OTTIMIZZAZIONE E STUDIO DI FUNZIONE

Ottimizzazione di una droga sintetica

Viene sintetizzata una droga che, similmente alla cocaina, agisce bloccando l'assorbimento di un neurotrasmettitore, la dopamina, da parte delle sinapsi del tessuto cerebrale, causando l'accumulo della stessa dopamina e la conseguente alterazione dello stato psichico con improvvise sensazioni di euforia e piacere.

Si vuole agire sul processo di ottimizzazione della concentrazione di dopamina nel cervello e sul suo andamento rispetto al tempo.

La funzione che descrive la concentrazione di dopamina (in µg/mL) rispetto al tempo (in ore) sia la seguente:

$$C(t) = \frac{kt}{t^2 + t + 1} \qquad con\ t \geq 0$$

Dove *k* è una costante positiva e non nulla che regola la quantità massima di dopamina accumulabile. Si consideri come valore massimo della concentrazione di dopamina nel cervello in condizioni normali e da assumere come valore soglia, una quantità pari a 3 µg/mL.

Calcolare:

a) Dopo quanto tempo si raggiunge il picco di concentrazione di dopamina e quanto vale la concentrazione massima in funzione di *k*.
b) Quanto deve valere *k* perché la concentrazione massima sia pari a 10 volte il valore soglia.

Sostituito a *k* il valore trovato al punto precedente, calcolare algebricamente ed utilizzando unità di misura opportune:

c) Dopo quanto tempo dall'assunzione della droga si avvertono gli effetti di quest'ultima (si supera il valore soglia).
d) Dopo quanto tempo dall'assunzione della droga la concentrazione torna al di sotto della soglia.

Rappresentare su un piano cartesiano la funzione *C(t)* per $t \geq 0$, studiandone il comportamento asintotico e ricavandola per punti.

Infine, completare lo studio della funzione:

$$C(x) = \frac{kx}{x^2 + x + 1}$$

Usufruendo dei risultati ottenuti precedentemente (in particolare, *k*) ed arrivando al calcolo della derivata seconda, senza studiarne il segno né individuare i punti di flesso.

SOLUZIONE

Dati

C_{MAX} = 30 μg/mL C_0 = 30 μg/mL

Procedimento

Calcoliamo la derivata prima, ottenendo:

$$C'(t) = \frac{k(1-t^2)}{(t^2+t+1)^2}$$

C' (t) = 0 → a) <u>t_{CMAX} = 1 hr</u>

C (t = t_{CMAX}) = $\frac{k}{3}$ → b) <u>k_{CMAX} = 3 C_{MAX} = 90</u>

Introducendo la variabile t_0 come tempo in cui la concentrazione assume un valore pari al valore soglia, per risolvere i punti c) e d) dobbiamo impostare l'equazione C (t_0) = C_0 :

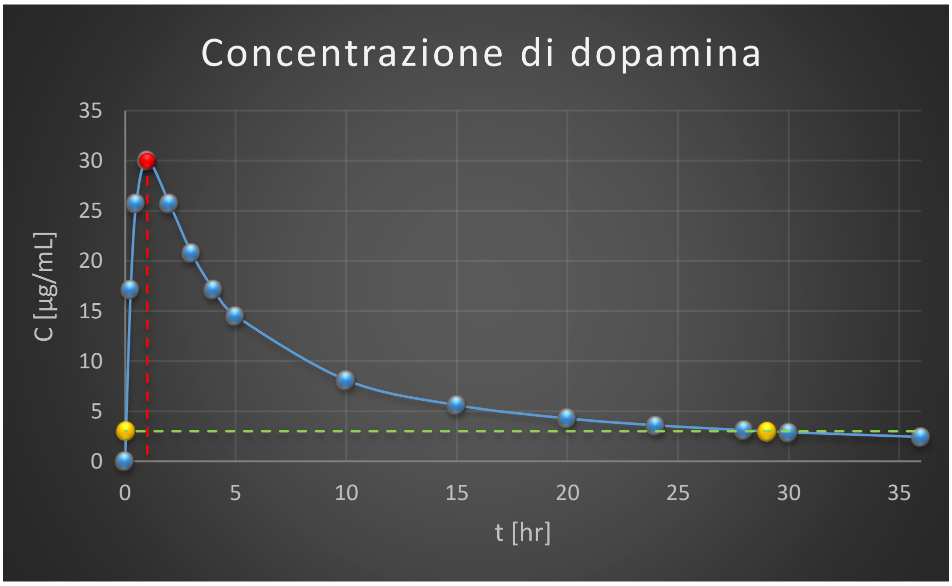
$$\frac{90t_0}{{t_0}^2 + t_0 + 1} = 3$$

Semplificando entrambi i membri per 3 e risolvendo l'equazione fratta, si ottiene l'equazione:

$${t_0}^2 - 29t_0 + 1 = 0$$

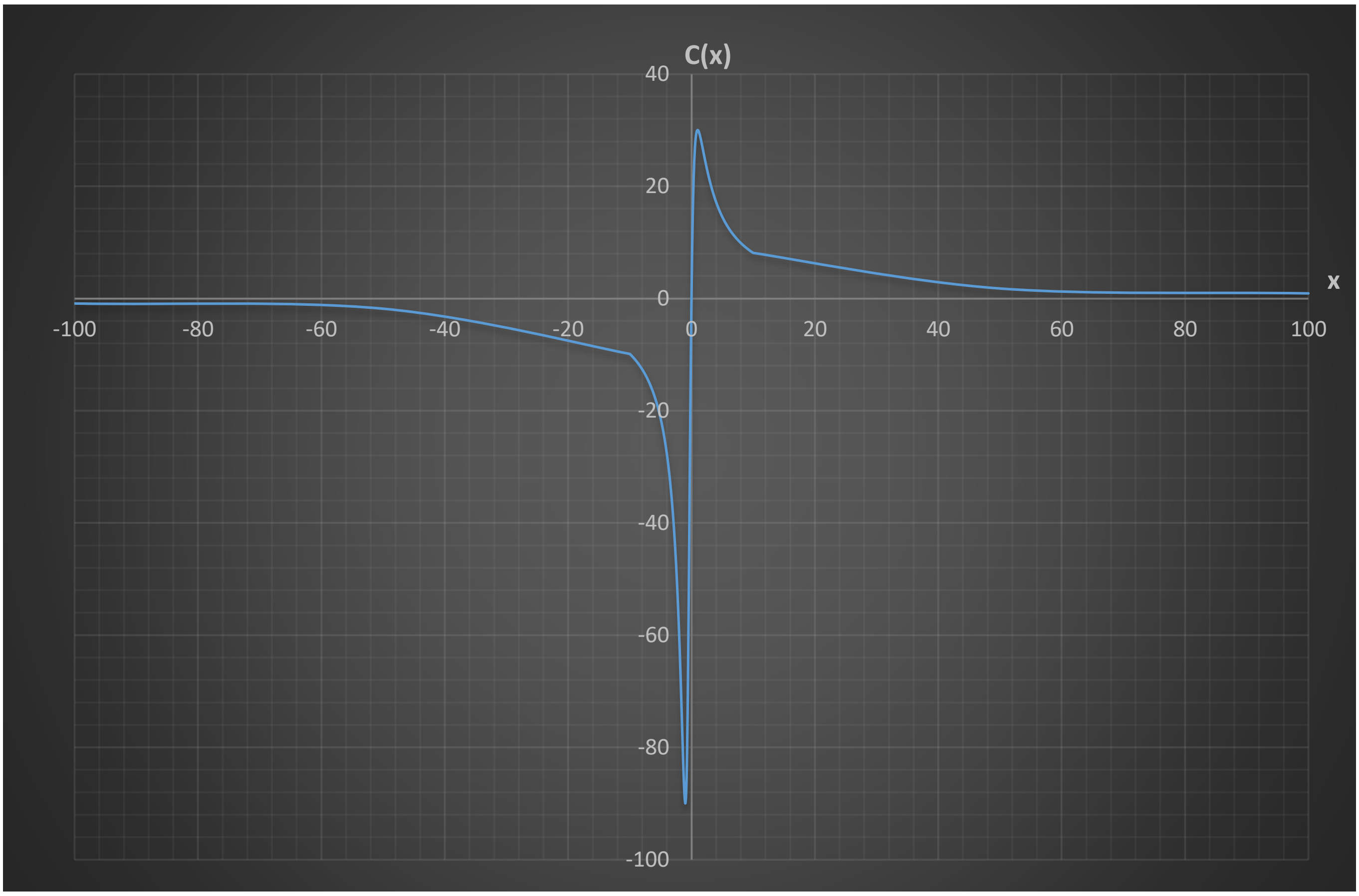
Con soluzioni:

t_{01} ≈ 0.035 hr ≈ 124 s t_{02} ≈ 29 hr



t [hr]	C [μg/mL]
0	0
0,035	3,04
0,25	17,14
0,5	25,71
1	30,00
2	25,71
3	20,77
4	17,14
5	14,52
10	8,11
15	5,60
20	4,28
24	3,59
28	3,10
29	3,00
30	2,90
36	2,43

Studio della funzione C (x)



La derivata seconda risulta:

$$C''(x) = \frac{2k(x^3 - 3x - 1)}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{180(x^3 - 3x - 1)}{(x^2 + x + 1)^3}$$