

**Es. 1 (9 punti)**

Si consideri il sistema di controllo in Figura 1

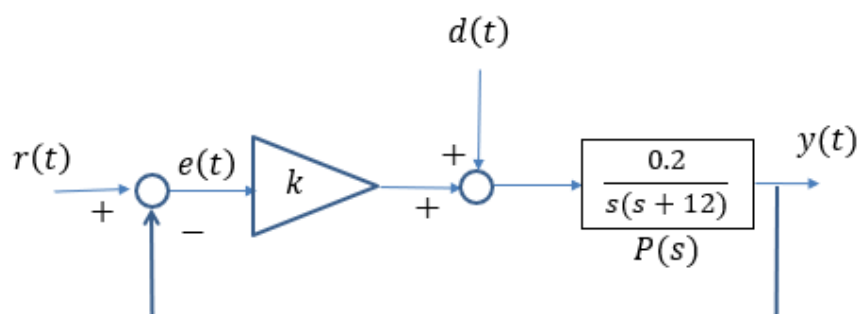


Figura 1

**1.A (7 punti)** Individuare l'intervallo di valori del guadagno  $k$  che garantisce il soddisfacimento delle seguenti specifiche

- S1 Precisione statica
- S2 Attenuazione minima di un disturbo costante  $d(t) = D$  pari al 98%
- S3 Errore a regime relativo al set-point  $r(t) = 5 + 2t$  non superiore a 1.3
- S4 Tempo di assestamento al 2% non superiore a 3 secondi.
- S5 Sovraelongazione percentuale non superiore al 5%.

**1.B (2 punti)** Disegnare la risposta a ciclo chiuso ad un set point  $r(t) = 10$  in corrispondenza dei valori minimo e massimo dell'intervallo individuato nel precedente quesito (se non si è risolto il precedente quesito, considerare i valori  $k_{min} = 60$  e  $k_{max} = 500$ )

**Es.2 (8 punti)**

Si consideri il sistema di controllo in Figura 2

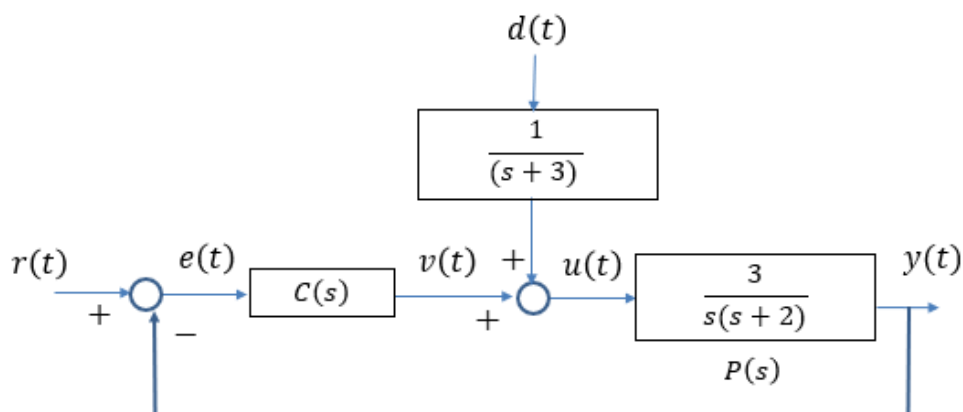


Figura 2

**2.A (6 punti)** Progettare un controllore  $C(s)$  tale da garantire che la risposta a ciclo chiuso ad un set-point costante di ampiezza unitaria sia quella riportata nella seguente Figura 3.

**2.B (2 punti)** Con riferimento al controllore progettato nel precedente quesito 2.A, determinare l'evoluzione di regime dell'uscita  $y(t)$  in corrispondenza di:  $r(t) = 10$  e  $d(t) = -6$ . (se non è risolto il precedente quesito, considerare il controllore  $C(s) = \frac{10(s+2)}{s+6}$ )

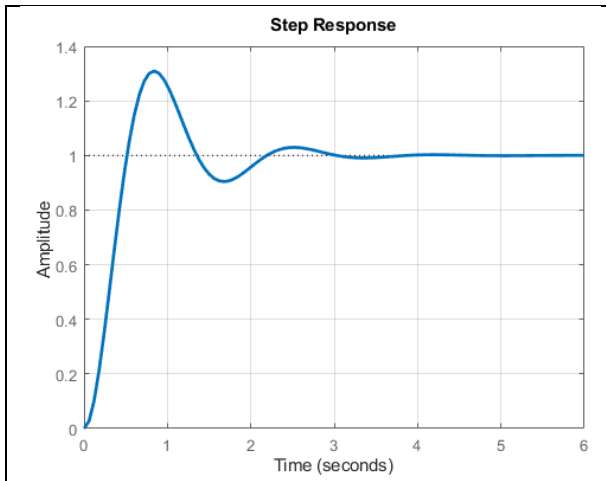


Figura 3

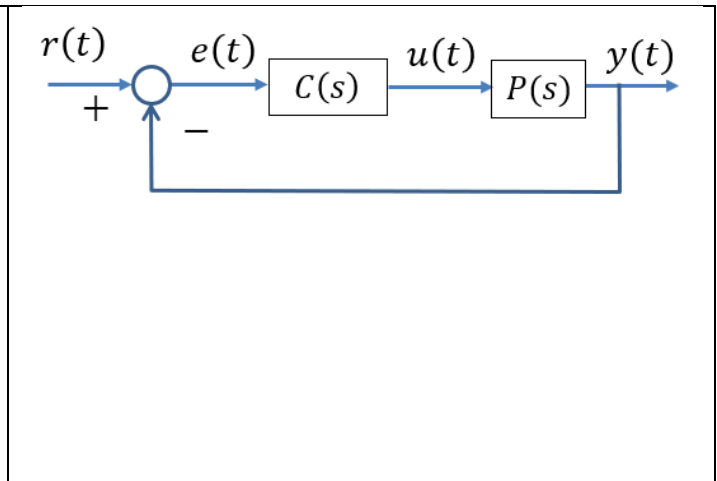


Figura 4

**Es. 3 (5 punti)**

Si consideri il sistema di controllo in Figura 4 con  $P(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$ , in cui la legge di controllo di tipo proporzionale-integrale è la seguente

$$u(t) = k e(t) + 3k \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Si analizzi la stabilità a ciclo chiuso al variare del guadagno  $k$  determinando esplicitamente, se esiste, il valore del guadagno critico

**Es. 4 (6 punti)**

Si consideri il sistema di controllo in Figura 4 con  $P(s) = \frac{3(1-s)}{(s+1)(s+2)}$ . Progettare un controllore  $C(s)$  tale da garantire che il sistema a ciclo chiuso soddisfi la proprietà della precisione statica.

**Es. 5 (5 punti)**

Enunciare sotto quali condizioni il sistema di controllo riportato nella seguente Figura 5 garantisce che un set-point della forma  $r(t) = K_0 + K_1 t + K_2 \sin(10t + \phi)$  venga riprodotto a regime con un errore nullo qualunque sia il valore delle costanti  $K_0, K_1, K_2, \phi$ .

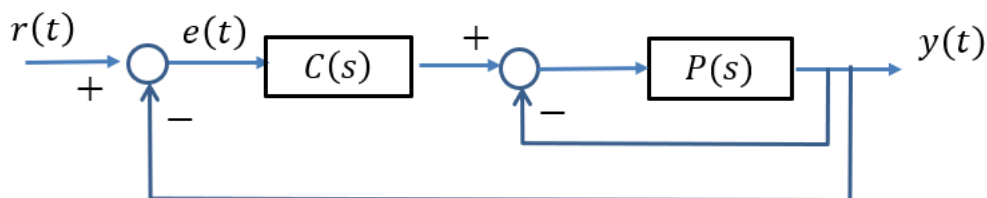
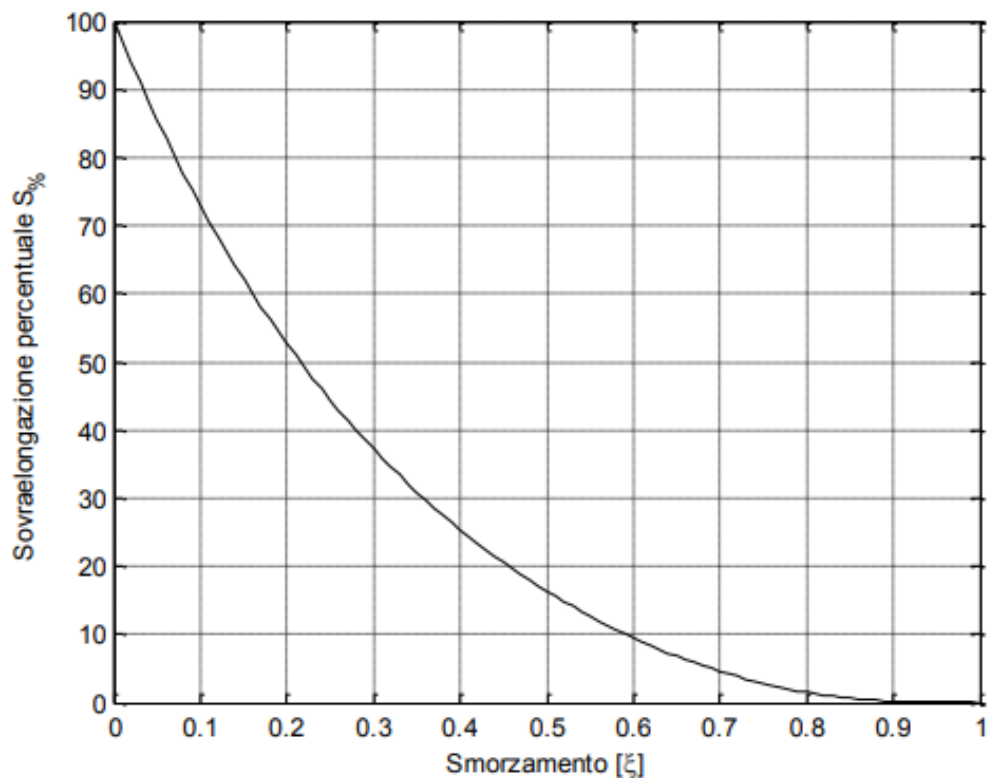


Figura 5

**Numerare e firmare i fogli da consegnare.**

**Indicare chiaramente l'inizio e la fine dello svolgimento di ciascun esercizio.**



Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
$\delta_{-1}(t)$ (gradino unitario)	$\frac{1}{s}$
$\delta_{-2}(t) = t\delta_{-1}(t)$ (rampa unitaria)	$\frac{1}{s^2}$
$e^{at}$ (esponenziale)	$\frac{1}{s - a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$ (esponenziale polinomiale)	$\frac{1}{(s - a)^n}$
$\sin(\omega t)$ (sinusoide)	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$ (cosinusoide)	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$ (fattore trinomio)
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$

## SOLUZIONE ESERCIZIO 1

### 1.A

Il polinomio caratteristico viene determinato moltiplicando fra loro le FdT del controllore e del processo, e sommandone numeratore e denominatore:

$$C(s)P(s) = k \cdot \frac{0.2}{s(s+12)} = \frac{0.2k}{s(s+12)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+12) + 2k = s^2 + 12s + 0.2k$$

Il sistema di controllo è asintoticamente stabile a ciclo chiuso qualunque sia il valore di  $k$  (criterio di Cartesio).

La specifica S1 è sempre garantita indipendentemente dal valore di  $k$  (sistema di controllo di tipo 1).

La specifica S2 è garantita se il guadagno statico  $W_d^y(0)$  della FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita è minore di 0.02

$$W_d^y(s) = \frac{P(s)}{1+kP(s)} = \frac{\frac{0.2}{s(s+12)}}{1+\frac{0.2k}{s(s+12)}} = \frac{0.2}{s^2+12s+0.2k}$$

$$W_d^y(0) = \frac{1}{k} \leq 0.02 \rightarrow k \geq \frac{1}{0.02} = 50$$

La specifica S3 va analizzata unicamente con riferimento alla componente a rampa del set point, in quanto la componente costante del set point viene riprodotta a regime con errore nullo, sulla base della specifica S1. Calcoliamo il valore a regime del segnale di errore nel caso in cui sia impiegato un set-point a rampa  $r(t) = 2t$

FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'errore:

$$W_r^e(s) = \frac{1}{1+kP(s)} = \frac{1}{1+\frac{0.2k}{s(s+12)}} = \frac{s(s+12)}{s^2+12s+0.2k}$$

TdL del segnale di errore:

$$E(s) = W_r^e(s)R(s) = \frac{s(s+12)}{s^2+12s+0.2k} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{(s+12)}{s^2+12s+0.2k} \cdot \frac{2}{s}$$

$E(s)$  soddisfa i requisiti di applicabilità del Teorema del valore finale in quanto i suoi poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico (che hanno tutte parte reale negativa) più un ulteriore polo semplice nell'origine.

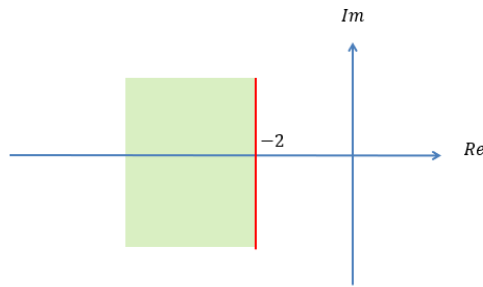
Applichiamo il Teorema del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = E^* = [sE(s)]_{s=0} = \left[ s \cdot \frac{(s+12)}{s^2+12s+0.2k} \cdot \frac{2}{s} \right]_{s=0} = \left[ \frac{2(s+12)}{s^2+12s+0.2k} \right]_{s=0} = \frac{24}{0.2k} = \frac{120}{k}$$

$$E^* = \frac{120}{k} \leq 1.3 \rightarrow k \geq \frac{120}{1.3} \approx 92.3$$

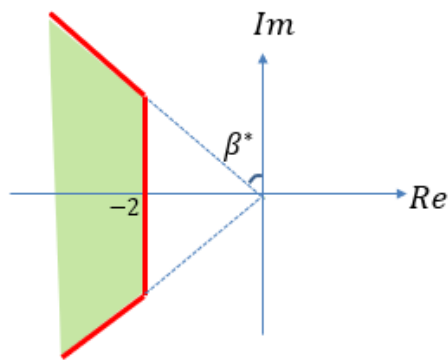
Le specifiche sul comportamento a regime sono pertanto complessivamente garantite se  $k \geq 92.3$ .

Passiamo alla analisi delle specifiche sul transitorio. Determiniamo la regione ammissibile per i poli del sistema a ciclo chiuso. La specifica S4 ( $T_{a2\%} \leq T^* = 3s$ ) implica la seguente regione ammissibile



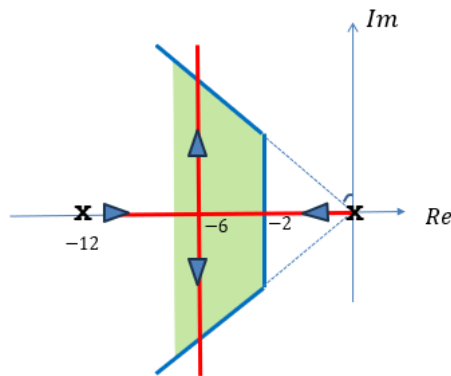
Poiché il sistema a ciclo chiuso è di ordine superiore al primo, per la determinazione di  $A^*$  si deve infatti impiegare la formula  $A^* = -\frac{6}{T^*} = -2$

La specifica S5 ( $S_{\%} \leq 5$ ) implica invece che lo smorzamento debba essere maggiore o uguale di 0.7 ( $\xi \geq 0.7$ ). La regione ammissibile corrispondente alle specifiche S4 e S5 è pertanto complessivamente la seguente:



$$\text{In cui } \beta^* = \arcsin(0.7) = 0.77 \text{ rad}$$

Sovrapponiamo la regione ammissibile con il LdR associato a  $L(s) = \frac{0.2}{s(s+12)}$



Determiniamo i poli a ciclo chiuso in corrispondenza del minimo valore di  $k$  che soddisfa le specifiche sul comportamento a regime, pari a  $k = 92.3$

$$P_{car}(s) = s^2 + 12s + 0.2k = s^2 + 12s + 18.46$$

$$p_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 18.46}}{2} \quad p_1 = -1.81 \quad p_2 = -10.18$$

Uno dei due poli è esterno alla regione ammissibile

Il valore minimo consentito per il guadagno  $k$  sarà pertanto pari a quello associato al punto -2, punto in cui il ramo «destro» del LdR (quello che ha come punto di partenza l'origine) entra nella regione ammissibile. Determiniamolo mediante la taratura.

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \rho_1 \rho_2 = \frac{1}{0.2} \cdot 2 \cdot 10 = 100 \quad \mathbf{k_{min} = 100}$$

$$\bar{k} = 0.2 : \text{Guadagno in alta frequenza di } L(s) = \frac{2}{s(s+12)}$$

$\rho_1 = 2$  : Distanza fra il punto che stiamo tarando (-2) e l'origine

$\rho_2 = 10$  : Distanza fra il punto che stiamo tarando (-2) e il punto -12

Ora determiniamo il valore  $k_{max}$  di  $k$  in corrispondenza del quale i rami del LdR escono dalla regione ammissibile, cioè il valore di  $k$  in corrispondenza del quale lo smorzamento dei poli complessi coniugati è pari a 0.7.

$$P_{car}(s) = s^2 + 12s + 0.2k$$

$$s^2 + 12s + 0.2k = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

Uguagliando membro a membro il polinomio caratteristico con la forma standard del termine trinomio possiamo determinare la pulsazione naturale e lo smorzamento in funzione del guadagno  $k$ :

$$\omega_n^2 = 0.2k \quad 2\xi\omega_n = 12$$

$$\text{Pulsazione naturale: } \omega_n = \sqrt{0.2k} \approx 0.44\sqrt{k}$$

$$\text{Smorzamento: } \xi = \frac{12}{2\omega_n} = \frac{12}{2 \cdot 0.44\sqrt{k}} \approx \frac{13.63}{\sqrt{k}}$$

Ora andiamo a cercare il valore di  $k$  in corrispondenza del quale lo smorzamento vale 0.7:

$$\frac{13.63}{\sqrt{k}} = 0.7 \quad \rightarrow \quad \sqrt{k} = \frac{13.63}{0.7} = 19.47 \quad \rightarrow \quad k = (19.47)^2 \approx 379.1$$

Tale valore costituisce la soglia massima consentita per  $k$ , oltre la quale lo smorzamento dei poli complessi coniugati diventa minore di 0.7

Pertanto, l'intervallo di valori del guadagno  $k$  che garantisce il soddisfacimento delle specifiche S1-S5 è:

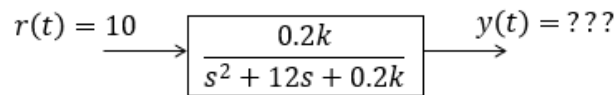
$$\mathbf{100 \leq k \leq 379.1} \quad \mathbf{k_{min} = 100} \quad \mathbf{k_{max} = 379.1}$$

## 1.B

Il quesito 1.B richiede che si tracci l'evoluzione della risposta al gradino di ampiezza 10 del seguente sistema

$$W_r^y(s) = \frac{kP(s)}{1 + kP(s)} = \frac{\frac{0.2k}{s(s+12)}}{1 + \frac{0.2k}{s(s+12)}} = \frac{0.2k}{s^2 + 12s + 0.2k}$$

che rappresenta la FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita in corrispondenza dei due valori del guadagno  $k = k_{min} = 100$  e  $k = k_{max} = 379.08$



Poiché il guadagno statico di  $W_r^y(s)$  è unitario indipendentemente dal valore di  $k$ , il valore di regime della risposta  $y(t)$  sarà sempre pari a 10.

$$k = k_{min} = 100$$

Determiniamo i poli della FdT quando  $k = k_{min} = 100$  (sulla base di quanto visto in precedenza, uno è sicuramente pari a -2)

$$P_{car}(s) = s^2 + 12s + 0.2k = s^2 + 12s + 20$$

$$p_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{-12 \pm 8}{2} \quad p_1 = -2 \quad p_2 = -10$$

La FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita è pertanto

$$W_r^y(s) = \frac{20}{(s+2)(s+10)} = \frac{1}{(0.5s+1)(0.1s+1)}$$

Il polo in -2 è **dominante**. Possiamo quindi "rimuovere" il polo in -10 e tracciare la risposta riferendoci ad un semplice sistema STC:

$$W_{r,APPROX}^y(s) = \frac{2}{s+2} = \frac{1}{(0.5s+1)}$$

Avremo pertanto una risposta  $y(t)$  che tende asintoticamente al valore 10, monotona crescente, e con tempo di assestamento facilmente determinabile sulla base della costante di tempo del polo, che vale 0.5 secondi.

$$k = k_{max} = 379.1$$

I poli a ciclo chiuso in corrispondenza del massimo valore consentito per il guadagno  $k$ , pari a  $k = k_{max} = 379.1$  sono complessi coniugati con parte reale  $-6$  e smorzamento  $\xi = 0.7$ .

Il prodotto  $\xi\omega_n$ , che definisce la parte reale dei poli cambiata di segno, vale pertanto 6

$$\text{Si ha quindi } \omega_n = \frac{6}{\xi} = 8.57 \text{ rad/s}$$

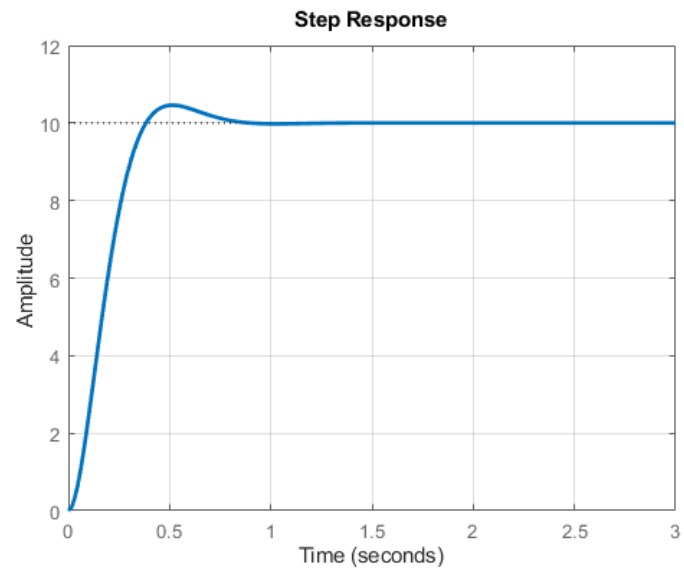
$$\text{La costante di tempo equivalente è } \tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n} = \frac{1}{6} \approx 0.16s$$

Avremo pertanto una risposta  $y(t)$  che tende asintoticamente al valore 10, oscillatoria, con sovralongazione del 5% (che comporta quindi un valore massimo di  $Y_{max} = 10 + 10 \cdot 0.05 = 10.5$ ), istante del primo punto di massimo

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{8.57 \cdot \sqrt{1-(0.7)^2}} \approx 0.51$$

$$\text{e tempo di assestamento all'1\% } T_{a1\%} = \frac{4.6}{\xi\omega_n} \approx 0.76s$$

La seguente figura mostra il grafico esatto realizzato mediante Matlab:



Le oscillazioni successive al primo punto di massimo sono invisibili in quanto risultano quasi completamente smorzate già dopo il primo periodo

## SOLUZIONE ESERCIZIO 2

### 2.A

La risposta mostrata in Figura 3 è la risposta al gradino unitario della FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita, e mostra le caratteristiche della risposta al gradino di una FdT avente una coppia di poli complessi coniugati:

$$W_r^y(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

Sulla base delle caratteristiche della curva in Figura 3 ricaviamo i parametri della  $W_r^y(s)$ .

Poiché il valore di regime è unitario, il guadagno statico  $\mu$  della  $W_r^y(s)$  vale 1.

Poiché la sovraelongazione percentuale è pari a circa il 30%, lo smorzamento  $\xi$  della coppia di poli complessi coniugati sarà  $\xi \approx 0.35$ .

Il valore della pulsazione naturale può essere dedotto in vari modi.

L'istante del primo punto di massimo ha l'espressione:

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Dalla figura 3 notiamo come  $t_{max} \approx 0.85$

Si ha quindi

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_{max} \sqrt{1 - \xi^2}} \approx \frac{\pi}{0.85 \sqrt{1 - (0.35)^2}} = 3.95 \text{ rad/s}$$

Un modo alternativo per dedurre la pulsazione naturale  $\omega_n$  può anche basarsi sul tempo di assestamento. Dalla figura 3 si può stimare che  $T_{a1\%} \approx 3.5$ .

Poiché  $T_{a1\%} = \frac{4.6}{\xi \omega_n}$  si deduce

$$\omega_n = \frac{4.6}{\xi T_{a1\%}} \approx \frac{4.6}{0.35 \cdot 3.5} = 3.75 \text{ rad/s}$$

Ovviamente si ottengono risultati lievemente differenti poiché i parametri  $t_{max}$  e  $T_{a1\%}$  sono letti sulla curva in Figura 3 con un inevitabile errore di approssimazione. Scegliamo di utilizzare  $\omega_n = 3.95 \text{ rad/s}$ .

Quindi

$$W_r^y(s) \approx \frac{(3.95)^2}{s^2 + 2 \cdot 0.35 \cdot 3.95 s + (3.95)^2} = \frac{15.6}{s^2 + 2.76 s + 15.6}$$

Il controllore  $C(s)$  tale da garantire che la FdT a ciclo chiuso sia proprio quella che abbiamo determinato può immediatamente determinarsi mediante sintesi diretta scegliendo come FdT desiderata  $W_d(s) =$

$\frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)} = \frac{15.6}{s^2 + 2.76 s + 15.6}$ . La formula mediante la quale ricavare la FdT del controllore è:

$$C(s) = \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)}$$

La FdT del processo è:  $P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{3}{s(s+2)}$ .

Sostituendo nella formula per il calcolo della FdT del controllore si ottiene:

$$C(s) = \frac{15.6}{s^2 + 2.76s} \cdot \frac{s(s+2)}{3} = \frac{15.6}{3} \frac{(s+2)}{(s+2.76)} = \frac{5.2 \cdot (s+2)}{(s+2.76)}$$

## 2.B

Poiché il sistema di controllo è di tipo 1 esso gode della proprietà di precisione statica. Il valore di regime dell'uscita  $y(t)$  in corrispondenza di  $r(t) = 10$  è pertanto  $Y_{\infty,r} = 10$ .

Poiché il controllore non contiene poli nell'origine, un disturbo costante si traduce in un contributo costante non nullo sul valore di regime dell'uscita.

Tale contributo è pari a:  $Y_{\infty,d} = -6 \cdot W_d^y(0)$

Calcoliamo la FdT a ciclo chiuso  $W_d^y(s)$  fra il disturbo e l'uscita, e poi estraiamone il guadagno statico.

$$\begin{aligned} W_d^y(s) &= \frac{1}{s+3} \cdot \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{1}{s+3} \cdot \frac{\frac{3}{s(s+2)}}{1 + \frac{5.2 \cdot (s+2)}{(s+2.76)} \frac{3}{s(s+2)}} = \frac{1}{s+3} \cdot \frac{\frac{3}{s(s+2)}}{1 + \frac{5.2 \cdot 3}{(s+2.76)s}} \\ &= \frac{1}{s+3} \cdot \frac{\frac{3}{(s+2)}}{s + \frac{5.2 \cdot 3}{(s+2.76)}} \end{aligned}$$

Si ha quindi  $W_d^y(0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5.2 \cdot 3}{2.76}} = 0.088 \quad \rightarrow \quad Y_{\infty,d} = -6 \cdot W_d^y(0) = -6 \cdot 0.088 = -0.53$

Sommiamo fra loro il contributo del set point ed il contributo del disturbo

$$Y_{\infty} = Y_{\infty,r} + Y_{\infty,d} = 10 - 0.53 = 9.47$$

### SOLUZIONE ESERCIZIO 3

La FdT del controllore è

$$C(s) = k + \frac{3k}{s} = \frac{k(s+3)}{s}$$

Deduciamo il polinomio caratteristico moltiplicando fra loro la FdT del controllore e la FdT del processo, e successivamente sommando fra loro i rispettivi numeratore e denominatore

$$C(s)P(s) = \frac{k(s+3)}{s} \cdot \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{4k}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+1)(s+2)(s+4) + 4k = s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s + 4k$$

Applichiamo il criterio di Routh Hurwitz

1	1	14	4k
2	7	8	
3	A	B	
4	C		

$$A = - \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 14 \cdot 7 - 8 = 90 \quad (\text{non lo dividiamo per 7})$$

$$B = - \begin{vmatrix} 1 & 4k \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 4k \cdot 7 = 28k \quad (\text{non lo dividiamo per 7})$$

$$C = - \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ A & B \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 90 & 28k \end{vmatrix} = 8 \cdot 90 - 28k \cdot 7 = 720 - 196k \quad (\text{non lo dividiamo per A})$$

1	1	14	4k
2	7	8	
3	90	B	
4	720 - 196k		

Ora andiamo a imporre che tutti gli elementi della prima colonna (evidenziati in rosso) abbiano segno concorde, siano cioè tutti positivi

$$720 - 196k > 0 \rightarrow k < k_{cr} = \frac{720}{196} = 3.67$$

Il sistema di controllo a ciclo chiuso è:

Asintoticamente stabile se  $k < k_{cr} = 3.67$

Al limite di stabilità se  $k = k_{cr} = 3.67$

Instabile se  $k > k_{cr} = 3.67$

#### SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Convieni procedere mediante Sintesi Diretta, scegliendo una FdT desiderata a ciclo chiuso che abbia grado relativo uno, guadagno statico unitario, e che allo stesso tempo, per evitare che venga compromessa la stabilità interna del sistema di controllo, abbia il medesimo zero a parte reale positiva del processo.

Una possibile scelta è:

$$W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)} = \frac{1-s}{(1+s)^2} = \frac{1-s}{s^2+2s+1}$$

La formula mediante la quale ricavare la FdT del controllore è:

$$C(s) = \frac{W_d(s)}{1-W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)-N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)}$$

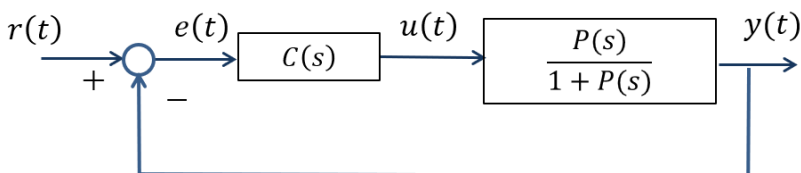
La FdT del processo è:  $P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{3(1-s)}{(s+1)(s+2)}$ .

Sostituendo nella formula per il calcolo della FdT del controllore si ottiene:

$$C(s) = \frac{1-s}{s^2+2s+1-(1-s)} \cdot \frac{(s+1)(s+2)}{3 \cdot (1-s)} = \frac{1}{s^2+3s} \cdot \frac{(s+1)(s+2)}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)}$$

#### SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Il sistema di controllo in Figura 5 può essere rappresentato come segue:



Le condizioni sono le seguenti:

1. Il sistema di controllo deve essere asintoticamente stabile a ciclo chiuso sia esternamente che internamente
2. La funzione di trasferimento  $C(s) \frac{P(s)}{1+P(s)}$  deve avere almeno due poli nell'origine
3. La funzione di trasferimento  $C(s) \frac{P(s)}{1+P(s)}$  deve avere una coppia di poli immaginari puri  $p_{1,2} = \pm\sqrt{10}i$ , deve quindi presentare nel suo denominatore il fattore  $s^2 + 100$