7 dicembre 2023 Prova intermedia di Controlli Automatici - A.A. 2023-2024

Nome e cognome: __________________________________ Num. Matricola:____________________

Es. 1 (9 punti)

Si consideri il sistema di controllo in Figura 1

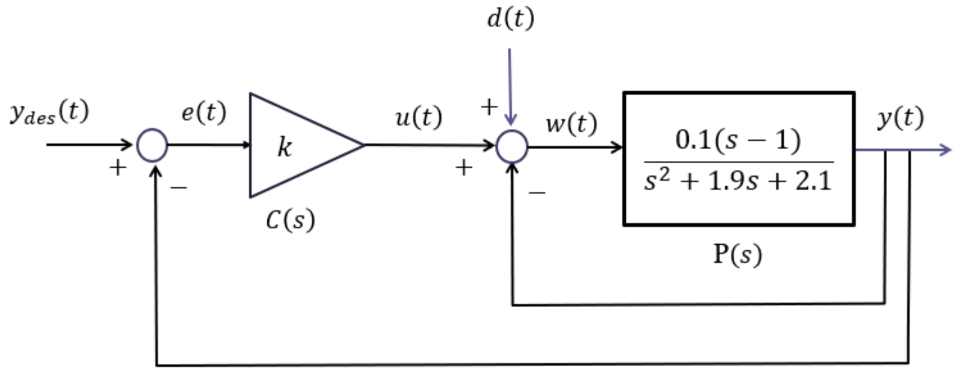


Figura 1

1.A (3 punti) Analizzare le proprietà di stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo al variare di k ($k > 0$)
1.B (3 punti) Assumendo $k = 15$, determinare il valore di regime dell'uscita quando $y_{des}(t) = 2$ e $d(t) = 0.5$
1.C (3punti) Determinare, se esiste, il valore positivo del guadagno k al quale corrispondono due poli coincidenti a ciclo chiuso.

Es.2 (10 punti)

Si consideri il sistema di controllo in Figura 2

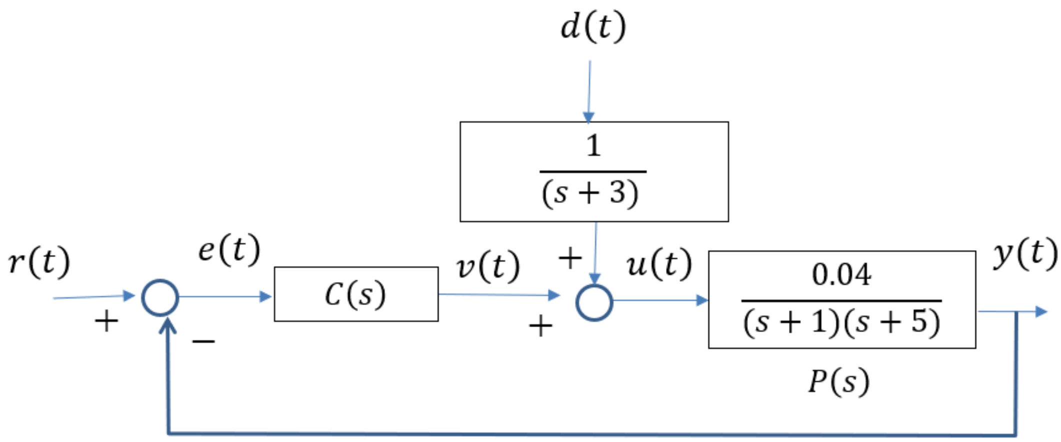


Figura 2

3.A (8 punti) Progettare un controllore $C(s)$ che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

S1) Precisione statica
S2) Attenuazione minima di un disturbo costante $d(t) = D$ pari al 95%
S3) Tempo di assestamento al 2% non superiore a 2 secondi
S4) Sovraelongazione percentuale non superiore al 5%.

3.B (2 punti) Con riferimento al controllore progettato nel precedente quesito 3.A, scrivere sotto forma di equazione differenziale il legame fra i segnali in ingresso ed in uscita dal controllore.

Es. 3 (10 punti)

Si consideri il sistema di controllo in Figura 3.

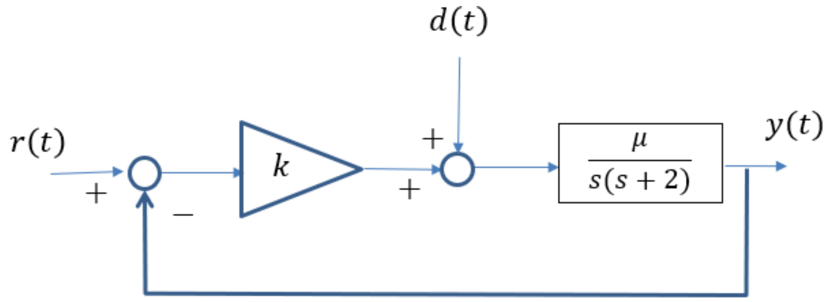


Figura 3

La seguente Figura 4 mostra l'evoluzione temporale dell'uscita $y(t)$ in risposta ad un disturbo costante di ampiezza 5 (con set-point nullo). Determinare i parametri k e μ.

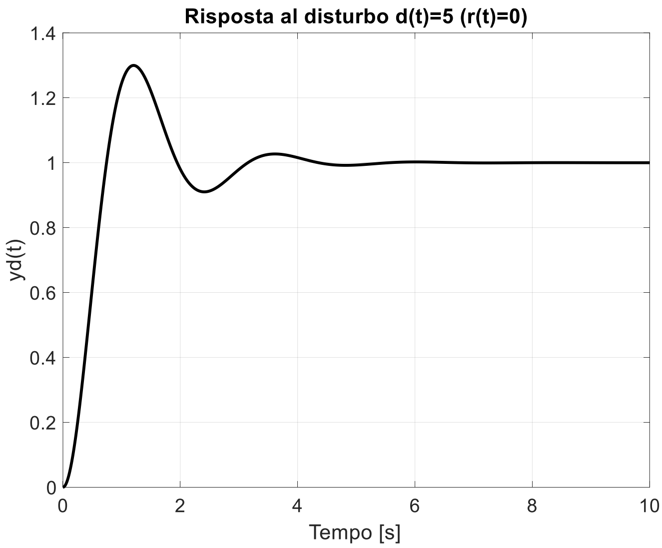


Figura 4

Es. 4 (4 punti)

Enunciare sotto quali condizioni il sistema di controllo riportato nella seguente Figura 5 è in grado di garantire la reiezione asintotica di un disturbo cosinusoidale avente frequenza pari a 2 rad/s

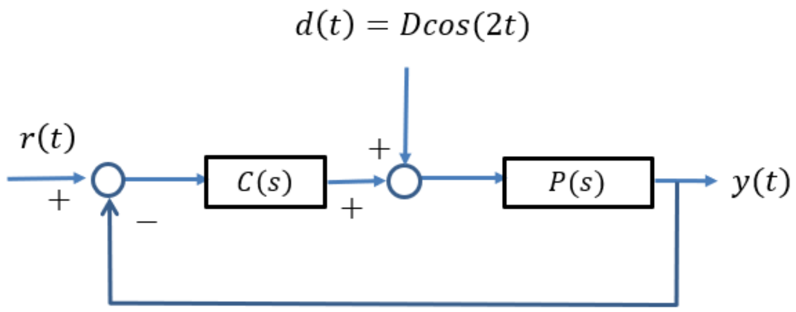
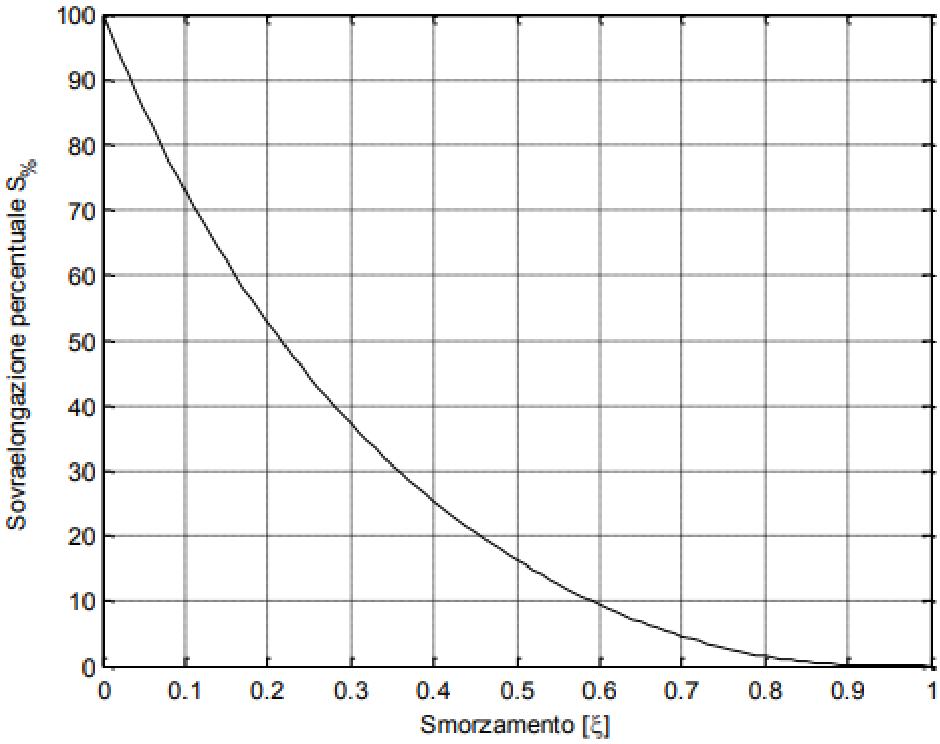


Figura 5

Numerare e firmare i fogli da consegnare.

Indicare chiaramente l'inizio e la fine dello svolgimento di ciascun esercizio.



Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
$\mathrm{e}^{\,at}$ (esponenziale)	$\dfrac{1}{s-a}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{\,at}$ (esponenziale polinomiale)	$\dfrac{1}{(s-a)^n}$
$\sin(\omega t)$ (sinusoide)	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$ (cosinusoide)	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{e}^{\,-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$	$\dfrac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ (fattore trinomio)
$\mathrm{e}^{\,-at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\mathrm{e}^{\,-at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

December 7, 2023. **Controlli Automatici mid term exam - Academic year 2023-2024**

Nome e cognome: ________________________________ Num. Matricola:__________________

Ex. 1 (9 points)

Consider the control system in Figure 1

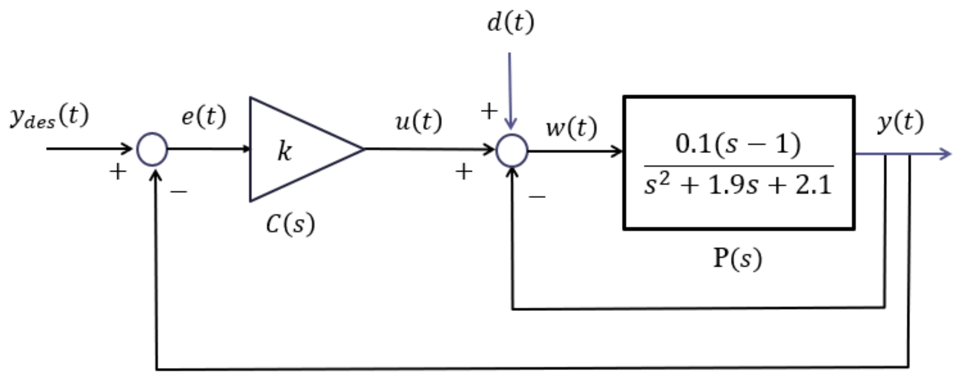


Figure 1

1.A (3 points) Analyse the closed-loop stability of the control system for positive values of k ($k > 0$)
1.B (3 points) Assuming $k = 15$, determine the steady-state output value when $y_{des}(t) = 2$ and $d(t) = 0.5$
1.C (3 points) Determine, if it exists, the positive value of k yielding two coincident closed-loop poles

Ex.2 (10 points)

Consider the control system in Figure 2

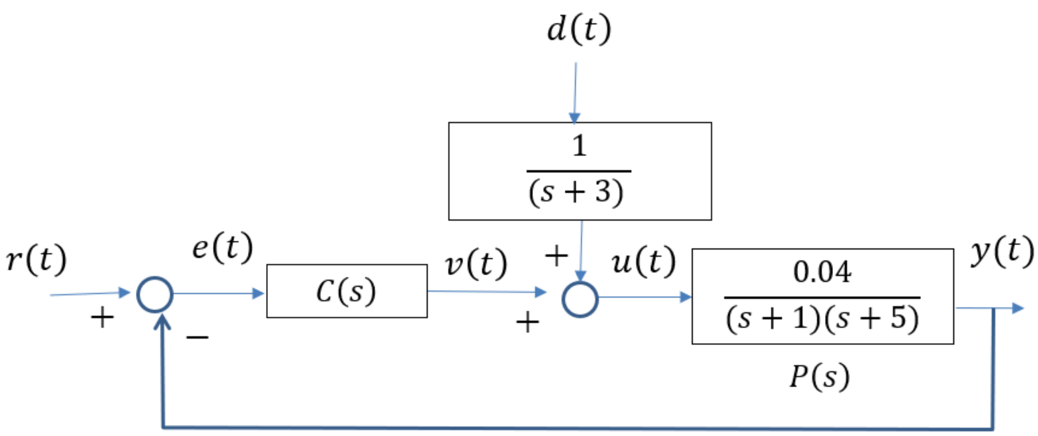


Figure 2

3.A (8 points) Design a controller guaranteeing the achievement of the following specifications:

S1) Static accuracy (precisione statica)
S2) Minimal attenuation level of 95% for a constant disturbance signal $d(t) = D$
S3) 2% settling time (Tempo di assestamento al 2%) not exceeding 2 seconds
S4) Percentage overshoot $S_{\%}$ not exceeding 5%.

3.B (2 points) With reference to the controller designed in the previous question 3.A, write down the differential equation representing the relationship between the controller's input and output signals

Ex. 3 (10 points)

Consider the control system in Figure 3

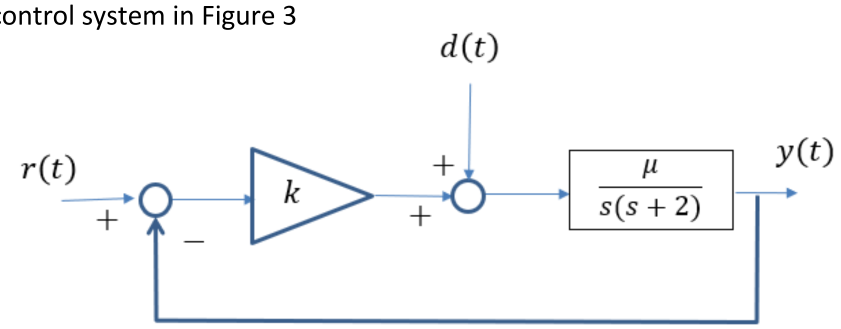


Figure 3

The next Figure 4 shows the time evolution of the output $y(t)$ in response to a constant disturbance of amplitude 5 (with zero set-point). Determine the parameters k and μ.

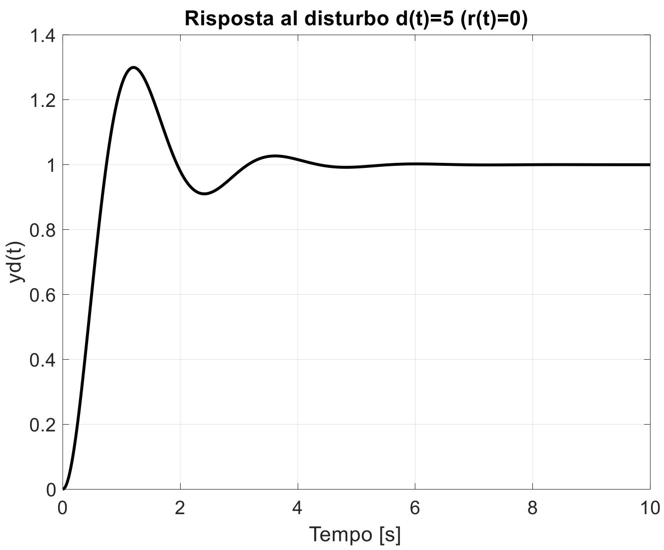


Figure 4

Ex. 4 (4 points)

Explain under which conditions the control system represented in the following Figure 5 is capable of guaranteeing the asymptotic rejection of a sinusoidal disturbance with frequency 2 rad/s

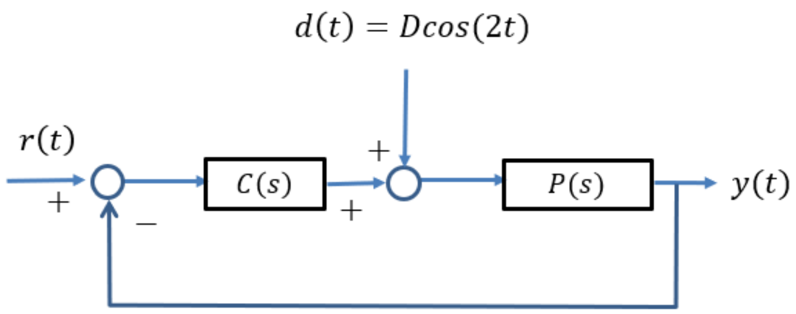
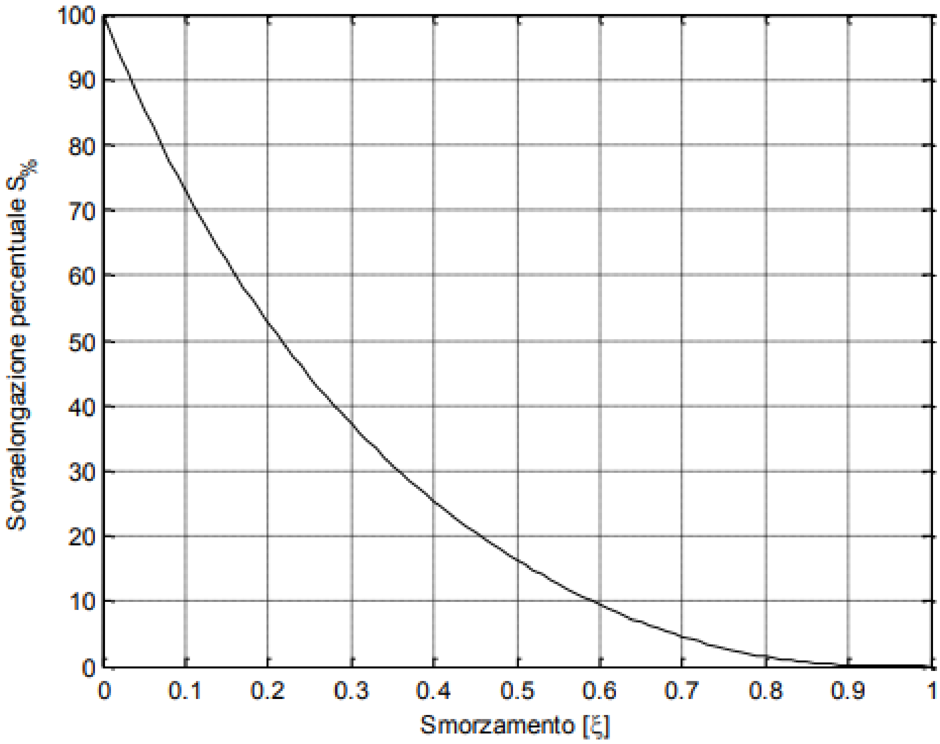


Figure 5

Number and sign the sheets to be delivered.

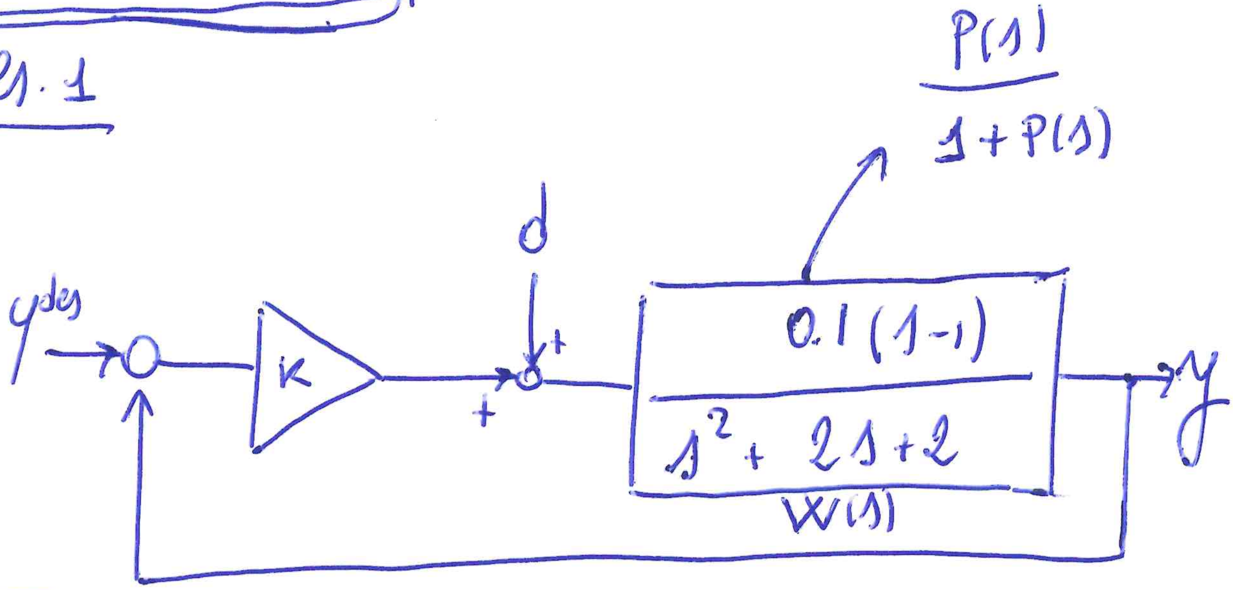
Clearly indicate the beginning and end of each exercise.



Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
e^{at} (esponenziale)	$\dfrac{1}{s-a}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$ (esponenziale polinomiale)	$\dfrac{1}{(s-a)^n}$
$\sin(\omega t)$ (sinusoide)	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$ (cosinusoide)	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$	$\dfrac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ (fattore trinomio)
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

Prova intermedia 2023-24

es. 1



1.A

$$\frac{P(s)}{1+P(s)} = \frac{\dfrac{0.1(s-1)}{s^2+1.9s+2.1}}{1+\dfrac{0.1(s-1)}{s^2+1.9s+2.1}} = \frac{0.1(s-1)}{s^2+1.9s+2.1+0.1(s-1)}$$

$$= \frac{0.1(s-1)}{s^2+2s+2} = W(s)$$

Calcoliamo il pol. caratteristico del sistema di controllo moltiplicando fra loro la FdT del controllore (= K) e quella del sistema W(s), e poi sommando il numeratore e il denominatore

$$k \cdot W(s) = \frac{k\, 0.1\,(s-1)}{s^2 + 2s + 2}$$

$$P_{CAR}: \quad s^2 + 2s + 2 + 0.1\,ks - 0.1\,k$$

$$= s^2 + (2 + 0.1\,K)\,s + 2 - 0.1\,K$$

In base alle regole di Cartesio, il P_{CAR} ammette radici a parte reale negativa se

$$\begin{cases} 2 - 0.1\,k > 0 \\ 2 + 0.1\,k > 0 \end{cases} \rightarrow \quad \underline{K < 20}$$

Quindi:

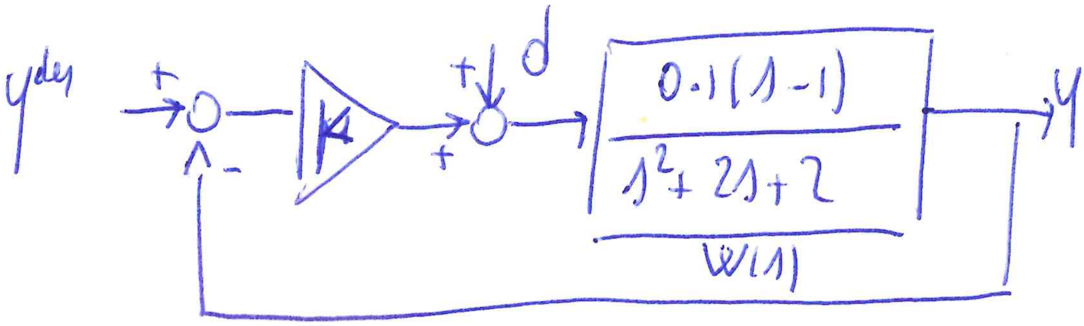
sistema di controllo:

as. stabile	$K < 20$
instabile	$K > 20$
limite di stabilità	$K = 20$

$k = 20 \Rightarrow$ guadagno critico

2.5

$\boxed{1.B}$ Utilizzo delle formule :



sistema di controllo di tipo zero

$\mu_c = K = 15$ guad. statico del controller

$\mu_w = W(0) = -0.05$ guad. statico del processo

$y^{des} = R^* = 2$ $\quad d = D = 0.5$

$$Y_\infty = R^* \frac{\mu_c \mu_w}{1+\mu_c\mu_w} + D \frac{\mu_w}{1+\mu_c \mu_w}$$

$$= 2 \cdot \frac{15\cdot(-0.05)}{1+15\cdot(-0.05)} + 0.5 \frac{-0.05}{1+15\cdot(-0.05)}$$

$$= -6 \qquad - 0.1$$

③

Soluzione senza l'impiego delle formule

$\boxed{1.B}$ $(K=15)$ Impiego del T.F.R.G.

Calcoliamo la FdT a ciclo chiuso tra il set-point e l'uscita

$$W_{y_{des}}^{y} = \frac{K \cdot \dfrac{0.1(s-1)}{s^2+2s+2}}{1+\dfrac{K\,0.1(s-1)}{s^2+2s+2}} =$$

$$= \frac{15 \cdot 0.1 \cdot (s-1)}{s^2+2s+2+15 \cdot 0.1 \cdot (s-1)} =$$

$$= \frac{1.5(s-1)}{s^2+2s+2+1.5(s-1)} =$$

$$= \frac{1.5(s-1)}{s^2+3.5s+0.5}$$

Il guadagno statico è: $W_{y_{des}}^{y}(0) = \dfrac{-1.5}{0.5} = -3$

4

Il T.F.R.G. implica che

se $y_{des} = 2 \rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t) = 2 \cdot W_{y_{des}}^{y}(0) = \underline{\underline{-6}}$

Procediamo analogamente calcolando la FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita:

$$W_d^y(s) = \frac{W(s)}{1 + 15 \cdot W(s)} = \frac{\dfrac{0.1(s-1)}{s^2+2s+2}}{1 + \dfrac{1.5(s-1)}{s^2+2s+2}} =$$

$$= \frac{0.1(s-1)}{s^2 + 2s + 2 + 1.5(s-1)} = \frac{0.1s - 0.1}{s^2 + 3.5s + 0.5}$$

$$W_d^y(0) = -\frac{0.1}{0.5} = -0.2$$

T.F.R.G. $\Rightarrow$ se $d = 0.5$ $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0.5 \cdot (-0.2) =$

$= \underline{\underline{-0.1}}$

1.c |

⑤

Il P_{CAR} è : $s^2 + (2+0.1k)s + (2-0.1k) = s^2+bs+c$

Ammette 2 radici coincidenti se il Δ dell'eq. di 2° grado è nullo

$$\Delta = b^2 - 4c \qquad b = 2+0.1k$$

$$c = 2-0.1k$$

$$b^2 = 4c$$

$$(2+0.1k)^2 = 4(2-0.1k)$$

$$4 + 0.01k^2 + 0.4k = 8 - 0.4k$$

$$0.01k^2 + 0.8k - 4 = 0$$

$\downarrow$ moltiplichiamo per 100

$$k^2 + 80k - 400 = 0$$

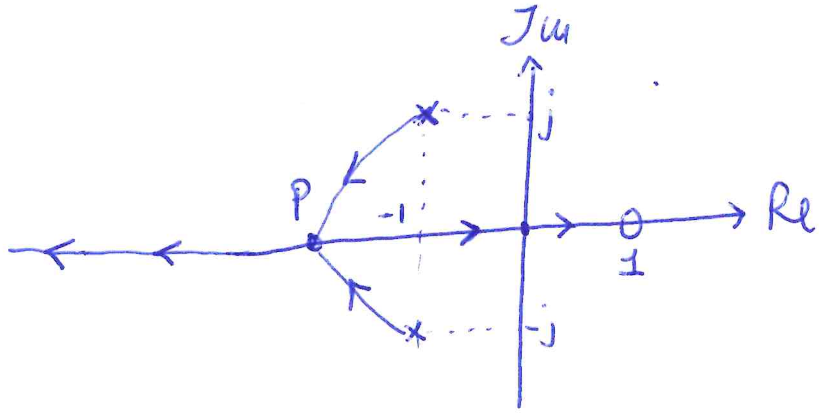
$$k_{1,2} = \frac{-80 \pm \sqrt{(80)^2 + 4 \cdot 400}}{2}$$

$$= \frac{-80 \pm \sqrt{8000}}{2} = \frac{-80 \pm 89.44}{2} = \begin{cases} 4.72 \\ -84.72 \end{cases}$$

$k = 4{,}72$

1.C Soluzione mediante LdR

$$L(s) = \frac{0.1\,(s-1)}{s^2+2s+2} \qquad p_{1;2} = -1 \pm j \qquad z_1 = 1$$



LdR coerenti con l'analisi della stabilità svolta. Il ramo entra nel semipiano dx quando $K = 20$.

calcoliamo il punto doppio P, ed eseguiamo poi la taratura.

Eq. punto doppio:

$$\frac{1}{s+1+j} + \frac{1}{s+1-j} + \frac{1}{s-1} = 0$$

$$\frac{s+1-j+s+1+j}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s-1} = 0$$

$$\frac{2(s+1)}{s^2+2s+2} - \frac{1}{s-1} = 0$$

6.2

$$\frac{2(s+1)(s-1)-(s^2+2s+2)}{(s^2+2s+2)(s-1)}=0$$

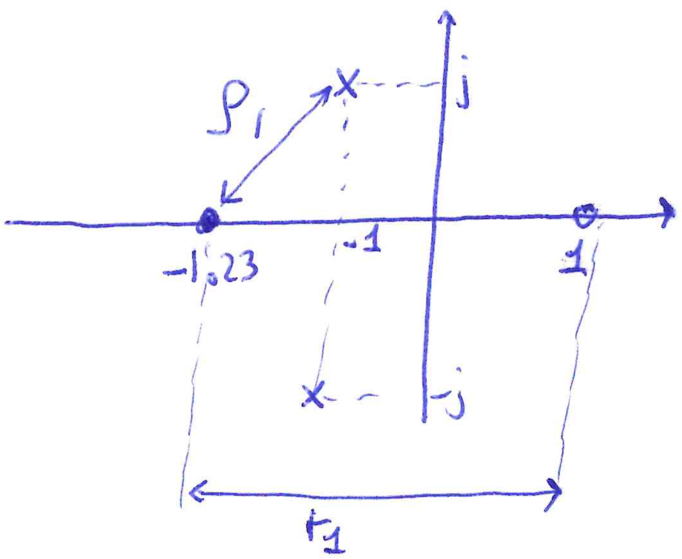
non appartiene al LdR

$$2(s^2-1)-s^2-2s-2=0$$

$$s^2-2s-4=0$$

$$s_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt5}{2}=\begin{cases}1+\sqrt5\simeq3.23\\1-\sqrt5\simeq-1.23\quad \underline{\underline{OK}}\end{cases}$$

punto doppio : $P\equiv-1.23$



$$L(s)=\frac{0.1(s-1)}{s^2+2s+2}\qquad \bar{K}=0.1 \text{ HFG di } L(s)$$

$$K=\frac{1}{\bar K}\,\frac{\rho_1\rho_2}{r_1}\qquad \rho_1=\sqrt{(0.23)^2+1}\simeq1.02$$

$$\rho_2=\rho_1$$

$$r_1=2.23\qquad K=\frac{1}{0.1}\cdot\frac{(1.02)^2}{2.23}=4.72$$

es. 2

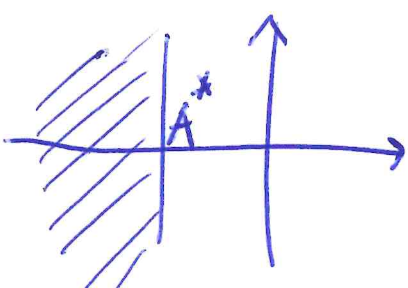
$\boxed{3A}$

S1 ⇒ polo nell'origine nel controllore

S2 ⇒ automaticamente soddisfatto se C(s) contiene un polo nell'origine, indipendentemente dal valore del guadagno Kc { attenuazione del 100.

S1 + S2 ⇒ { polo nell'origine nel controllore
nessun vincolo su Kc

S3 ⇒ Regione ammissibile

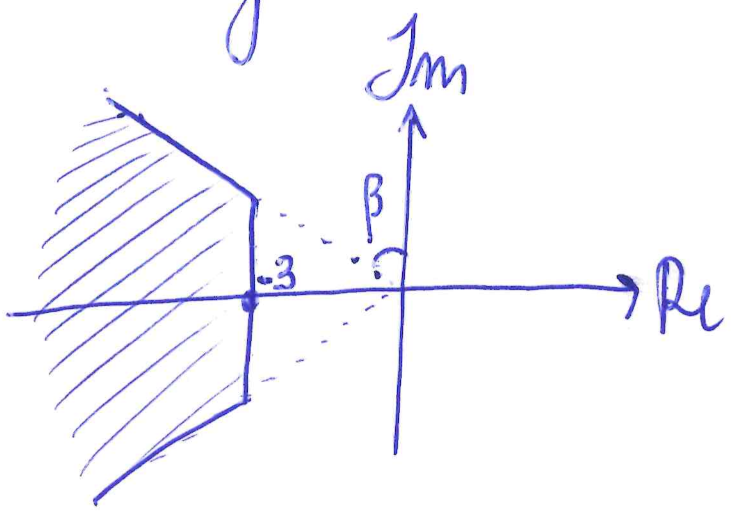


con $A^* = -\frac{6}{T^*}$ $T^* = 2$ secondi

$A^* = -3$

$S4 \Rightarrow \xi \geq 0.7$

$S3 + S4 \rightarrow$ Regione ammissibile



$\sin(\beta) = 0.7$

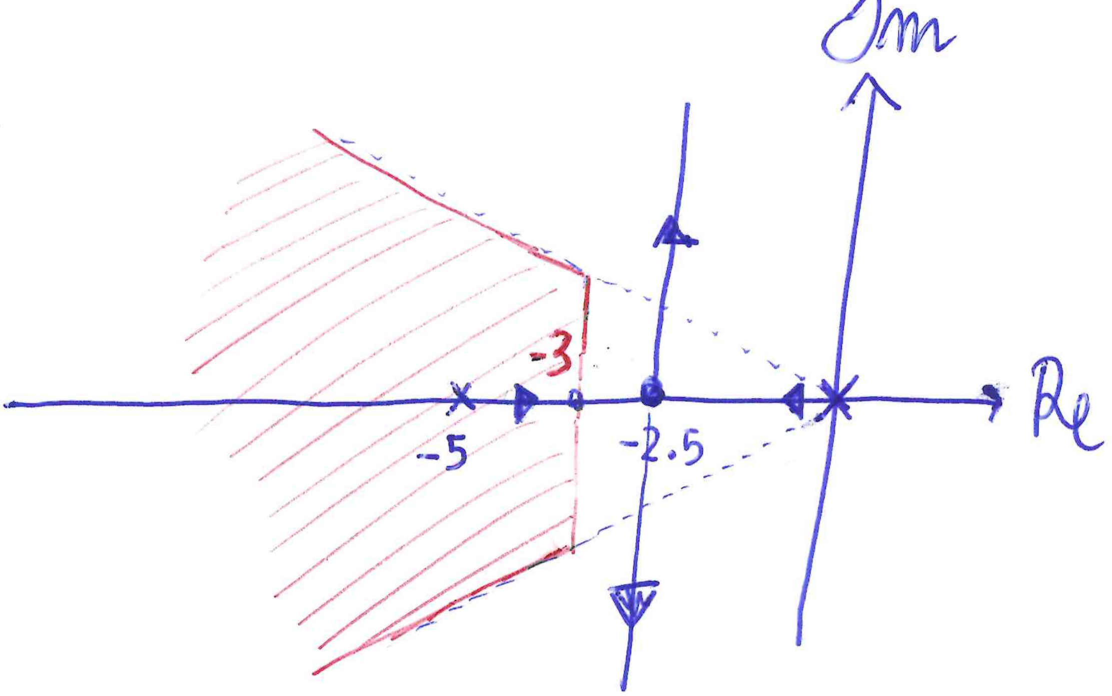
Scelta di 1° tentativo per $C(s)$

$C(s) = K_c \frac{(s+1)}{s} \rightarrow$ poiché dobbiamo inserire obbligatoriamente un polo nell'origine, inseriamo anche uno zero, sovrapponendolo al polo del processo più in bassa frequenza

Tracciamo il LdR, e sovrapponiamolo alla regione ammissibile 9

LdR

$$L(s) = \frac{\cancel{s+1}}{s} \cdot \frac{0.04}{\cancel{(s+1)}(s+5)} = \frac{0.04}{s(s+5)}$$



Il controllore $C(s) = K_c \frac{s+1}{s}$ garantisce la stabilità a ciclo chiuso $\forall$ valore di K_c, ma non vi è modo di scegliere K_c in modo che entrambi i poli cadano all'interno della regione ammissibile. Non va pertanto bene.

Inseriamo nel controllore una ulteriore coppia polo-zero.

Con lo zero del controllore "cancelliamo" l'altro polo del processo (quello in -5) e inseriamo un polo che sia collocato più in alta frequenza, in modo tale che il nuovo punto doppio sia collocato all'interno della regione ammissibile.

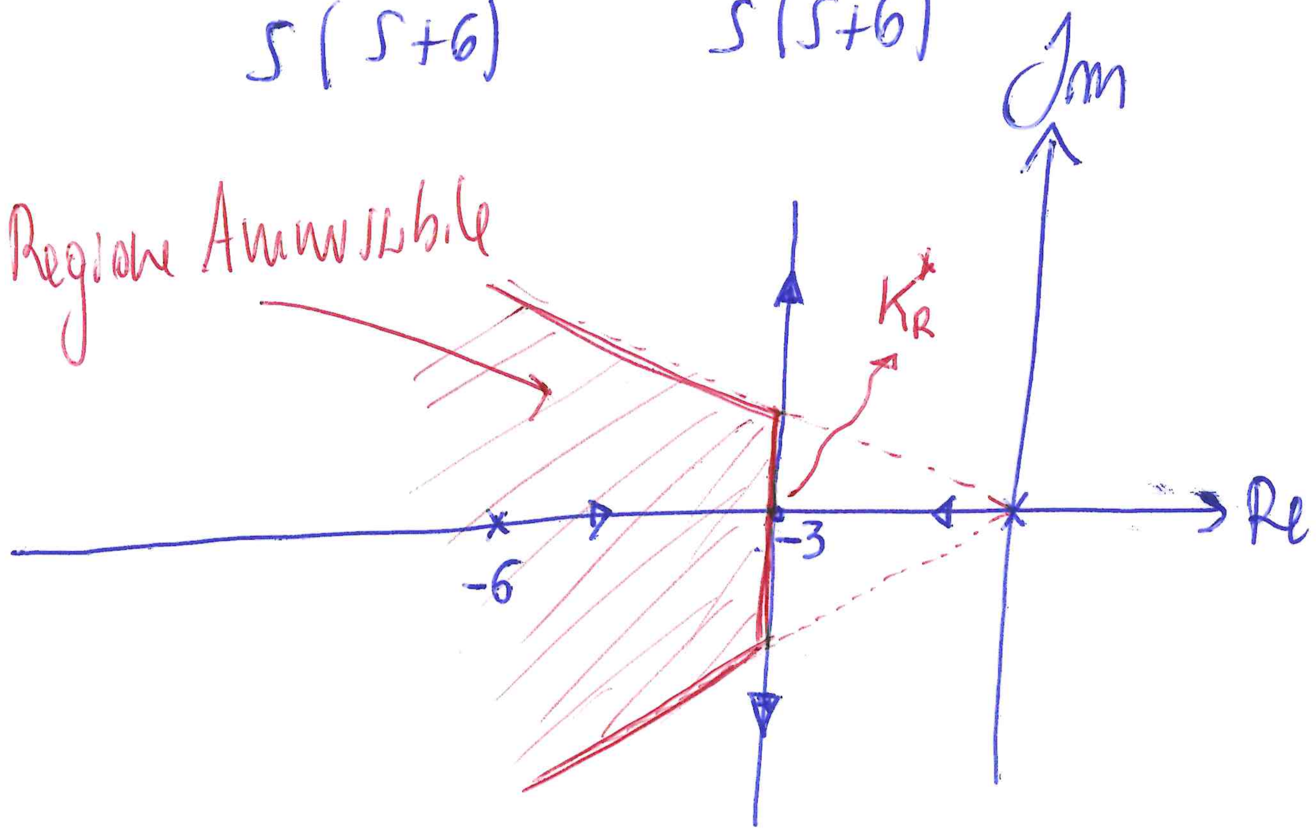
Collocando tale polo del controllore nel punto -6 il nuovo punto doppio va a trovarsi in -3, quindi sul bordo della regione ammissibile.

$$C(s) = K_c \, \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+6} \cdot \frac{6}{5}$$

Ora il LdR ci va bene:

$$L(s) = \frac{\cancel{(s+1)}\,\cancel{(s+5)}}{s(s+6)} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{0.04}{\cancel{(s+1)}\,\cancel{(s+5)}}$$

$$= \frac{0.04 \times \frac{6}{5}}{s(s+6)} = \frac{0.048}{s(s+6)}$$



poiché non sussistono vincoli su K_c
possiamo sceglierlo in modo da collocare i
2 poli a ciclo chiuso nel punto doppio in -3.

Operiamo la taratura del punto doppio:

$$K_R^* = \frac{1}{\bar{K}} \cdot \rho_1 \rho_2 \qquad \bar{K} = 0.048$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 3$$

$$K_R^* = \frac{1}{0,048} \cdot 3 \cdot 3 = 187.5$$

$$C(s) = 187.5 \times \frac{6}{5} \cdot \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+6)}$$

$$= 225 \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+6)} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

3.B

$$C(s) = 225 \frac{s^2 + 6s + 5}{s^2 + 6s} =$$

$$= \frac{225 s^2 + 1350 s + 1125}{s^2 + 6s}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{v}(t) + 6\dot{v}(t) = 225\ddot{e}(t) + 1350\dot{e}(t) + 1125 e(t$$

v = uscita del controllore

e = ingresso al controllore

Es 3

FdT a ciclo chiuso fra il disturbo d e l'uscita y

$$d(t) = 5 \longrightarrow \boxed{W_d^y(s)} \longrightarrow y_d(t) \rightarrow \text{curva in Figura 4}$$

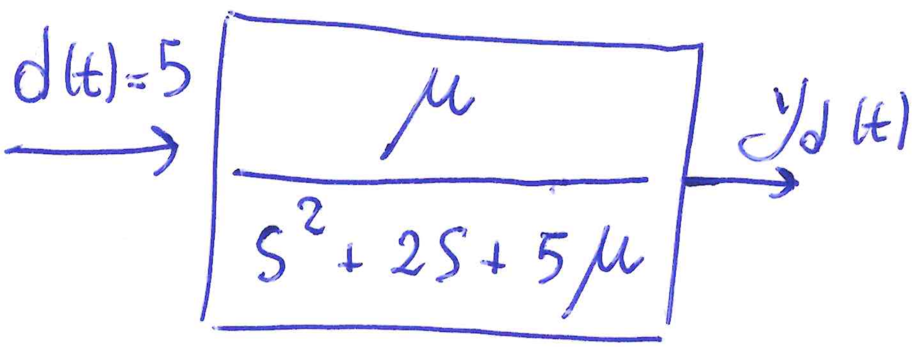
$$W_d^y(s) = \frac{\dfrac{\mu}{s(s+2)}}{1 + \dfrac{k\mu}{s(s+2)}} = \frac{\mu}{s(s+2) + k\mu}$$

T.F.R.G.

$$d(t) = 5 \longrightarrow \boxed{\frac{\mu}{s(s+2) + k\mu}} \longrightarrow y_d(t) \xrightarrow{t \to \infty} 5 \cdot W_d^y(0) = \frac{5}{k}$$

poiché il valore di regime di $y_d(t)$ è pari ad 1 si ha

$$\frac{5}{k} = 1 \implies \boxed{k = 5}$$



La forma della risposta in Figura 4 rivela come i poli di $W_d^y(s)$ siano complessi coniugati. Poiché la sovraelongazione è circa pari al 30%, lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è circa pari a 0.35. ($\xi = 0,35$)

Possiamo determinare μ imponendo che il polinomio $s^2 + 2s + 5\mu$ abbia una coppia di poli complessi coniugati con smorzamento pari a 0.35

$$s^2 + 2s + 5\mu = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$= s^2 + 0.7\,\omega_n s + \omega_n^2$$

Sostituiamo $\xi = 0.35$

$$\begin{cases} 2 = 0.7\,\omega_n \\ 5\mu = \omega_n^2 \end{cases} \longrightarrow \omega_n = \frac{2}{0.7} = 2.85$$

$$\rightarrow \omega_n^2 = (2.85)^2 = 8.12$$

$$5\mu = 8.12 \Rightarrow \mu = \frac{8.12}{5} = 1.62$$

Es 4

Sulla base del secondo enunciato del Principio del modello interno, il controllore deve essere tale che

1) Deve avere una coppia di poli immaginari puri $\pm 2j$, cioè nel suo denominatore deve essere presente il fattore (s^2+4)

2) Deve garantire che il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso.