INTRODUZIONE AL CALCOLO INTEGRALE

Il calcolo integrale è una branca fondamentale della matematica che studia il concetto di integrale, ovvero una somma infinita di piccoli elementi che descrivono il comportamento di una funzione.

Attraverso l'integrale, possiamo calcolare grandezze come l'area sottesa da una curva, il volume di un solido e molto altro ancora.

In questa sezione, esploreremo i principi fondamentali e le applicazioni del calcolo integrale.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

1

Integrazione

Il teorema fondamentale del calcolo integrale, detto anche **teorema di Torricelli-Barrow,** è uno dei teoremi più importanti del calcolo integrale. Questo teorema stabilisce che la derivata dell'integrale di una funzione è uguale alla funzione stessa. In altre parole, se integriamo una funzione e poi la deriviamo, otterremo la stessa funzione di partenza.

2

Derivazione

Questo teorema ci permette di passare agevolmente dalla derivazione all'integrazione e viceversa, fornendoci uno strumento potente per risolvere numerosi problemi di analisi matematica.

3

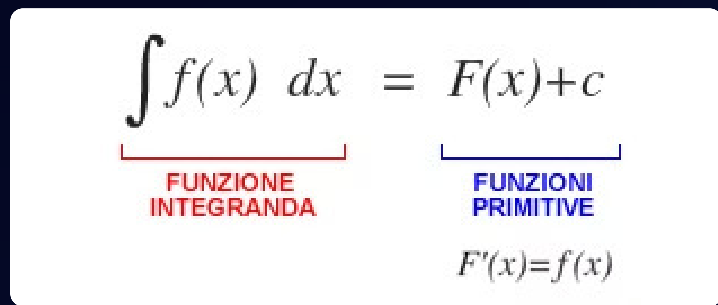
Applicazioni

Il teorema fondamentale del calcolo integrale ha innumerevoli applicazioni in campi come la fisica, l'ingegneria, l'economia e molti altri ambiti in cui è necessario quantificare il comportamento di fenomeni variabili nel tempo o nello spazio.

Definizione e Significato di Integrale Definito e Indefinito

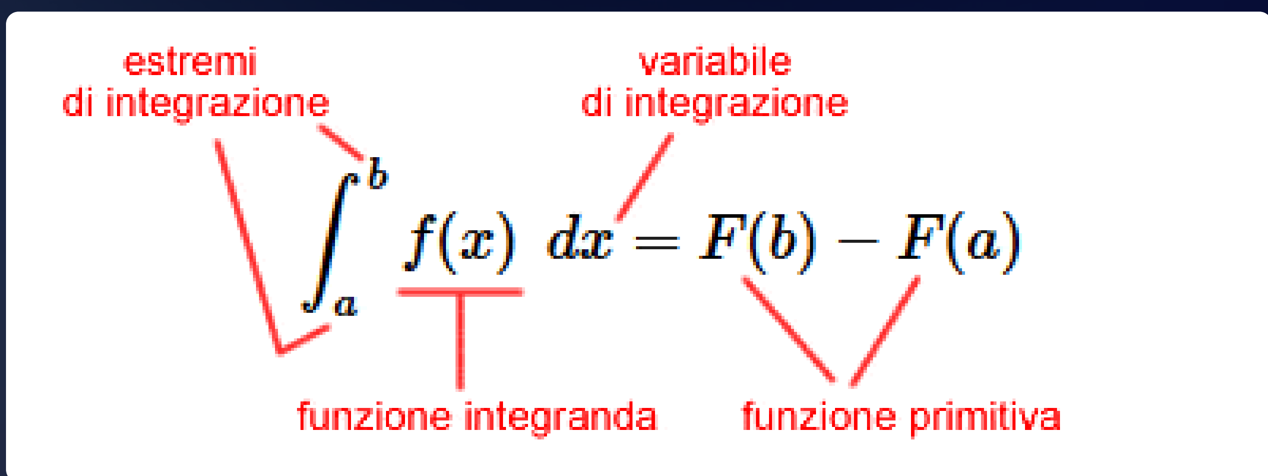
Integrale Indefinito

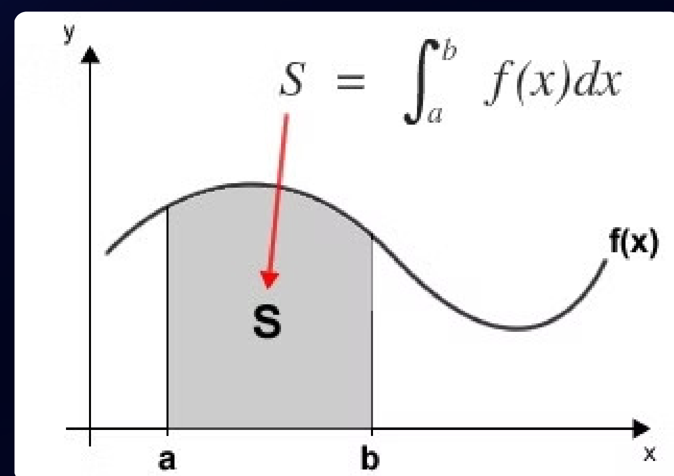
L'integrale indefinito, rappresenta la primitiva F(x) di una funzione f(x), ovvero una famiglia di funzioni la cui derivata è la funzione data. L'integrale indefinito rappresenta quindi l'operazione inversa della derivata.



Integrale Definito

L'integrale definito rappresenta la somma di infiniti elementi infinitesimali di una funzione, calcolata su un intervallo chiuso [a, b]. Esso misura grandezze come l'area sottesa da una curva, il volume di un solido, la lunghezza di un arco, e molto altro.





Regole di Integrazione e Integrali Notevoli

1 Regole Fondamentali

Esistono diverse regole di integrazione che ci permettono di calcolare gli integrali in modo sistematico, come l'integrazione per sostituzione, per parti, delle funzioni razionali, trigonometriche, esponenziali e logaritmiche.

Inoltre, come nelle derivate, le costanti moltiplicative possono essere portate fuori dal calcolo integrale e l'integrale di una somma è calcolabile come la somma degli integrali singoli.

2 Integrali Notevoli

Ci sono alcuni integrali particolarmente importanti e ricorrenti, come l'integrale della funzione potenza, della funzione esponenziale, della funzione seno e coseno, che vengono memorizzati e utilizzati come riferimento per calcolare integrali più complessi.

3 Integrali riconducibili a quelli immediati

Sono una classe di integrali che possono essere espressi in termini di integrali noti. Questi integrali possono essere risolti utilizzando tecniche di riduzione, come la sostituzione o la scelta di una funzione ausiliaria. L'identificazione di integrali riconducibili a quelli elementari è fondamentale per semplificare il calcolo di integrali più complessi.

Integrali indefiniti fondamentali

$$\int f'(x)dx = f(x)+c$$

$$\int a\, dx = ax+c$$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad \text{con } n \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a}+c$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k}+c$$

$$\int e^x dx = e^x+c$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+c$$

$$\int senx dx = -\cos x+c$$

$$\int \cos x dx = senx+c$$

$$\int \left(1+tg^2 x\right)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx+c$$

$$\int \left(1+ctg^2 x\right)dx = \int \frac{1}{sen^2 x}dx = -ctgx+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsenx+c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx+c$$

Integrali indefiniti riconducibili a quelli immediati

$$\int f'(x)dx = f(x)+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$$

$$\int f^n(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+c$$

$$\int f'(x)\cdot sen\, f(x)dx = -\cos f(x)+c$$

$$\int f'(x)\cdot \cos f(x)dx = sen\, f(x)+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = tg\, f(x)+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)}dx = -ctg\, f(x)+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = arcsen\, f(x)+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = arctg\, f(x)+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = \begin{cases} arcsen\, f(x)+c \\ -\arccos f(x)+c \end{cases}$$

$$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+c$$

$$\int a^{f(x)}\cdot f'(x)dx = \frac{1}{\ln a}a^{f(x)}+c$$

Esempi

Integrali indefiniti

01. $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

02. $\int \sqrt{x}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

03. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$

04. $\int x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

05. $\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}dx = 5\int x^{-\frac{3}{4}}dx = 20\sqrt[4]{x} + C$

06. $\int e^{\frac{x}{2}}dx = 2\int \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}dx = 2e^{\frac{1}{2}x} + C$

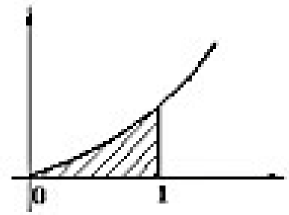
07. $\int 2^x dx = \frac{1}{ln\ 2}2^x + C$

08. $\int 3sin\ xdx = 3\int sin\ xdx = -3cos\ x + C$

09. $\int \frac{3}{x}dx = 3\int \frac{1}{x}dx = 3\ ln\ x + C$

Integrali definiti

Calcolare l'area della regione compresa tra le rette $x=1$, $x=0$ e la curva $y=x^2$:



$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_3^4 \left(4x^2 + 3x + 6 + \frac{13}{x-2}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\left(\frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 6x + 13\ln|x-2|\right)\right]_3^4 =$$

$$= \left(\frac{256}{3} + 24 + 24 + 13\ln 2\right) - \left(36 + \frac{27}{2} + 18 + 13\ln 1\right) =$$

$$= \frac{395}{6} + \ln 2^{13}$$

Integrazione per Parti

L'integrazione per parti è una tecnica fondamentale per calcolare integrali di prodotti di funzioni. La formula dell'integrazione per parti è data da:

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx}$$

dove f e g sono funzioni derivabili.

Scegliere le funzioni f'(x) e g(x) in modo strategico è fondamentale per semplificare il calcolo dell'integrale. La scelta di f'(x) e g(x) dipende dalla forma dell'integrale e dalla facilità di integrazione o derivazione delle funzioni.

$$\begin{aligned}\int 2x\ln(x)dx &= \int \ln(x)\cdot(x^2)'dx\\ &= \ln(x)\cdot x^2 - \int (\ln(x))'\cdot x^2dx\\ &= x^2\ln(x) - \int \frac{1}{x}x^2dx\\ &= x^2\ln(x) - \int xdx\\ &= x^2\ln(x) - \frac{x^2}{2} + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x\cdot e^x\,dx &= xe^x - \int (x)'e^xdx\\ &= xe^x - \int 1\cdot e^xdx\\ &= xe^x - \int e^xdx\\ &= xe^x - e^x + c\end{aligned}$$

Integrali risolvibili per sostituzione

Alcuni integrali, pur non essendo immediati, possono essere trasformati in integrali immediati mediante una opportuna sostituzione di variabile. Questa tecnica si basa sul cambiamento di variabile, che consente di semplificare l'integrale e renderlo più facilmente risolvibile. La scelta della sostituzione appropriata è fondamentale per il successo del metodo.

La sostituzione di variabile è un potente strumento che permette di calcolare integrali complessi che altrimenti sarebbero impossibili da risolvere direttamente. La scelta della sostituzione appropriata richiede esperienza e conoscenza delle proprietà delle funzioni.

$$\boxed{\int \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx}$$

$$\boxed{t=\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2e^t}{x^2}\,dx$$

$$x=\frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2e^t}{\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int 2e^t t^2\,dx$$

$$dx = D\left[\frac{1}{t}\right] dt = -\frac{1}{t^2}\,dt \quad \Rightarrow \quad \int 2e^t t^2 \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int 2e^t \cancel{t^2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{t^2}}\right) dt$$

$$= 2\int e^t \cdot (-1)\,dt$$

$$= -2\int e^t\,dt$$

$$= -2e^t + c$$

$$= \boxed{-2e^{\frac{1}{x}} + c}$$

Integrale di funzioni razionali fratte

Le funzioni razionali fratte sono funzioni della forma f(x) = P(x)/Q(x), dove P(x) e Q(x) sono polinomi. L'integrale di una funzione razionale fratta può essere calcolato mediante la decomposizione in frazioni parziali (metodo dei fratti semplici). Questa tecnica consente di esprimere la funzione razionale come somma di frazioni più semplici, i cui integrali sono noti.

Il metodo di decomposizione in frazioni parziali si basa sulla fattorizzazione del denominatore Q(x) e sulla scrittura della funzione razionale come somma di frazioni con denominatori che corrispondono ai fattori di Q(x). I coefficienti delle frazioni vengono determinati mediante l'utilizzo di metodi algebrici, come il metodo dei coefficienti indeterminati.

Metodo dei fratti semplici: decomposizione in frazioni parziali

Fattore	Forma alternativa	Espressione corrispondente
$x-a$	$ax+b$	$\dfrac{A}{x-a}$ oppure $\dfrac{A}{ax+b}$
$(x-a)^n$	$(ax+b)^n$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{Z}{(x-a)^n}$ oppure $\dfrac{A}{ax+b}+\dfrac{B}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{Z}{(ax+b)^n}$
$ax^2+bx+c, \quad \Delta<0$		$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax^2+bx+c)^n, \quad \Delta<0$		$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\dfrac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\dfrac{Wx+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$

Esempi

$$\boxed{\int \frac{1}{x^3 - x^2} dx}$$

In questo caso l'integranda è una funzione razionale in cui il grado del numeratore è minore del grado del polinomio al denominatore.

Passo 1. Fattorizziamo il polinomio al denominatore:

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

Passo 2. A ciascun fattore associamo il relativo fratto semplice:

$$\text{a } x^2 \text{ associamo } \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

$$\text{a } x-1 \text{ associamo } \frac{C}{x-1}$$

Passo 3. Dobbiamo determinare le costanti A, B e C di modo che:

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

...

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{(A+C)x^2 + (B-A)x - B}{x^2(x-1)}$$

Confrontando con il numeratore della frazione iniziale, possiamo impostare il seguente sistema:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - A = 0 \\ -B = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo la terna di soluzioni

$$A = -1 \ , \ B = -1 \ , \ C = 1$$

e, grazie ai fratti semplici, la funzione integranda può essere espressa nella forma:

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

Passo 4. Calcoliamo l'integrale.

$$\int \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right) dx =$$

$$= -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= \boxed{-\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + C}$$

$$\int \frac{x^2 - 29x + 5}{(x-4)^2 (x^2+3)} dx = \int \frac{1}{x-4} - \frac{5}{(x-4)^2} + \frac{-x+2}{x^2+3} dx$$

$$= \int \frac{1}{x-4} - \frac{5}{(x-4)^2} - \frac{x}{x^2+3} + \frac{2}{x^2+3} dx$$

$$= \ln|x-4| + \frac{5}{x-4} - \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\begin{aligned} \frac{7x^2 - 5x + 6}{(x-1)(x-3)(x-7)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-7} \\ &= \frac{A(x-3)(x-7) + B(x-1)(x-7) + C(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x-7)} \\ &= \frac{A(x^2 - 10x + 21) + B(x^2 - 8x + 7) + C(x^2 - 4x + 3)}{(x-1)(x-3)(x-7)} \\ &= \frac{Ax^2 - 10Ax + 21A + Bx^2 - 8Bx + 7B + Cx^2 - 4Cx + 3C}{(x-1)(x-3)(x-7)} \end{aligned}$$

...

Integrali Impropri e Teorema della media integrale

Gli integrali impropri sono integrali definiti in cui uno o entrambi gli estremi di integrazione sono infiniti o la funzione integranda ha una discontinuità all'interno dell'intervallo di integrazione. Per calcolare un integrale improprio, si sostituisce l'estremo di integrazione infinito con una variabile finita e si calcola il limite per la variabile che tende a infinito.

Se il limite esiste, l'integrale improprio converge; altrimenti, diverge. Gli integrali impropri sono utilizzati in molte aree della matematica e della fisica, come il calcolo di volumi, aree e momenti di inerzia.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \lim_{c \to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{\sqrt{-x}} dx =$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \int_{-1}^{c} (-x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \left[-\frac{(-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_{-1}^{c} =$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left[-2\sqrt{-x} \right]_{-1}^{c} =$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left[2 - 2\sqrt{-c} \right] = 2$$

Il **teorema della media integrale** afferma che il valore medio di una funzione continua su un intervallo è uguale al valore della funzione in un punto all'interno dell'intervallo. In altre parole, se f(x) è una funzione continua sull'intervallo [a, b], allora esiste un punto c in [a, b] tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Questo teorema è utile per calcolare il valore medio di una funzione su un intervallo e per determinare l'esistenza di un punto in cui la funzione assume il suo valore medio.

Applicazioni fisiche

Se f(x) rappresenta la velocità di una variabile durante un certo periodo di tempo, allora l'integrale della funzione ci dà la variazione della stessa variabile rispetto al tempo.

Un esempio di applicazione potrebbe essere nel calcolo della quantità di un determinato prodotto chimico presente in un campione biologico su un intervallo di tempo.

Gli integrali hanno numerose applicazioni in fisica, che vanno ben oltre la semplice determinazione di aree e volumi. Uno degli impieghi fondamentali degli integrali in questo ambito è la descrizione del moto di oggetti soggetti a forze variabili nel tempo.

Attraverso l'utilizzo di integrali, è infatti possibile determinare la posizione, l'accelerazione e la quantità di moto di un oggetto in movimento. Ciò risulta particolarmente utile nello studio di fenomeni fisici complessi, in cui le forze agenti sull'oggetto possono cambiare nel corso del tempo.

Una popolazione di 400 batteri cresce alla velocità $r(t) = 450.268e^{1.12567t}$ batteri l'ora. Quanti batteri ci saranno dopo tre ore?

SOLUZIONE

Sia R(t) la funzione che esprime il numero dei batteri in funzione del tempo. Si ha

$$\boxed{R'(t) = r(t)}$$

cioè R(t) è una primitiva di r(t).
Dalla Formula Fondamentale del Calcolo Integrale otteniamo

$$R(3) - R(0) = \int_0^3 r(t)dt$$

cioè il numero di batteri dopo tre ore è

$$R(3) = R(0) + \int_0^3 r(t)dt$$

dove: $R(0) = 400$

Sia: $a = 450.268$
$b = 1.12567$

$$R(3) = 400 + \int_0^3 ae^{bt}dt =$$

$$= 400 + \left[\frac{a}{b}e^{bt}\right]_0^3 =$$

$$= 400 + \frac{a}{b}e^{3b} - \frac{a}{b} =$$ **11 713 batteri**