Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Fisica

Analisi Matematica II

prof. Antonio Greco

Quarta parte

Anno accademico 2024/25

LU 19 NOV 2024

INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE (INTEGRALE DI UNA FUNZIONE SCALARE)

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE CONTINUA $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ CON $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ED UNA CURVA REGOLARE $\gamma \subset \Omega$ DI EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

PER $t \in [a,b]$. ALLORA LA FUNZIONE COMPOSTA $f(\bar{r}(t))$ È CONTINUA IN $[a,b]$ E SI DEFINISCE

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \, \|\bar{r}'(t)\| \, dt$$

$$= \int_0^L f(\bar{r}(\sigma(s))) \, ds$$

SI ESTENDE ALLE CURVE γ REGOLARI A TRATTI CIOÈ CON $\bar{r}(t)$ CONTINUA IN $[a,b]$ ED ESISTONO $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ TALI CHE $\bar{r}(t)$ È DI CLASSE $C^1([t_{i-1}, t_i])$ PER OGNI $i = 1, \ldots, n$ CON $\bar{r}'(t) \neq \bar{0}$ IN (t_{i-1}, t_i) COME PURE $\bar{r}'(t_{i-1}^+) \neq \bar{0}$ E $\bar{r}'(t_i^-) \neq \bar{0}$ PER OGNI i.

CURIOSITÀ: TROVARE UNA PARAMETRIZZAZIONE $\bar{r} = \bar{r}(t)$ DI CLASSE $C^1([a,b])$ DEL QUADRATO.

SE γ È REGOLARE A TRATTI, SI DEFINISCE

$$\int_\gamma f \, ds = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f \, ds \quad \text{DOVE } \gamma_i$$

È PARAMETRIZZATA DA $\bar{r}(t)$ PER $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

GI 21 NOV 2024

NOZIONE DI CURVA CONTINUA RETTIFICABILE

DATA $\bar{r}(t)$ CONTINUA IN $[a,b]$ SI CONSIDERANO $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_m = b$ E DI CONSEGUENZA

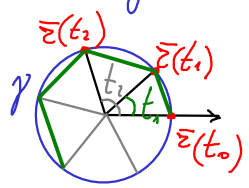
$$S = \sum_{i=1}^m \| \bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1}) \|.$$

SE $\sup S < +\infty$ SI DICE CHE LA CURVA È RETTIFICABILE E SI PUÒ DEFINIRE LA LUNGHEZZA $L = \sup S$. SI DIMOSTRA CHE SE γ È REGOLARE A TRATTI ALLORA È RETTIFICABILE E RISULTA $\int_\gamma ds = \sup S$.

NOTA CHE SE γ È REGOLARE ALLORA

$$\sum_{i=1}^m \| \bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1}) \| \leq$$

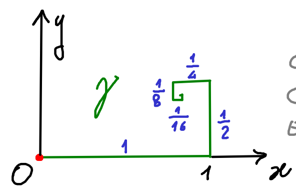
$$\leq \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} ds = \int_\gamma ds$$



$t \in [0, 2\pi]$

ESEMPIO DI γ CHE NON È REGOLARE A TRATTI ED È RETTIFICABILE: NOTO CHE I SEGMENTI DI LUNGHEZZA $\frac{1}{2^i}$ PER $i = 1, 2, 3, \ldots$ SONO INFINITI E SO CHE $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 1$

QUINDI LI UNISCO E OTTENGO γ RETTIFICABILE E DI LUNGHEZZA 1:



CURIOSITÀ: TROVARE LE COORDINATE DEL SECONDO ESTREMO

GI 21 NOV 2024

INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE

CONSIDERIAMO UN CAMPO VETTORIALE $\bar{E} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ CONTINUO IN $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ED UNA CURVA REGOLARE $\gamma \subset \Omega$ DI EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

PER $t \in [a,b]$. ALLORA IL PRODOTTO SCALARE $\bar{E}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)$ È CONTINUO IN $[a,b]$ E SI DEFINISCE

$$\int_\gamma \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_\gamma \bar{E} \cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{E}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\, dt$$

OSSERVAZIONE: POSTO $t = a + (b-a)\tau$ PER $\tau \in [0,1]$ LA CURVA DIVENTA $\bar{r} = \bar{r}(t(\tau))$ CON VELOCITÀ $\frac{d\bar{r}}{d\tau} = (b-a)\frac{d\bar{r}}{dt}$ E LA DEFINIZIONE PORGE $\int_\gamma \bar{E} \cdot d\bar{l} =$

$$= \int_0^1 \bar{E}(\bar{r}(t(\tau))) \cdot \frac{d\bar{r}}{d\tau}\, d\tau,$$

PROPRIO L'INTEGRALE CHE SI OTTIENE DA

$$\int_a^b \bar{E}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\, dt$$

CON LA SOSTITUZIONE $t = t(\tau) = a + (b-a)\tau$.

ESERCIZIO: SCRIVERE $\int_\gamma \bar{E} \cdot d\bar{l}$ RAPPRESENTANDO LA CURVA γ CON L'ASCISSA CURVILINEA s.

OSSERVAZIONE: SI PUÒ SEMPRE PARAMETRIZZARE γ CON $\tau \in [0,1]$.

IMPORTANTE: SE NELL'INTEGRALE $\int_\gamma \bar{E} \cdot d\bar{l}$

$$= \int_0^1 \bar{E}(\bar{r}(\tau)) \cdot \bar{r}'(\tau)\, d\tau$$

PONIAMO $\tau = 1 - t$ CON $t \in [0,1]$ OTTENIAMO

$$-\int_1^0 \bar{E}(\bar{r}(1-t)) \cdot \bar{r}'(1-t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \bar{E}(\bar{r}(1-t)) \cdot \bar{r}'(1-t)\, dt$$

D'ALTRO CANTO, APPLICANDO LA DEFINIZIONE

$$\int_{-\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_a^b \bar{E}(\bar{r}(1-t)) \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}(t)\, dt$$

ALLA CURVA $-\gamma$ PARAMETRIZZATA DA $\bar{r} = \bar{r}(1-t)$ OTTENIAMO

$$\int_{-\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_0^1 \bar{E}(\bar{r}(1-t)) \cdot \bar{r}'(1-t)\, dt$$

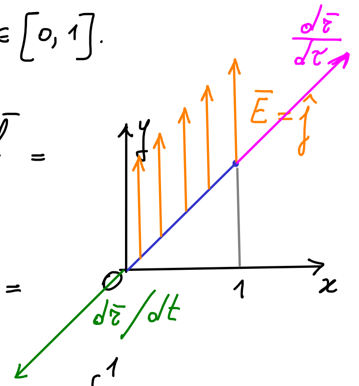
QUINDI L'INTEGRALE DI SECONDA SPECIE CAMBIA SEGNO PASSANDO DA $\tau \in [0,1]$ A $t = 1 - \tau$.

IN SINTESI: $\int_\gamma \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_{-\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l}$.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $\int_\gamma f\, ds = \int_{-\gamma} f\, ds$.

 GI 21 NOV 2024

ESEMPIO: PRENDO $\bar{E} = \hat{j}$ E γ IL SEGMENTO $\begin{cases} x = \tau \\ y = \tau \end{cases}$ PER $\tau \in [0,1]$.



SI TROVA $\int_\gamma \bar{E}\cdot d\bar{\ell} =$

$$= \int_0^1 \hat{j}\cdot \bar{r}'(\tau)\, d\tau = $$

$$= \int_0^1 \hat{j}\cdot(\hat{i}+\hat{j})\, d\tau = \int_0^1 d\tau = 1.$$

CONSIDERIAMO ORA IL SEGMENTO $-\gamma$ PARAMETRIZZATO DA $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-t \end{cases}$ CON $t\in[0,1]$.

SI TROVA $\int_{-\gamma} \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = \int_0^1 \bar{E}\cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\, dt =$

$$= \int_0^1 \bar{E}\cdot(-\hat{i}-\hat{j})\, dt = -\int_0^1 \hat{j}\cdot(\hat{i}+\hat{j})\, d\tau = -1.$$

OSSERVAZIONE: SE SCRIVIAMO $\bar{E}(x,y,z) = X(x,y,z)\,\hat{i} + Y(x,y,z)\,\hat{j} + Z(x,y,z)\,\hat{k}$ E $\bar{r}'(t) = x'(t)\,\hat{i} + y'(t)\,\hat{j} + z'(t)\,\hat{k}$ OTTENIAMO

$$\int_\gamma \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = \int_a^b \left(X x' + Y y' + Z z'\right) dt = \int_a^b X x'\, dt + \int_a^b Y y'\, dt + \int_a^b Z z'\, dt$$

E ARRIVIAMO A TRE INTEGRALI DI FORME DIFFERENZIALI.

INTEGRALE DI UNA FORMA DIFFERENZIALE

PRENDIAMO UNA $f \in C^0(\Omega)$ E UNA CURVA REGOLARE $\gamma \in \Omega$. LE ESPRESSIONI $f\,dx$, $f\,dy$ E $f\,dz$ SI DICONO FORME DIFFERENZIALI E SI DEFINISCONO GLI INTEGRALI

$$\int_\gamma f\, dx = \int_a^b f(\bar{r}(t))\, x'(t)\, dt,$$

$$\int_\gamma f\, dy = \int_a^b f(\bar{r}(t))\, y'(t)\, dt,$$

$$\int_\gamma f\, dz = \int_a^b f(\bar{r}(t))\, z'(t)\, dt.$$

CON QUESTE DEFINIZIONI, SI PUÒ SCRIVERE

$$\int_\gamma \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = \int_\gamma X\, dx + \int_\gamma Y\, dy + \int_\gamma Z\, dz.$$

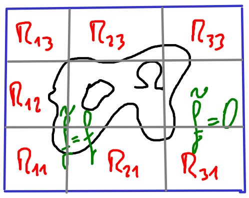
LU 25 NOV 2024

L'INTEGRALE DOPPIO

DEFINIZIONE: CONSIDERIAMO $f:\Omega\to\mathbb{R}$ LIMITATA CON Ω LIMITATO, DUNQUE $\Omega \subset [a,b]\times[a,b]$. PRESO $n\in\{1,2,\dots\}$ DEFINIAMO $x_k, y_k = a + k\frac{b-a}{n}$ PER $k=0,\dots,n$;

$$\tilde f(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{SE } (x,y)\in\Omega,\\ 0, & \text{SE } (x,y)\in[a,b]^2\setminus\Omega;\end{cases}$$

$R_{ij} = [x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ DI AREA DATA DA $|R_{ij}| = \frac{(b-a)^2}{n^2}$;



$$s_n = \sum_{i,j=1}^{n} |R_{ij}| \inf_{R_{ij}} \tilde f = \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \inf_{R_{ij}}\tilde f$$

$$\le S_n = \sum_{i,j=1}^{n} |R_{ij}| \sup_{R_{ij}} \tilde f = \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \sup_{R_{ij}}\tilde f$$

SI DIMOSTRA CHE $s_n \le S_m$ E QUINDI

$$\sup_n s_n = \underline{\int}_\Omega f\,dx\,dy \le \overline{\int}_\Omega f\,dx\,dy = \inf_m S_m$$

SE VALE L'UGUAGLIANZA, LA FUNZIONE f SI DICE INTEGRABILE SU Ω E SI DEFINISCE

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \sup_n s_n$$

ESEMPIO: $\Omega=[a,b]\times[a,b]$ E $f(x,y)=c$ (COSTANTE). ALLORA $\inf_{R_{ij}} f = c$ E $\sup_{R_{ij}} f = c$ QUINDI

$$s_n = \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \inf_{R_{ij}}\tilde f = \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} c$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot c\cdot n^2 = (b-a)^2\cdot c \quad \text{E}$$

$S_m = (b-a)^2\cdot c$ QUINDI

$$\underline{\int}_\Omega c\,dx\,dy = \sup_n s_n = (b-a)^2\cdot c$$

$$= \overline{\int}_\Omega c\,dx\,dy = \inf_m S_m$$ E SI TROVA

$$\iint_\Omega c\,dx\,dy = c|\Omega|.$$

PETTINE DI DIRICHLET

$$\Omega = (\mathbb{Q}\cap[0,1])\times[0,1] = \{(x,y)\in[0,1]^2 : x\in\mathbb{Q}\}$$

$$f(x,y) = \begin{cases}1, & (x,y)\in\Omega\\ 0, & (x,y)\in[0,1]^2\setminus\Omega\end{cases}$$

CURIOSITÀ: TROVARE $\underline{\int}_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 0$

E $\overline{\int}_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 1 \neq \underline{\int}_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE DOPPIO

1) SE $f: \Omega \to [0, +\infty)$ È INTEGRABILE, L'INTEGRALE DOPPIO $\iint_\Omega f \, dx \, dy$ È IL VOLUME DEL SOTTOGRAFICO $G =$
$$= \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega, \ z \in [0, f(x,y)]\}$$

2) SE $f: \Omega \to (-\infty, 0]$ È INTEGRABILE, IL NUMERO $-\iint_\Omega f \, dx \, dy \geq 0$ È IL VOLUME DEL SOPRAGRAFICO $E =$
$$= \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega, \ z \in [f(x,y), 0]\}$$

3) SE $f(x,y) = 1$ È INTEGRABILE SU Ω, L'INTEGRALE $\iint_\Omega dx \, dy$ È L'AREA DI Ω.

SI PARLA, PIÙ PROPRIAMENTE, DI MISURA DI Ω, DI E E DI G.

LU 25 NOV 2024

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

1) LINEARITÀ: SE f E g SONO INTEGRABILI, E PRENDO $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ALLORA $h(x,y) = \lambda f(x,y) + \mu g(x,y)$ È INTEGRABILE, E
$$\iint_\Omega h(x,y) \, dx \, dy = \lambda \iint_\Omega f(x,y) \, dx \, dy + \mu \cdot \iint_\Omega g(x,y) \, dx \, dy;$$

2) MONOTONIA: SE $f(x,y) \leq g(x,y)$ IN Ω E SONO INTEGRABILI, ALLORA
$$\iint_\Omega f(x,y) \, dx \, dy \leq \iint_\Omega g(x,y) \, dx \, dy;$$

3) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: SE f È INTEGRABILE SU Ω ALLORA $|f(x,y)|$ È INTEGRABILE E
$$\left| \iint_\Omega f(x,y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_\Omega |f(x,y)| \, dx \, dy$$

SI RICAVANO DALLA DEFINIZIONE

LU 25 NOV 2024

SU QUALI DOMINI Ω LA FUNZIONE $f(x,y) = 1$ È INTEGRABILE?

SI CHIAMANO « INSIEMI MISURABILI SECONDO PEANO–JORDAN » E RISULTA $|\Omega| = \iint_{\Omega} dx\,dy$ (MISURA DI Ω).

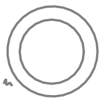
GLI INSIEMI REGOLARI (UNIONE DI UN NUMERO FINITO DI INSIEMI SEMPLICI O NORMALI) SONO MISURABILI.

GLI INSIEMI SEMPLICI O NORMALI SONO QUELLI DEL TIPO $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$ CON $\varphi, \psi \in C^0([a,b])$

ESEMPIO: IL RETTANGOLO $[a,b] \times [c,d]$ È NORMALE ($\varphi(x) = c$, $\psi(x) = d$); IL CERCHIO $\Omega = \{(x,y) : x \in [-R, R], y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]\}$

ESERCIZIO: $\Omega = \overline{B}_{R_2}(0,0) \setminus B_{R_1}(0,0)$ CON $R_1 < R_2$ È REGOLARE (UNIONE DI DUE DOMINI NORMALI)

CURIOSITÀ: PER $n = 1, 2, 3, \ldots$ PRENDO $\Omega_n = \overline{B}_{\frac{1}{2n}}(0,0) \setminus B_{\frac{1}{2n+1}}(0,0)$



MI CHIEDO SE $\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n$ È REGOLARE

4) L'ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE: SE Ω_1 E Ω_2 SONO REGOLARI E PRIVI DI PUNTI INTERNI IN COMUNE, E SE f È INTEGRABILE SU Ω_1 E SU Ω_2 ALLORA LO È SU $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ E RISULTA $\iint_{\Omega} f\,dx\,dy$

$$= \iint_{\Omega_1} f\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} f\,dx\,dy$$

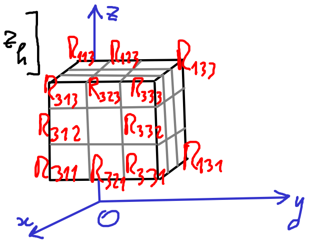
SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LE FUNZIONI CONTINUE SONO INTEGRABILI SUI DOMINI REGOLARI. IDEM SE HANNO UN NUMERO FINTO DI PUNTI DI DISCONTINUITÀ.

LA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE MULTIPLO ISPIRA I METODI DI CALCOLO NUMERICO APPROSSIMATO

MA 26 NOV 2024

L'INTEGRALE TRIPLO

DEFINIZIONE: CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE LIMITATA $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ AVENTE PER DOMINIO UN INSIEME LIMITATO $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, DUNQUE $\Omega \subset [a, b]^3$. PER $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ DEFINISCO $x_k, y_k, z_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ PER $k = 0, \dots, n$ E $R_{ijh} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{h-1}, z_h]$

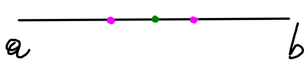


POSTO $s_n = \sum_{i,j,h=1}^{n} |R_{ijh}| \inf_{R_{ijh}} \tilde{f}$ E

$S_m = \sum_{i,j,h=1}^{m} |R_{ijh}| \sup_{R_{ijh}} \tilde{f}$ DOVE $\tilde{f}$ DENOTA

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{SE } (x,y,z) \in \Omega \\ 0 & \text{SE } (x,y,z) \in [a,b] \setminus \Omega \end{cases}$$

SI VEDE CHE $s_n \leq S_n$ E ANZI $s_n \leq S_m$ PER OGNI n, m



QUINDI $\underline{\int}_{\Omega} f\, dx\, dy\, dz = \sup_n s_n \leq \overline{\int}_{\Omega} f\, dx\, dy\, dz = \inf_m S_m$. SE VALE L'UGUAGLIANZA, SI DICE CHE f È INTEGRABILE E SI DEFINISCE $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \inf_m S_m$

DALLA DEFINIZIONE SI RICAVANO LE PROPRIETÀ DI LINEARITÀ, MONOTONIA RISPETTO ALLA FUNZIONE INTEGRANDA, E LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE (MA NON IL VALORE NUMERICO).

ESEMPIO: SE $f = c$ (COSTANTE) IN $[a,b]^3$ ALLORA $s_n = S_n = \sum_{i,j,h=1}^{n} \frac{(b-a)^3}{n^3}\, c = (b-a)^3 c$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA: SE $f = 1$ È INTEGRABILE SU Ω, ALLORA $\int_{\Omega} f\, dx\, dy\, dz = |\Omega|$ IL VOLUME DI Ω, PIÙ ESATTAMENTE LA MISURA DI PEANO-JORDAN TRIDIMENSIONALE DI Ω.

GLI INSIEMI MISURABILI SECONDO PEANO-JORDAN SONO PROPRIO QUELLI DOVE $f = 1$ È INTEGRABILE.

È SUFFICIENTE CHE Ω SIA REGOLARE OVVERO UNIONE DI UN NUMERO FINITO DI DOMINI SEMPLICI $W = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega_0 \text{ E } z \in [\varphi(x,y), \psi(x,y)]\}$ CON $\varphi, \psi \in C^0(\Omega_0)$ E $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ È A SUA VOLTA REGOLARE.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE Ω_1 E Ω_2 SONO REGOLARI IN DIMENSIONE 3, E SE $\mathring{\Omega}_1 \cap \mathring{\Omega}_2 = \emptyset$ ALLORA $\int_{\Omega_1} f\, dx\, dy\, dz + \int_{\Omega_2} f\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ (ADDITIVITÀ)

A CONDIZIONE CHE f SIA INTEGRABILE SU Ω_1, Ω_2.

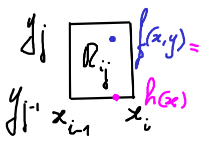
MA 26 NOV 2024

METODI ANALITICI DI CALCOLO

CONSIDERIAMO $f(x,y) = h(x)$ PER $x,y \in [a,b] \times [c,d]$ (LIMITATA). SI TROVA $s_n =$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n} \inf_{R_{ij}} f(x,y) \quad \text{MA}$$

$$\inf_{R_{ij}} f(x,y) = \inf_{R_{ij}} h(x)$$



$$= \inf_{[x_{i-1},x_i]} h(x) \quad \text{QUINDI } s_n =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} h(x) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} h(x) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n} \sum_{i=1}^{n} n \inf_{[x_{i-1},x_i]} h(x) =$$

$$= (d-c) \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} h(x)$$

QUINDI $\sup_n s_n = (d-c) \int_a^b h(x)\,dx$

SE h È INTEGRABILE, QUINDI:

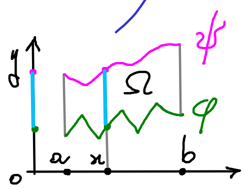
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} h(x)\,dx\,dy = (d-c) \int_a^b h(x)\,dx$$

FORMULE DI RIDUZIONE

CONSIDERIAMO $f \in C^0(\Omega)$ CON $\Omega = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$ DOVE $\varphi, \psi \in C^0([a,b])$. ALLORA f È INTEGRABILE E

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$



ESEMPIO: CALCOLIAMO $\iint_\Omega xy\,dx\,dy$ CON $\Omega = [0,1]^2$. SI TROVA $\iint_\Omega xy\,dx\,dy =$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\,dy \right) dx =$$

PERCHÉ $\Omega = \{(x,y) : x \in [0,1],\ y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$

CON $\varphi(x) = 0$ E $\psi(x) = 1$ PER $x \in [0,1]$.

$$= \int_0^1 \left(x \int_0^1 y\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x\,dx = \frac{1}{4}.$$

RISCONTRO: IL PARALLELEPIPEDO DI VERTICI $(0,0,0)$ E $(1,1,1)$ HA VOLUME $1 > \frac{1}{4}$.

NOTA: SE $f(x,y) = f(x)$ ALLORA $\iint_R f\,dx\,dy$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d h(x)\,dy \right) dx = (d-c) \int_a^b h(x)\,dx$$

GI 28 NOV 2024

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE. SCRIVO

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Omega_i} f(x,y)\,dx\,dy$$

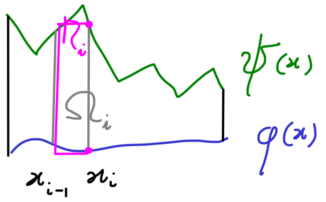
DOVE $\Omega_i = \{(x,y) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ E

$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

PER LA CONTINUITÀ UNIFORME DI $f(x,y)$ E DI $\varphi(x)$, $\psi(x)$, PER OGNI $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISTE n_0 TALE CHE PER OGNI $n \geq n_0$ L'INTEGRALE $\iint_{\Omega_i} f(x,y)\,dx\,dy$ SI APPROSSIMA CON

$$\iint_{R_i} f(x_i, y)\,dx\,dy$$

DOVE $R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [\varphi(x_i), \psi(x_i)]$



E DI CONSEGUENZA L'INTEGRALE $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ SI APPROSSIMA A SUA VOLTA CON $\sum_{i=1}^{n} \iint_{R_i} f(x_i, y)\,dx\,dy =$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y)\,dy \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

ESTENSIONE ALL'INTEGRALE TRIPLO

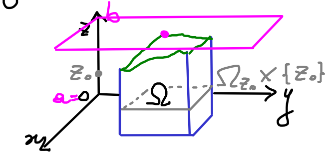
SE $f \in C^0(\Omega)$ CON $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ SEMPLICE: $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega_0$ E $z \in [\varphi(x,y), \psi(x,y)]\}$ CON $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ REGOLARE, ALLORA

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{\Omega_0} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

INOLTRE, POSTO $a = \min_{(x,y,z)\in\Omega} z$ E

$b = \max_{(x,y,z)\in\Omega} z$



E $\Omega_{z_0} = \{(x,y) : (x,y,z_0) \in \Omega\}$ SEZIONE ORIZZONTALE, SI PUÒ ANCHE SCRIVERE

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_a^b \left(\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

ESEMPIO: SE $\Omega = \overline{B_R}(0,0,0)$ ALLORA $a = -R$, $b = R$, $\Omega_{z_0} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2 - z_0^2\}$

$$|\Omega| = \int_{-R}^{R} \left(\iint_{\Omega_z} dx\,dy \right) dz =$$

$$= \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - z^2)\,dz = \frac{4}{3}\pi R^3$$

GI 28 NOV 2024

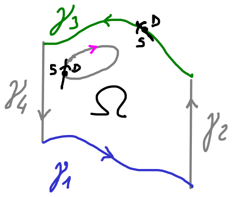
LU 02 DIC 2024

FORMULE DI GAUSS–GREEN

CONSIDERIAMO $f \in C^1(\Omega)$ IN Ω SEMPLICE NEL PIANO, E SIANO $\gamma_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = \varphi(t), \end{cases} t \in [a,b];$

$-\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = \psi(t) \end{cases}$ CURVE REGOLARI, QUINDI

$\varphi, \psi \in C^1([a,b])$.



SI TROVA $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \Big(f(x, \psi(x)) - f(x, \varphi(x)) \Big)\, dx =$$

$$= \int_a^b f(x,\psi(x))\,dx - \int_a^b f(x,\varphi(x))\,dx$$

$$= \int_{-\gamma_3} f\,dx - \int_{\gamma_1} f\,dx = -\int_{\gamma_3} f\,dx - \int_{\gamma_1} f\,dx$$

ESERCIZIO: $\displaystyle\int_{\gamma_2} f\,dx = \int_{\gamma_4} f\,dx = 0$

$= -\displaystyle\int_{\partial\Omega} f\,dx$ ESSENDO $\partial\Omega = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

ESERCIZIO: $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} f\,dy$

PRINCIPALI SISTEMI DI COORDINATE CURVILINEE

COORDINATE POLARI PIANE: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

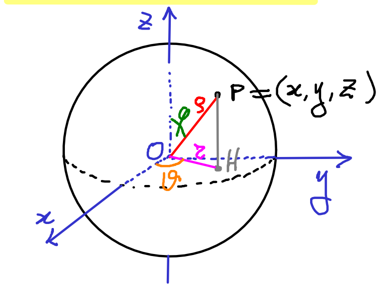
COORDINATE CILINDRICHE NELLO SPAZIO:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

ESEMPIO: L'EQUAZIONE DI UN CILINDRO SI SCRIVE $r = R$ (RAGGIO DI BASE)

ESERCIZIO: SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA SFERA $\partial B_R(0,0,0)$ NEL SISTEMA DI COORDINATE CILINDRICHE (r, θ, z)

COORDINATE SFERICHE:



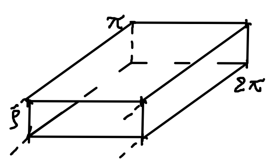
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$r = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

QUI $\rho \in (0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ E $\varphi \in (0, \pi)$

ESEMPIO: L'EQUAZIONE DELLA SFERA $\partial B_R(0,0,0)$ È $\rho = R$ (COSTANTE)



LO SPAZIO DELLE $(\rho, \theta, \varphi) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)$

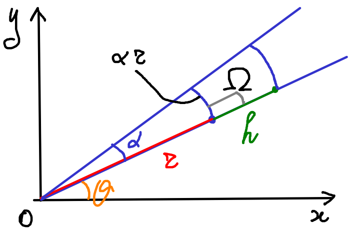
 LU 02 DIC 2024

CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

ESEMPIO: L'AREA DEL CERCHIO $\overline{B}_R(0,0)$ È DATA DA

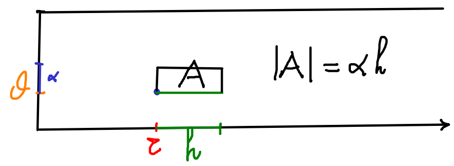
$$|\overline{B}_R(0,0)| = \iint_{\overline{B}_R(0,0)} dx\,dy =$$

$$= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^R r\,dr = 2\pi\frac{R^2}{2}$$



$$|\Omega| = \left[\pi(r+h)^2 - \pi r^2\right]\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{2}(2hr + h^2)$$

$$\lim_{\alpha,h\to 0}\frac{|\Omega|}{\alpha h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}(2r+h) = r$$



$|A| = \alpha h$

QUINDI SOSTITUIAMO $dx\,dy$ CON $r\,dr\,d\theta$.

ESEMPIO: IL VOLUME DELLA SEMISFERA È

$$\iint_{\overline{B}_R(0,0)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} \sqrt{R^2-r^2}\;r\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr =$$

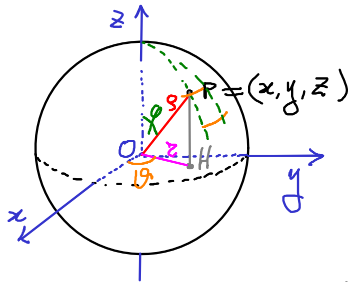
$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi(R^2)^{\frac{3}{2}}$$

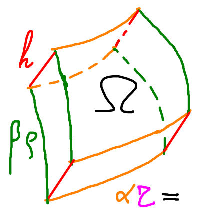
ESEMPIO: IL VOLUME DELLA SFERA È DATO DA

$$|\overline{B}_R(0,0,0)| = \iiint_{\overline{B}_R(0,0,0)} dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_A \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

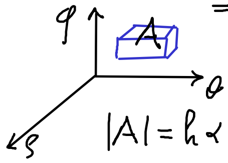
DOVE $A = [0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$





$\alpha r = \alpha\rho\operatorname{sen}\varphi$

$$\lim_{h,\alpha,\beta\to 0}\frac{|\Omega|}{h\alpha\beta}$$



$|A| = h\alpha\beta$

$$= \lim_{h,\alpha,\beta\to 0}\frac{h\alpha\rho\operatorname{sen}\varphi\,\beta\rho}{h\alpha\beta} = \rho^2\operatorname{sen}\varphi.$$

SI TROVA:

$$\iiint_A \rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$2\pi\iint_{[0,R]\times[0,\pi]} \rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^R\left(\int_0^\pi \rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\right)d\rho =$$

$$= 2\pi\int_0^R \rho^2\cdot 2\,d\rho = 4\pi\frac{R^3}{3}$$

LU 02 DIC 2024

IN GENERALE, AVREMO (IN DIMENSIONE 2)

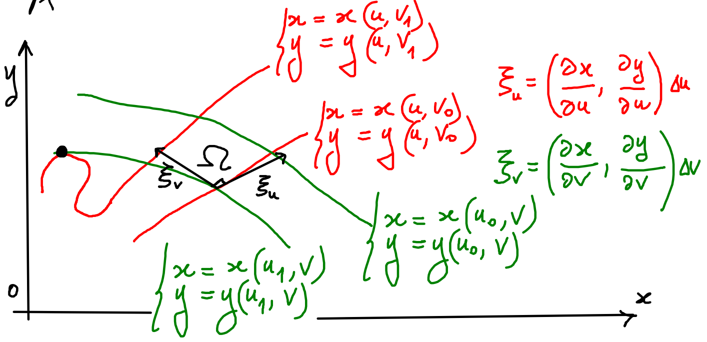
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

$$T : A \longrightarrow \Omega$$

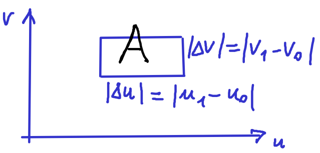
CHE TRASFORMA IL DOMINIO REGOLARE A NEL PIANO uv NEL DOMINIO REGOLARE Ω NEL PIANO xy. AVREMO CHE

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\iint_A f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du\,dv$$



$$\lim_{\Delta u, \Delta v \to 0} \frac{|\Omega|}{\Delta u \cdot \Delta v} =$$



$$= \lim_{\Delta u, \Delta v \to 0} \frac{\| \xi_u \times \xi_v \|}{\Delta u \cdot \Delta v}$$

MATRICE JACOBIANA DI $T(u,v)$

$$\| \xi_u \times \xi_v \| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

SERVE $x(u,v)$, $y(u,v)$ DI CLASSE C^1 E

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0.$$

IN TAL CASO,

$$\lim_{\Delta u, \Delta v \to 0} \frac{\| \xi_u \times \xi_v \|}{\Delta u \cdot \Delta v} = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|$$

ESERCIZIO: IN COORDINATE POLARI, SI TROVA

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \rho$$

GI 05 DIC 2024

SUPERFICI REGOLARI

$$\bar{x} = T(u,v) \qquad T : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

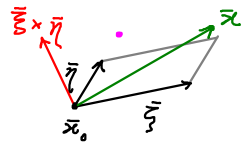
SONO DATE DA
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$
SOTTO OPPORTUNE CONDIZIONI

ESEMPI:

$$\begin{cases} x = R \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = R \cos\varphi \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi),\ \varphi \in (0, \pi)$$

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + u\,\bar{\xi} + v\,\bar{\eta} \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + u\,\xi_x + v\,\eta_x \\ y = y_0 + u\,\xi_y + v\,\eta_y \\ z = z_0 + u\,\xi_z + v\,\eta_z \end{cases} \qquad \boxed{\bar{\xi} \times \bar{\eta} \neq \bar{0}}$$



$$(\bar{x} - \bar{x}_0) \cdot \bar{\xi} \times \bar{\eta} = 0$$

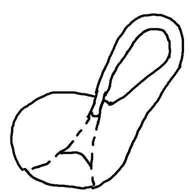
$$\hat{n} = \frac{\bar{\xi} \times \bar{\eta}}{\| \bar{\xi} \times \bar{\eta} \|}$$ È UN VERSORE NORMALE, L'ALTRO È

$$\hat{n} = -\frac{\bar{\xi} \times \bar{\eta}}{\| \bar{\xi} \times \bar{\eta} \|}.$$

SULLA SFERA, IL VERSORE

$$\hat{n} = \frac{\bar{x}}{R} = \frac{x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}}{R}$$

SI DICE NORMALE USCENTE, E $-\frac{\bar{x}}{R}$ NORMALE ENTRANTE



LA BOTTIGLIA DI KLEIN NON È ORIENTABILE PERCHÉ NON POSSIEDE UN CAMPO CONTINUO $\hat{n}(x,y,z)$

LE CONDIZIONI PER LA REGOLARITÀ SONO:

1) CHE $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ SIANO DI CLASSE $C^1(A)$ CON $A \subset \mathbb{R}^2$ REGOLARE;

2) I VETTORI VELOCITÀ $\bar{x}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $\bar{x}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ SODDISFINO

$$\bar{x}_u \times \bar{x}_v \neq \bar{0}.$$

GI 05 DIC 2024

LA CONDIZIONE $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq \bar{0}$ SIGNIFICA

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \hat{\imath} + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \hat{k} \neq \bar{0}$$

$$J = DT = \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} \right) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

ABBIA RANGO 2.

L'INTEGRALE SUPERFICIALE

DATA UNA SUPERFICIE REGOLARE Σ RAPPRESENTATA DA $\bar{x} = T(u,v)$, $(u,v) \in A$ E UNA FUNZIONE CONTINUA $f : \Sigma \to \mathbb{R}$

SI DEFINISCE $\displaystyle\iint_\Sigma f \, d\sigma =$

$$= \iint_A f(T(u,v)) \, \| \bar{r}_u \times \bar{r}_v \| \, du \, dv$$

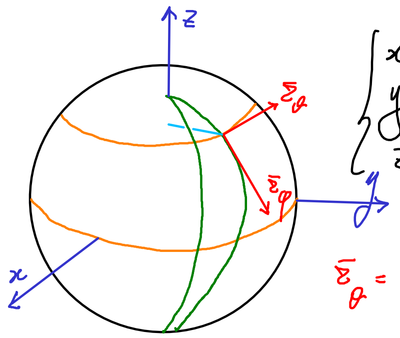
IN PARTICOLARE, L'AREA DI Σ È $\displaystyle\iint_\Sigma d\sigma =$

$$= \iint_A \| \bar{r}_u \times \bar{r}_v \| \, du \, dv.$$

SI ESTENDE ALLE SUPERFICI REGOLARI A PEZZI

ESEMPIO: L'AREA DELLA SFERA $\partial B_R(0,0,0)$

È $$\iint_{\partial B_R(0,0,0)} d\sigma = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} R^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\varphi$$



$$\begin{cases} x = R \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = R \cos\varphi \end{cases}$$

$\bar{r}_\theta = R(-\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, 0)$

$\bar{r}_\varphi = R(\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi)$

PIANO TANGENTE

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \, x_u(u_0,v_0) + \mu \, x_v(u_0,v_0) \\ y = y_0 + \lambda \, y_u(u_0,v_0) + \mu \, y_v(u_0,v_0) \\ z = z_0 + \lambda \, z_u(u_0,v_0) + \mu \, z_v(u_0,v_0) \end{cases}$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

PUNTO DI TANGENZA $(x_0, y_0, z_0) = T(u_0, v_0)$

OSSERVAZIONE: $\bar{r}_\theta \circ \bar{r}_\varphi = R^2 \cdot 0 = 0$

MA ALLORA $\| \bar{r}_\theta \times \bar{r}_\varphi \| = \| \bar{r}_\theta \| \cdot \| \bar{r}_\varphi \|$.

SI TROVA CHE $\| \bar{r}_\theta \| = R \operatorname{sen}\varphi$ E $\| \bar{r}_\varphi \| = R$, DUNQUE $\| \bar{r}_\theta \times \bar{r}_\varphi \| = R^2 \operatorname{sen}\varphi$

$$\iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} R^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$$

$$= 4\pi R^2$$

GI 05 DIC 2024

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE REGOLARE ORIENTABILE

ABBIAMO UN CAMPO $\hat{n}(x,y,z)$ DI VERSORI NORMALI CONTINUO SU Σ. DATO ALLORA UN CAMPO VETTORIALE $\bar{E}(x,y,z)$ CONTINUO SU Σ SI PUÒ DEFINIRE IL FLUSSO Φ DI $\bar{E}$ ATTRAVERSO Σ PONENDO

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \bar{E} \cdot \hat{n} \, d\sigma$$

E SI HA

$$\iint_{-\Sigma} \bar{E} \cdot \hat{n}_{-\Sigma} \, d\sigma = - \iint_{\Sigma} \bar{E} \cdot \hat{n}_{\Sigma} \, d\sigma$$

ESSENDO $-\Sigma$ LA SUPERFICIE CHE HA LO STESSO SOSTEGNO DI Σ E LA CUI NORMALE È $\hat{n}_{-\Sigma}(x,y,z) = -\hat{n}_{\Sigma}(x,y,z)$.

MA 10 DIC 2024

DEFINIZIONE: UN APERTO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ SI DICE CONNESSO SE OGNI COPPIA DI PUNTI $P, Q \in \Omega$ SI PUÒ COLLEGARE CON UNA CURVA $\gamma \subset \Omega$

ESEMPI: LA PALLA $B_R(0,0,0) \subset \mathbb{R}^3$ È CONNESSA PERCHÉ SE PRENDO $P, Q \in B_R(0,0,0)$ LI COLLEGO CON γ DATA DA

$$\bar{r}(t) = tP + (1-t)Q, \quad t \in [0,1].$$

LA CIRCONFERENZA $\partial B_R(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ È CONNESSA PERCHÉ SE PRENDO $P, Q \in \partial B_R(0,0)$ LI COLLEGO CON γ DATA DA

$$\bar{r}(t) = R\big(\cos((1-t)\alpha + t\beta), \operatorname{sen}((1-t)\alpha + t\beta)\big)$$

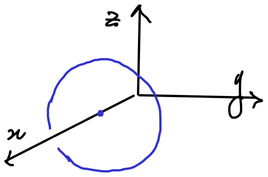
(LA CIRCONFERENZA NON È UN APERTO DI $\mathbb{R}^2$)

UN APERTO CONNESSO Ω SI DICE SEMPLICEMENTE CONNESSO SE OGNI CURVA CHIUSA γ INCLUSA IN Ω È CONTRATTILE, CIOÈ SI PUÒ RIDURRE CON CONTINUITÀ AD UN PUNTO SENZA USCIRE DA Ω.

ESEMPIO: LA CURVA CHIUSA γ: $\bar{r}(t) = \cos t \,\hat{i} + \operatorname{sen} t \,\hat{j}$, $t \in [0, 2\pi]$ SI PUÒ RIDURRE CON CONTINUITÀ AD UN PUNTO SENZA USCIRE DA $\Omega = B_2(0,0,0)$ PONENDO $\bar{r}_\lambda(t) = \lambda\, \bar{r}(t) = \lambda \cos t \,\hat{i} + \lambda \operatorname{sen} t \,\hat{j}$, $\lambda \in [0,1]$

MA 10 DIC 2024

TUNNEL: $\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0 \}$ È UN APERTO CONNESSO NON SEMPLICEMENTE. ALCUNE CURVE CHIUSE SONO CONTRATTILI:



$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \cos t, \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

ALTRE NON LO SONO:
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t, \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = 0 \end{cases}$$

DEFINIZIONE: UN CAMPO CONTINUO $\bar{E} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ SI DICE CONSERVATIVO SE PER OGNI COPPIA DI CURVE REGOLARI $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Omega$ PARAMETRIZZATE DA $\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t)$, $t \in [a, b]$ E TALI CHE $\bar{r}_1(a) = \bar{r}_2(a)$ E $\bar{r}_1(b) = \bar{r}_2(b)$ RISULTA
$$\int_{\gamma_1} \bar{E} \cdot d\bar{r} = \int_{\gamma_2} \bar{E} \cdot d\bar{r}. \qquad (1)$$

EQUIVALENTEMENTE, SE PER OGNI CURVA REGOLARE CHIUSA $\gamma \subset \Omega$ RISULTA
$$\int_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{r} = 0. \qquad (2)$$

DIMOSTRAZIONE DELL'EQUIVALENZA. SUPPONIAMO CHE VALGA LA (1). PRENDIAMO UNA CURVA CHIUSA $\gamma : \bar{r} = \bar{r}(t)$ CON $t \in [0, 1]$ E DEFINIAMO $\gamma_1 : \bar{r} = \bar{r}(t)$ CON $t \in [0, \frac{1}{2}]$

$-\gamma_2 : \bar{r} = \bar{r}(t)$ CON $t \in [\frac{1}{2}, 1]$

$\gamma_2 : \tau = 1 - t, \ t = 1 - \tau, \ \bar{r} = \bar{r}(1 - \tau), \ \tau \in [0, \frac{1}{2}]$

OTTENIAMO CHE
$$\int_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{r} = \int_{\gamma_1} \bar{E} \cdot d\bar{r} + \int_{-\gamma_2} \bar{E} \cdot d\bar{r} = \int_{\gamma_1} \bar{E} \cdot d\bar{r} - \int_{\gamma_2} \bar{E} \cdot d\bar{r} = 0$$
IN VIRTÙ DELLA (1), QUINDI VALE ANCHE LA (2). VICEVERSA: SUPPONIAMO CHE VALGA LA (2) E PRENDIAMO DUE CURVE $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Omega$ AVENTI GLI STESSI ESTREMI. DIMOSTRARE LA (1) PER ESERCIZIO.

ESEMPIO: $\bar{E}(x,y,z) = -z \hat{j} + y \hat{k}$;
$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t, \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{r} = \int_0^{2\pi} \bar{E} \cdot (-\operatorname{sen} t \, \hat{\imath} + \cos t \, \hat{j}) \, dt$$

MA $\bar{E} \cdot (-\operatorname{sen} t \, \hat{\imath} + \cos t \, \hat{j}) = (-z \hat{j} + y \hat{k}) \cdot (-\operatorname{sen} t \, \hat{\imath} + \cos t \, \hat{j}) = -z \cos t = 0$ PERCHÉ $z = 0$ LUNGO γ, QUINDI $\int_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{r} = 0$.

ADESSO PRENDIAMO
$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} x = 0 \\ y = \cos t \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

COSÌ $\bar{r}'(t) = -\operatorname{sen} t \, \hat{j} + \cos t \, \hat{k}$ E

$\bar{E} = -\operatorname{sen} t \, \hat{j} + \cos t \, \hat{k}$

MA 10 DIC 2024

QUANDO UN CAMPO $\bar{E}$ È CONSERVATIVO IN Ω CONNESSO, SI PUÒ FISSARE $P_0 \in \Omega$ E DEFINIRE LA FUNZIONE SCALARE

$$u(P) = \int_\gamma \bar{E} \cdot d\bar{z}$$ ESSENDO γ UNA QUALUNQUE CURVA DA P_0 A P.

SI PUÒ DIMOSTRARE APPLICANDO LA DEFINIZIONE CHE $\nabla u = \bar{E}$.

SI PUÒ ANCHE DIMOSTRARE IL VICEVERSA: DATO UN CAMPO CONTINUO $\bar{E} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ CHE AMMETTE POTENZIALE, CIOÈ ESISTE $u \in C^1(\Omega)$ TALE CHE $\nabla u = \bar{E}$ IN Ω, ALLORA IL CAMPO $\bar{E}$ È CONSERVATIVO.

DISCENDE DAL FATTO CHE

$$\int_\gamma \bar{E} \cdot d\bar{z} = u(\bar{z}(b)) - u(\bar{z}(a))$$

$$\int_\gamma \nabla u \cdot d\bar{z} = \int_a^b \frac{\partial u}{\partial \tau} \|\bar{z}'(t)\| \, dt$$

CONDIZIONE NECESSARIA

CONSIDERIAMO UN CAMPO $\bar{E} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ DI CLASSE $C^1(\Omega)$, COSICCHÉ È DEFINITO

$$\tilde{\nabla} \times \bar{E} = \mathrm{rot}\, \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

$$= (Z_y - Y_z)\hat{i} + (X_z - Z_x)\hat{j} + (Y_x - X_y)\hat{k}$$

SE IL CAMPO È CONSERVATIVO, ALLORA ESISTE UNA FUNZIONE SCALARE u TALE CHE $\bar{E} = \nabla u$ E QUINDI $\mathrm{rot}\, \bar{E} = \mathrm{rot}\, \nabla u = \bar{O}$.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} =$$

$$= (u_{zy} - u_{yz})\hat{i} + (u_{xz} - u_{zx})\hat{j} + (u_{yx} - u_{xy})\hat{k}$$

CONDIZIONE SUFFICIENTE

SE $\bar{E} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ È DI CLASSE $C^1(\Omega)$ E Ω È SEMPLICEMENTE CONNESSO, E RISULTA CHE $\mathrm{rot}\, \bar{E} = \bar{O}$ IN Ω, ALLORA IL CAMPO È CONSERVATIVO.