

# INTRODUZIONE AL CALCOLO INTEGRALE

Il calcolo integrale è una branca fondamentale della matematica che studia il concetto di integrale, ovvero una somma infinita di piccoli elementi che descrivono il comportamento di una funzione.

Attraverso l'integrale, possiamo calcolare grandezze come l'area sottesa da una curva, il volume di un solido e molto altro ancora.

In questa sezione, esploreremo i principi fondamentali e le applicazioni del calcolo integrale.

# Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

1

## Integrazione

Il teorema fondamentale del calcolo integrale, detto anche **teorema di Torricelli-Barrow**, è uno dei teoremi più importanti del calcolo integrale. Questo teorema stabilisce che la derivata dell'integrale di una funzione è uguale alla funzione stessa. In altre parole, se integriamo una funzione e poi la deriviamo, otterremo la stessa funzione di partenza.

2

## Derivazione

Questo teorema ci permette di passare agevolmente dalla derivazione all'integrazione e viceversa, fornendoci uno strumento potente per risolvere numerosi problemi di analisi matematica.

3

## Applicazioni

Il teorema fondamentale del calcolo integrale ha innumerevoli applicazioni in campi come la fisica, l'ingegneria, l'economia e molti altri ambiti in cui è necessario quantificare il comportamento di fenomeni variabili nel tempo o nello spazio.



# Regole di Integrazione e Integrali Notevoli

## 1 Regole Fondamentali

Esistono diverse regole di integrazione che ci permettono di calcolare gli integrali in modo sistematico, come l'integrazione per sostituzione, per parti, delle funzioni razionali, trigonometriche, esponenziali e logaritmiche.

Inoltre, come nelle derivate, le costanti moltiplicative possono essere portate fuori dal calcolo integrale e l'integrale di una somma è calcolabile come la somma degli integrali singoli.

## 2 Integrali Notevoli

Ci sono alcuni integrali particolarmente importanti e ricorrenti, come l'integrale della funzione potenza, della funzione esponenziale, della funzione seno e coseno, che vengono memorizzati e utilizzati come riferimento per calcolare integrali più complessi.

## 3 Integrali riconducibili a quelli immediati

Sono una classe di integrali che possono essere espressi in termini di integrali noti. Questi integrali possono essere risolti utilizzando tecniche di riduzione, come la sostituzione o la scelta di una funzione ausiliaria. L'identificazione di integrali riconducibili a quelli elementari è fondamentale per semplificare il calcolo di integrali più complessi.

### Integrali indefiniti fondamentali

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{con } n \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

$$\int \text{sen} x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \text{sen} x + c$$

$$\int (1 + \text{tg}^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg} x + c$$

$$\int (1 + \text{ctg}^2 x) dx = \int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -\text{ctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsen} x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg} x + c$$

### Integrali indefiniti riconducibili a quelli immediati

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int f^n(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\int f'(x) \cdot \text{sen} f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \text{sen} f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg} f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = -\text{ctg} f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \text{arcsen} f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \text{arctg} f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \begin{cases} \text{arcsen} f(x) + c \\ -\arccos f(x) + c \end{cases}$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + c$$

# Esempi

## Integrali indefiniti

$$01. \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$02. \int \sqrt{x} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$03. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$04. \int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$05. \int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}} dx = 5 \int x^{-\frac{3}{4}} dx = 20\sqrt[4]{x} + C$$

$$06. \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2 \int \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} + C$$

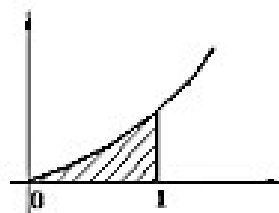
$$07. \int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + C$$

$$08. \int 3 \sin x dx = 3 \int \sin x dx = -3 \cos x + C$$

$$09. \int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln x + C$$

## Integrali definiti

Calcolare l'area della regione compresa tra le rette  $x=1$ ,  $x=0$  e la curva  $y=x^2$ :



$$\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} & \int_3^4 \left( 4x^2 + 3x + 6 + \frac{13}{x-2} \right) \cdot dx = \\ & = \left[ \left( \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 6x + 13 \ln |x-2| \right) \right]_3^4 = \\ & = \left( \frac{256}{3} + 24 + 24 + 13 \ln 2 \right) - \left( 36 + \frac{27}{2} + 18 + 13 \ln 1 \right) = \\ & = \frac{395}{6} + 13 \ln 2 \end{aligned}$$

# Applicazioni fisiche

Se  $f(x)$  rappresenta la velocità di una variabile durante un certo periodo di tempo, allora l'integrale della funzione ci dà la variazione della stessa variabile rispetto al tempo.

Un esempio di applicazione potrebbe essere nel calcolo della quantità di un determinato prodotto chimico presente in un campione biologico su un intervallo di tempo.

Gli integrali hanno numerose applicazioni in fisica, che vanno ben oltre la semplice determinazione di aree e volumi. Uno degli impieghi fondamentali degli integrali in questo ambito è la descrizione del moto di oggetti soggetti a forze variabili nel tempo.

Attraverso l'utilizzo di integrali, è infatti possibile determinare la posizione, l'accelerazione e la quantità di moto di un oggetto in movimento. Ciò risulta particolarmente utile nello studio di fenomeni fisici complessi, in cui le forze agenti sull'oggetto possono cambiare nel corso del tempo.

Una popolazione di 400 batteri cresce alla velocità  $r(t) = 450.268e^{1.12567t}$  batteri l'ora. Quanti batteri ci saranno dopo tre ore?

**SOLUZIONE**

Sia  $R(t)$  la funzione che esprime il numero dei batteri in funzione del tempo. Si ha

$$R'(t) = r(t)$$

cioè  $R(t)$  è una primitiva di  $r(t)$ .

Dalla Formula Fondamentale del Calcolo Integrale otteniamo

$$R(3) - R(0) = \int_0^3 r(t) dt$$

cioè il numero di batteri dopo tre ore è

$$R(3) = R(0) + \int_0^3 r(t) dt$$

dove:  $R(0) = 400$

Sia:  $a = 450.268$

$b = 1.12567$

$$\begin{aligned} R(3) &= 400 + \int_0^3 ac^{bt} dt = \\ &= 400 + \left[ \frac{a}{b} e^{bt} \right]_0^3 = \\ &= 400 + \frac{a}{b} e^{3b} - \frac{a}{b} = \mathbf{11\ 713\ batteri} \end{aligned}$$