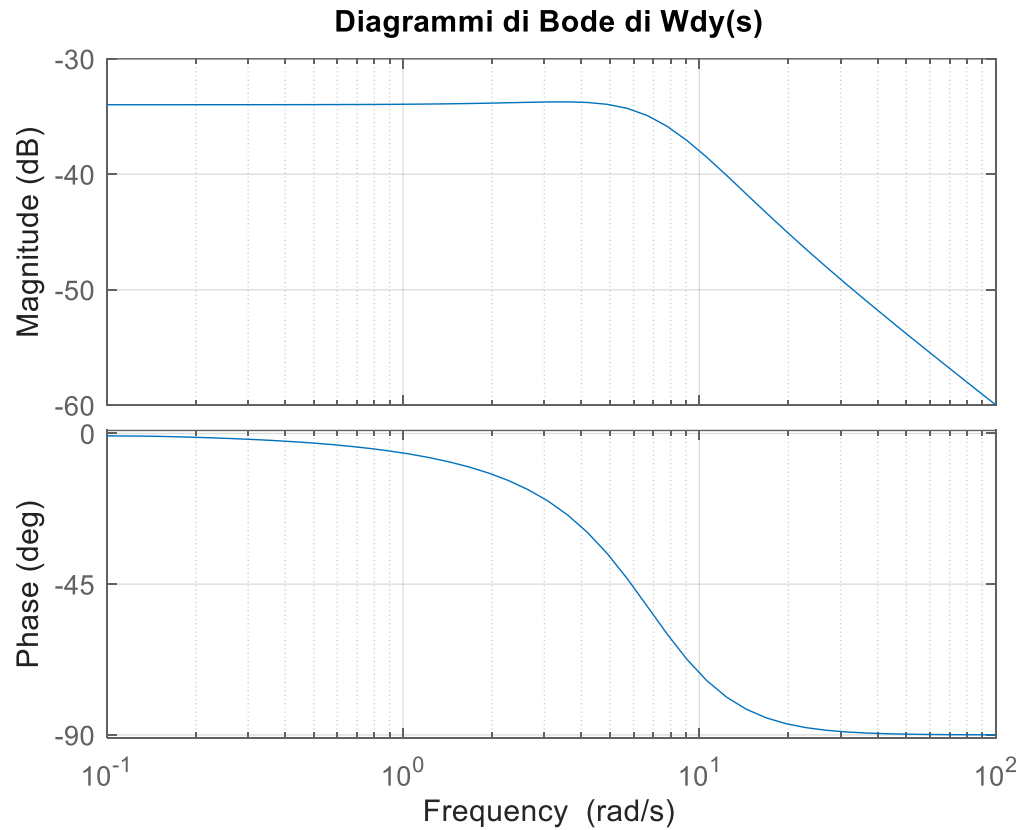
$$W_r^y(s) = \frac{50}{s^2 + 10s + 50}$$

$$\omega_n = \sqrt{50} \approx 7.07 \text{ rad/sec}$$

$$\xi = \frac{5}{\omega_n} \approx 0.7$$

$$\omega_b \approx \omega_n$$

banda passante circa pari a 7 rad/s



Significativo livello di attenuazione dei disturbi (pari almeno al **98%**) su tutto lo spettro

$$A_{db} = -33 \quad A = 10^{-\frac{33}{20}} \approx \mathbf{0.02}$$