ELEMENTI DI PROBABILITÁ

La teoria della probabilità fornisce gli strumenti per analizzare e comprendere fenomeni aleatori, ovvero eventi che non possono essere previsti con certezza. Attraverso l'utilizzo di concetti matematici, la probabilità ci consente di quantificare il grado di incertezza associato a un evento, consentendoci di effettuare previsioni e decisioni più informate.

Definizione di spazio e di evento

Lo spazio campionario, indicato con S, è l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento aleatorio. Ad esempio, nel lancio di un dado, lo spazio campionario è S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, poiché i possibili esiti sono sei. Un evento è un sottoinsieme dello spazio campionario, ovvero un insieme di esiti che ci interessano. Ad esempio, l'evento "ottenere un numero pari" nel lancio di un dado corrisponde all'insieme {2, 4, 6}.

Spazio Campionario

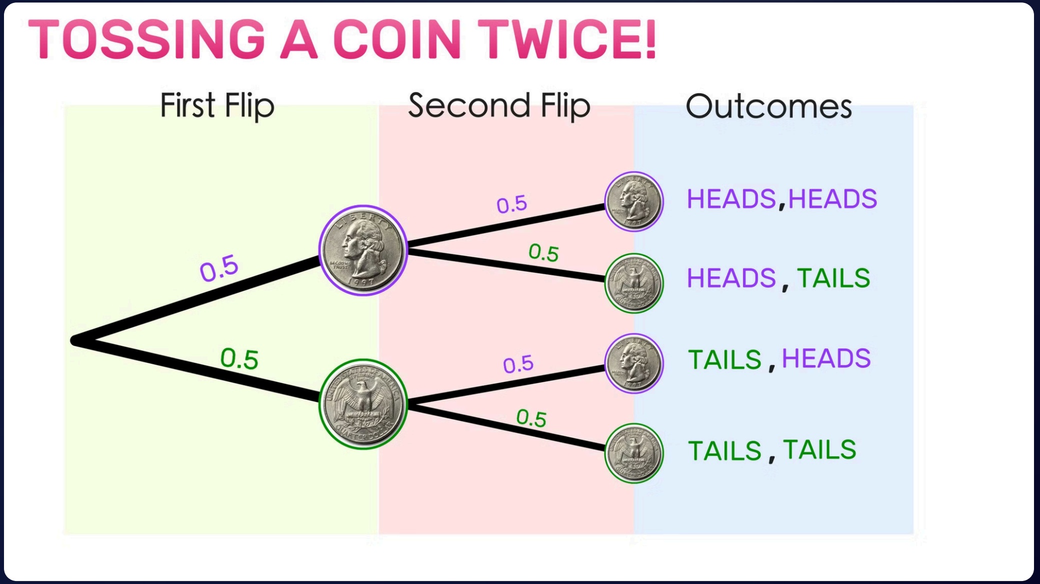
L'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento aleatorio.

Evento

Un sottoinsieme dello spazio campionario, ovvero un insieme di esiti che ci interessano.

Definizione di probabilità di un evento

La probabilità di un evento è una misura numerica della sua possibilità di verificarsi. Si denota con P(E), dove E rappresenta l'evento in questione. La probabilità di un evento E si calcola dividendo il numero di casi favorevoli sul numero totale di casi possibili nello spazio campionario.

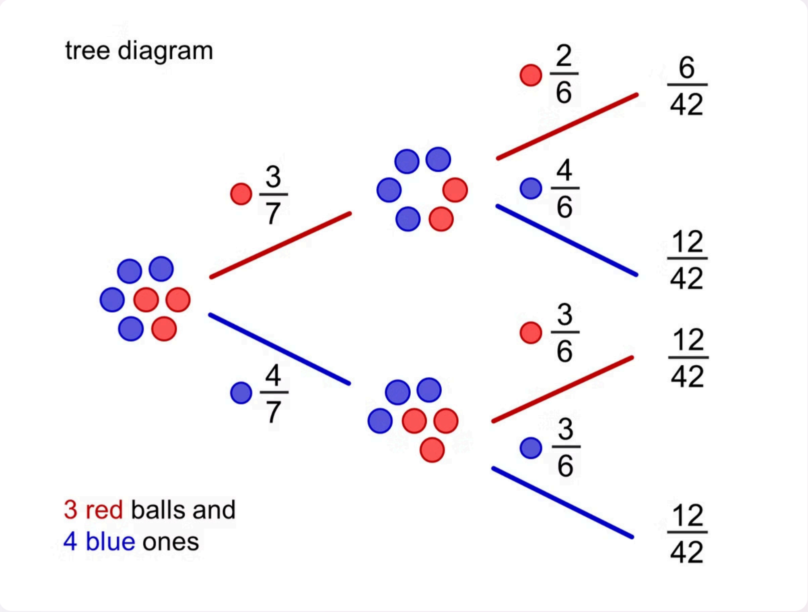


Calcolo della probabilità semplice, composta e condizionata

La probabilità semplice è la probabilità di un evento singolo, calcolata come il rapporto tra il numero di esiti favorevoli e il numero totale di esiti possibili. La probabilità composta è la probabilità dell'occorrenza di due o più eventi, calcolata come il prodotto delle probabilità di ogni evento. La probabilità condizionata è la probabilità di un evento, dato che un altro evento si è già verificato.

Nel caso di probabilità composta, si possono ricavare le configurazioni possibili mediante l'elaborazione del relativo **diagramma ad albero**, come nel caso in figura.

Probabilità semplice	Rapporto tra esiti favorevoli e esiti totali.
Probabilità composta	Prodotto delle probabilità di due o più eventi.
Probabilità condizionata	Probabilità di un evento, dato che un altro evento si è già verificato.



Eventi indipendenti e complementari

Ad esempio, nel lancio di una moneta due volte, gli eventi "ottenere testa al primo lancio" e "ottenere croce al secondo lancio" sono indipendenti. Due eventi sono complementari se sono mutuamente esclusivi e la loro unione costituisce l'intero spazio campionario. Ad esempio, nel lancio di un dado, gli eventi "ottenere un numero pari" e "ottenere un numero dispari" sono complementari.

1 Eventi Indipendenti

Due eventi A e B sono considerati indipendenti se il verificarsi dell'uno non influenza la probabilità di verificarsi dell'altro. Ad esempio nel lancio di una moneta due volte, se l'evento "ottenere testa al primo lancio" si verifica, ciò non influisce sulla probabilità di verificarsi dell'evento "ottenere croce al secondo lancio". In altre parole, i due eventi sono indipendenti perché non c'è connessione causale tra di loro.

2 Eventi Complementari

Sono mutuamente esclusivi e la loro unione costituisce l'intero spazio campionario. Gli eventi complementari non possono verificarsi contemporaneamente. In altre parole, se uno degli eventi si verifica, l'altro evento non può verificarsi. Ad esempio, nel lancio di un dado, ottenere un numero pari e ottenere un numero dispari sono eventi complementari. Se esce un numero pari, non può uscire contemporaneamente un numero dispari.

Formule di Probabilità

La probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1 che rappresenta la possibilità che l'evento si verifichi. Se la probabilità è 0, l'evento è impossibile. Se la probabilità è 1, l'evento è certo.

Probabilità semplice

La probabilità semplice può essere calcolata come il rapporto tra il numero di esiti favorevoli e il numero totale di esiti possibili. Ad esempio, la probabilità di ottenere testa nel lancio di una moneta è 1/2, perché ci sono due esiti possibili (testa o croce) e un solo esito favorevole (testa).

Regola della somma

La regola della somma afferma che la probabilità che si verifichino contemporaneamente due eventi indipendenti è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi. Ad esempio, la probabilità di ottenere un asso o un due in un mazzo di carte è la somma della probabilità di ottenere un asso e la probabilità di ottenere un due: 4/52 + 4/52 (poiché ci sono 4 assi e 4 due nel mazzo di carte standard da 52 carte). Quindi la probabilità totale è 8/52, che può essere semplificata a 2/13.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Regola del prodotto o Probabilità composta

La probabilità composta è la probabilità che più eventi si verifichino contemporaneamente e, se gli eventi sono indipendenti, può essere calcolata moltiplicando le probabilità dei singoli eventi. Ad esempio, la probabilità di ottenere testa nel lancio di una moneta due volte è 1/2 * 1/2 = 1/4, perché la probabilità di ottenere testa al primo lancio è 1/2 e la probabilità di ottenere testa al secondo lancio è anche 1/2.

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Probabilità condizionata e regola di Bayes

La probabilità condizionata è la probabilità che un evento si verifichi, dato che un altro evento si è già verificato. Questo concetto è importante per comprendere come la probabilità di un evento può cambiare in base al verificarsi di un altro evento.

La regola di Bayes è una formula fondamentale nell'ambito della probabilità condizionata. Questa formula consente di calcolare la probabilità di un evento A dato il verificarsi di un altro evento B.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(A) * P(B \mid A)}{P(B)}$$

Interdipendenza tra eventi

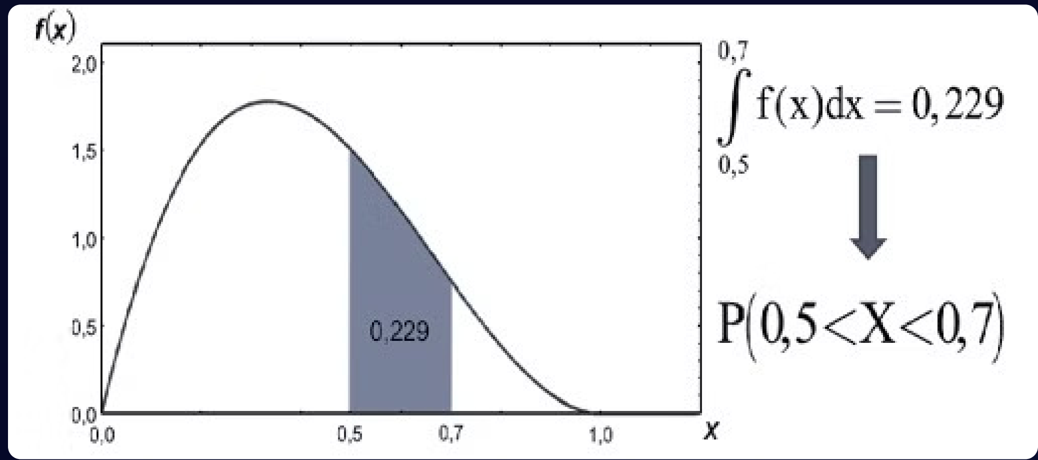
Per determinare se due eventi sono indipendenti, possiamo utilizzare la formula della probabilità condizionata:

$P(A \cap B) = P(A) * P(B) \equiv P(A \cap B) = P(B) * P(A \mid B) \rightarrow P(A \mid B) = P(A)$

dove $P(A \mid B)$ rappresenta la probabilità dell'evento A dato che l'evento B si è verificato, e $P(A)$ rappresenta la probabilità dell'evento A. Se questa equazione è soddisfatta, gli eventi A e B sono indipendenti.

Densità di probabilità continue

Le densità di probabilità continue descrivono la probabilità di variabili continue che possono assumere qualsiasi valore all'interno di un determinato intervallo continuo. La densità è così descritta da una funzione f(x) dalla quale è possibile ottenere la probabilità che $x \in [a\ ;\ b]$ tramite il calcolo del relativo integrale definito. Ne consegue che l'area della funzione relativa all'intero spazio dev'essere unitaria.



Livello di confidenza di un intervallo

Il livello di confidenza di un intervallo α è legato alla probabilità che il vero valore di un parametro o una certa distribuzione X si trovi all'interno dell'intervallo [a, b]:

$\alpha = 1 - P(a < X < b)$.

Ad esempio, un livello di confidenza del 5% (o 0.05) per un certo intervallo indica che c'è una probabilità del 95% (o 0.95) che il vero valore del parametro si trovi all'interno dell'intervallo.

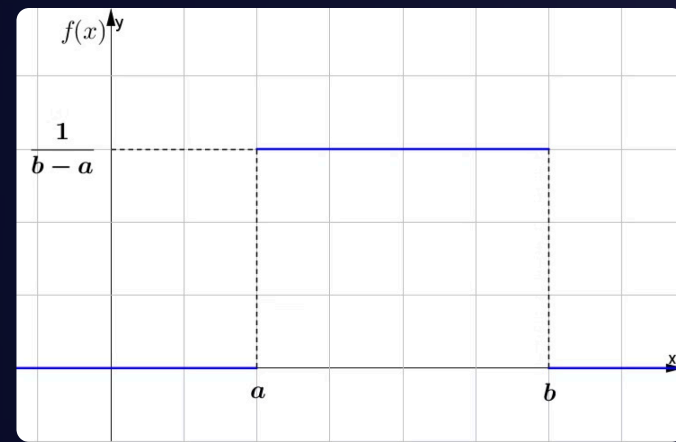
Distribuzioni Uniforme e Binomiale

Distribuzione Uniforme

La distribuzione uniforme è una distribuzione continua in cui ogni valore all'interno di un intervallo ha la stessa probabilità.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a,b] \\ 0 & \text{se } x \notin [a,b] \end{cases}$$

N.B.: La costante si ottiene considerando che l'area totale dev'essere unitaria.



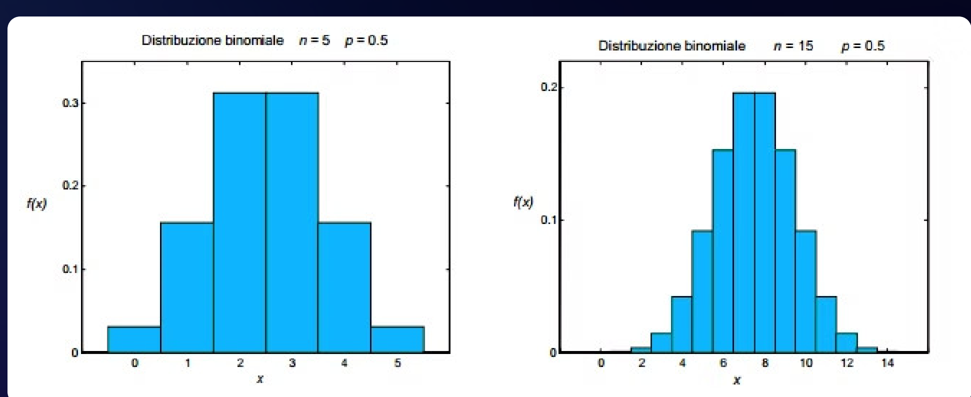
Distribuzione Binomiale

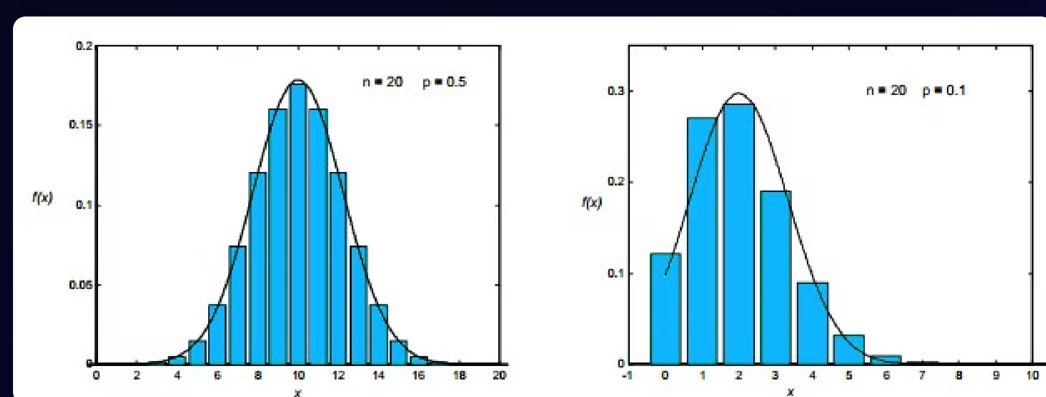
La distribuzione binomiale è una distribuzione discreta che descrive la probabilità di ottenere un numero di successi *x* in un numero fisso *n* di prove <u>indipendenti</u>. Ogni prova può fornire <u>due soli risultati</u>: il *successo* con probabilità p e il *fallimento* con probabilità: q = 1−p.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Esempio: Supponiamo di lanciare una moneta equilibrata 10 volte. La distribuzione binomiale può essere utilizzata per calcolare la probabilità di ottenere un numero specifico di teste, ad esempio 4 (perciò il numero di insuccessi sarà 6). In questo caso, *n* è uguale a 10 (il numero di lanci) e *p* è uguale a 0,5 (la probabilità di ottenere testa). La distribuzione binomiale ci aiuta a capire le probabilità di successo o insuccesso di un esperimento ripetuto un certo numero di volte.

$$P(X_{10} = 4) = \binom{10}{4} \left(1/2\right)^4 \left(1/2\right)^6 = 0.205 = 20.5\%$$



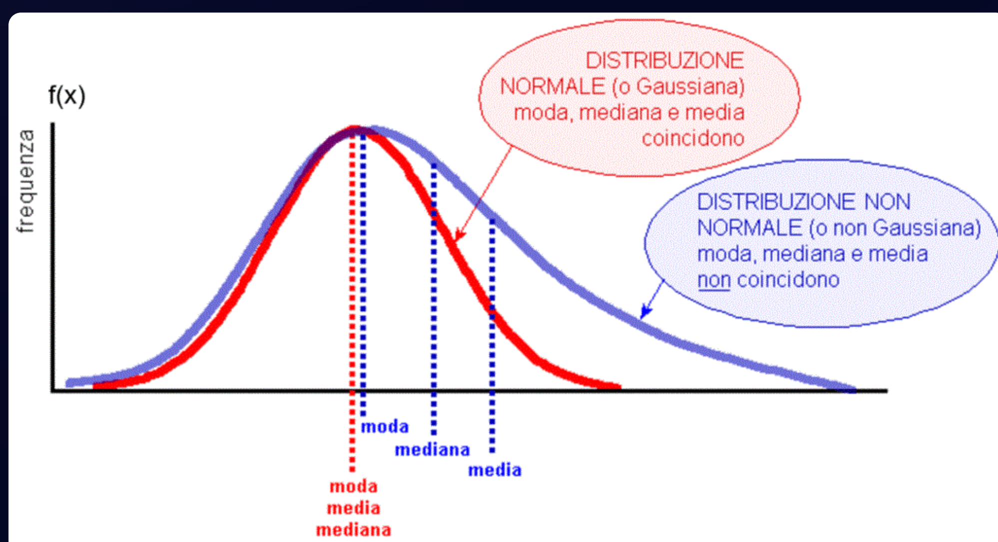


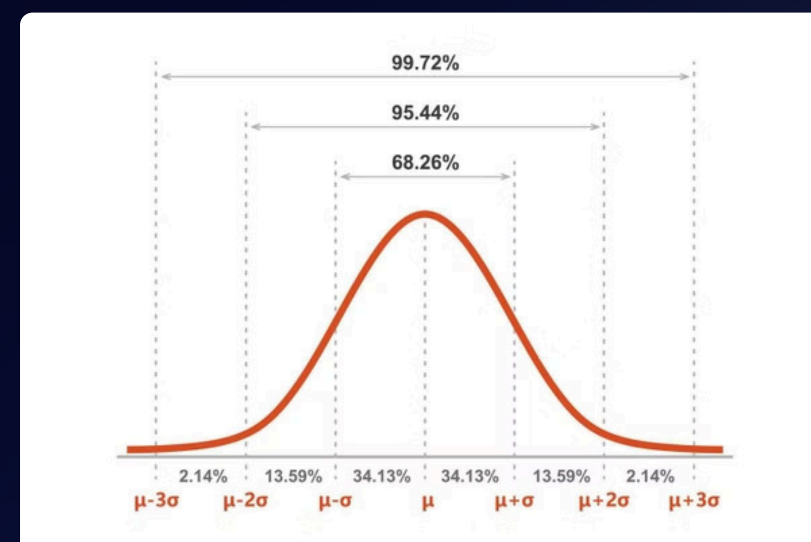
Distribuzione Normale o Gaussiana

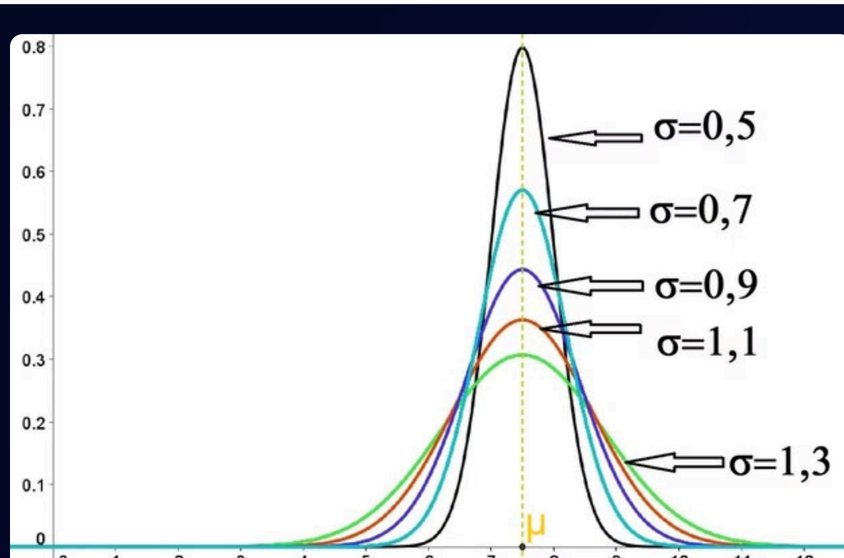
La distribuzione normale o gaussiana è una distribuzione continua a forma di campana che è simmetrica intorno alla sua media. Questa distribuzione è ampiamente utilizzata in molti campi, tra cui la statistica, l'economia e le scienze sociali, poiché molti fenomeni naturali seguono approssimativamente una distribuzione normale.

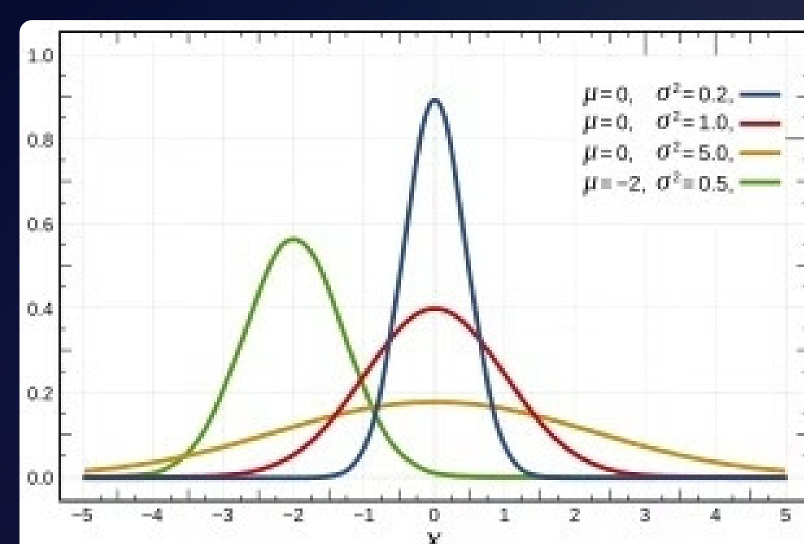
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

σ è la deviazione standard e μ il valore medio, che, nel caso di distribuzione normale, coincide con media e mediana.









Teorema del limite centrale

Il teorema del limite centrale afferma che la distribuzione della media campionaria di un numero sufficientemente grande di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite si avvicina alla distribuzione normale, indipendentemente dalla distribuzione delle variabili individuali. Questo teorema è fondamentale in statistica perché consente di utilizzare la distribuzione normale per approssimare la distribuzione di molti dati reali.