I paradossi di Zenone

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2020-21

Zenone di Elea (V sec. a.C.)

Zenone di Elea: la vita

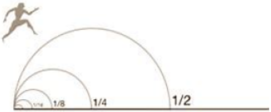
- Vi sono poche notizie certe sulla vita di Zenone. Fu discepolo prediletto di Parmenide; secondo Platone, venne in contatto con Socrate in occasione di una visita ad Atene in compagnia del maestro, effettuata all'età di circa quarant'anni.
- Stando a Diogene Laerzio, tuttavia, Zenone non si sarebbe mai recato ad Atene. Diogene Laerzio racconta che Zenone era figlio di Teleutagora, ma figlio adottivo di Parmenide, e che inoltre era "abile a sostenere entrambi i lati di ogni discorso"; riporta inoltre che venne arrestato e forse ucciso dal tiranno di Elea.
- Secondo Plutarco, Zenone tentò di uccidere il tiranno Demilo e, avendo fallito, per non rivelare l'identità dei suoi complici, "con i suoi stessi denti si strappò la lingua e la sputò in faccia al tiranno".

Zenone di Elea: le fonti e il contesto filosofico

- Le fonti principali del pensiero di Zenone sono il *Parmenide* di Platone, la *Fisica* di Aristotele (e il commentario di Simplicio al medesimo libro), le *Vite dei filosofi* di Diogene Laerzio.
- Zenone intende difendere la tesi del maestro Parmenide circa l'immutabilità dell'Essere e la conseguente contraddittorietà delle nozioni di divenire e di movimento. In particolare, i suoi argomenti possono considerarsi come una delle più antiche applicazioni del metodo di dimostrazione per assurdo: poiché assumere la possibilità del movimento porta a contraddizioni, allora il movimento è impossibile.
- Chi sono i bersagli polemici di Zenone? Per molto tempo si è creduto fossero i pitagorici e la loro dottrina della molteplicità dell'Essere in quanto numero. Adesso si preferisce pensare che Zenone intendesse confutare la nozione di movimento e di divenire propria del senso comune.

La dicotomia

- Elena abita alla casa dello studente di via Trentino e deve recarsi in Facoltà per assistere a una lezione. Supponiamo per comodità che il percorso da fare sia interamente rettilineo. Dimostriamo che Elena non potrà mai arrivare in Facoltà.
- Infatti, per poter giungere a destinazione, deve prima coprire $\frac{1}{2}$ della distanza totale. Ma per arrivare a metà della distanza, dovrà prima percorrere la metà di questa metà, ossia $\frac{1}{4}$ della distanza totale. E prima ancora $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ e così via.
- Il viaggio non potrà dunque neanche iniziare: non c'è una "prima distanza" che Elena può coprire per incominciare. Se vi fosse, infatti, essa potrebbe essere a sua volta dimezzata, e dunque non sarebbe la prima.



Achille e la Tartaruga

- "Piè veloce" Achille sfida la lenta tartaruga a una gara di corsa
- Achille corre dieci volte più velocemente della tartaruga, quindi le dà 10 m di vantaggio
- Quando Achille ha percorso 10 m, la tartaruga è ancora avanti di 1 m
- Quando Achille ha percorso 1 m in più, la tartaruga è ancora avanti di 0.1 m
- ...
- ...quindi Achille non raggiungerà mai la tartaruga!

L'Achille di Peirce

C.S. Peirce (1839-1914) immagina che Achille e la tartaruga facciano la loro corsa su un *tapis roulant* che si muove, nel verso opposto al moto dei corridori, alla stessa velocità della tartaruga. Per un osservatore a terra, la tartaruga appare ferma e Achille si muove verso di lei a una velocità pari alla differenza delle velocità dei due corridori.

La freccia

- Supponiamo che un arciere scagli una freccia verso un bersaglio. In ciascun istante del suo tragitto, la freccia è in quiete. Ma può un corpo che è in quiete durante ciascun istante di un certo intervallo di tempo *muoversi* durante lo stesso intervallo di tempo? No, dunque la freccia, a dispetto delle apparenze, non si muove.

Cosa significa “infinitamente divisibile”?

- Tutti e tre i paradossi presuppongono che lo spazio e il tempo siano in qualche modo *infinitamente divisibili*. Nella dicotomia, devo poter suddividere all’infinito il tragitto di Elena; nell’Achille, le distanze percorse dai due corridori; nella freccia, il tempo di volo della freccia (sino a giungere a istanti indivisibili).
- In prima approssimazione, una grandezza lineare è infinitamente divisibile se ogni sua parte piccola a piacere può essere divisa.
- Per Aristotele, essere infinitamente divisibile e essere composto da indivisibili sono proprietà che si contraddicono tra loro (v. sotto); nella prospettiva moderna, invece, possono coesistere tra loro.
- La migliore precisazione del concetto di infinita divisibilità è la proprietà di *densità*.

Spazio e tempo sono effettivamente densi?

- Apparentemente, la fenomenologia della percezione non conferma né smentisce la densità dello spazio. Per quanto riguarda il tempo, le cose sono ancora più complicate
- Bergson, ad esempio, sostiene che il tempo della fisica, rappresentato mediante un insieme denso linearmente ordinato di istanti, è un "tempo spazializzato": il tempo del flusso di coscienza è invece una compenetrazione di istanti.
- Il miglior argomento a favore della densità dello spazio e del tempo è il successo predittivo delle nostre migliori teorie fisiche, che presuppongono una rappresentazione delle tre dimensioni spaziali e del tempo come insiemi densi linearmente ordinati.

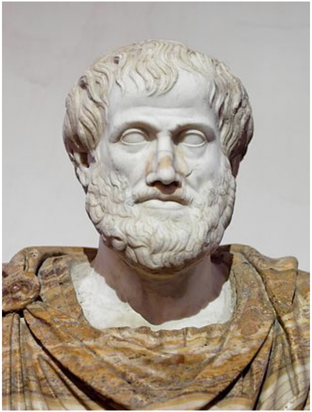
Il discretismo

- Si può però negare la densità dello spazio e del tempo, assumendo che i segmenti e gli intervalli temporali siano costituiti da unità discrete. In questo modo, il processo di suddivisione infinita presupposto dai paradossi di Zenone non può aver luogo, e i paradossi vengono bloccati.
- L'argomento principale per il discretismo (Wisdom) è che ogni misurazione, per quanto precisa, ha un limite finito, per cui le serie di intervalli generate dai paradossi di Zenone sono in realtà costituite da un numero *finito* di elementi.
- Hermann Weyl: in uno spazio discretizzato non vi è nessuna metrica per cui è vero il teorema di Pitagora, e poiché questo teorema è confermato dagli esperimenti in natura, lo spazio non può essere discreto.
- Alcuni studiosi (McDaniel, van Bendegem) hanno proposto soluzioni all'aporia di Weyl.

Soluzioni antiche: Diogene

- Pare che Diogene il cinico ritenesse di confutare i paradossi semplicemente mettendosi a camminare (*solvitur ambulando*). Ma non funziona: 1) in un'ottica parmenidea, i sensi ingannano; 2) Zenone ragiona per assurdo: la conclusione del suo argomento (es. "la freccia non si muove") contraddice l'enunciato "la freccia si muove" la cui verità deriva dall'esperienza. Dunque Diogene, paradossalmente, *aiuta* Zenone a concludere la sua prova per assurdo.

Aristotele (IV sec. a.C.)



Aristotele: l'infinito in potenza e in atto (1)

Per Aristotele, due sono le dicotomie che riguardano il concetto di infinito. Da un lato abbiamo:

- L'infinito *in potenza*, relativo a una successione finita che può essere indefinitamente prolungata (ad es. la successione dei numeri naturali);
- L'infinito *in atto*, relativo a una successione infinita concepita come in sé già completa.

Dall'altro lato abbiamo:

- L'infinito *per suddivisione*, ottenuto per reiterata suddivisione di una grandezza;
- L'infinito *per addizione*, ottenuto aggiungendo reiteratamente una grandezza ad un'altra.

Aristotele: l'infinito in potenza e in atto (2)

Combinando le due dicotomie, otteniamo quattro possibili situazioni:

1. *Successioni potenzialmente infinite per suddivisione*. L'esistenza di tali successioni viene accettata, ed anzi è centrale per la teoria aristotelica delle grandezze continue.
2. *Successioni potenzialmente infinite per addizione*. Si accetta l'esistenza della successione potenzialmente infinita degli istanti temporali, ma si rifiuta quella di una successione di grandezze che potrebbe condurre a una grandezza (spaziale o materiale) maggiore dell'intero universo.
3. *Successioni attualmente infinite per suddivisione*. Nessuna serie infinita di suddivisioni è in sé completa. Di conseguenza, una retta non è composta da un numero infinito di punti.
4. *Successioni attualmente infinite per addizione*. Tale idea viene rifiutata per successioni relative a grandezze spaziali o fisiche. Per successioni temporali la posizione è meno chiara, ma l'esistenza della successione degli istanti del passato è coerente con la teoria di Aristotele.

Aristotele: il rifiuto dell'infinito in atto

Per Aristotele, il rifiuto dell'infinito in atto non svuota la matematica del suo contenuto:

> *La nostra teoria non spoglia i matematici del loro studio, smentendo l'esistenza attuale dell'infinito nella direzione dell'accrescimento [...]. Infatti, i matematici non hanno bisogno dell'infinito e non lo usano. Postulano solo che una linea retta finita possa essere prolungata a piacere. Risulta possibile aver diviso nello stesso rapporto della quantità più grande un'altra grandezza di estensione arbitraria. Quindi, ai fini della dimostrazione, risulterà per loro indifferente servirsi di un infinito siffatto, la cui esistenza rientra nella sfera delle grandezze reali [Phys. III, 7, 207b27-34].*

Aristotele: altri passi sull'infinito

L'infinito [...] non è mai potenza nel senso che poi possa diventare in atto una realtà esistente per se stessa: esso è infinito in potenza per il pensiero. Poiché dal fatto che non si trova mai la fine a dividere, si deduce che questo è un atto che ha una realtà puramente potenziale, non che l'infinito abbia una propria attuale esistenza [Met. IX, 6, I048b14-17].

Non dobbiamo considerare l'infinito un "questo", come un uomo o una casa, ma supporre che esista nel senso in cui esistono un giorno o i giochi olimpici, cose il cui essere non proviene loro come quello di una particolare sostanza, ma consiste nel processo di venire ad essere e passare [Phys. II, 2, 206a29-33].

Soluzioni antiche: Aristotele

- Aristotele: nella dicotomia, ogni volta che dimezziamo la distanza, dobbiamo dimezzare anche il tempo necessario a percorrerla. Quindi ogni distanza della successione disporrà della frazione appropriata del tempo totale che serve a percorrere la distanza assegnata.
- Aristotele infatti distingue tra un intervallo (spaziale o temporale) *continuo* e lo stesso intervallo dimezzato un numero infinito di volte: il primo è solo in potenza ciò che il secondo è in atto. I due intervalli non differiscono solo geometricamente, ma *fisicamente*. Poiché il tragitto di Elena, la corsa di Achille e il moto della freccia non "presentano discontinuità" (es. Achille non si ferma a $\frac{1}{2}$ o a $\frac{1}{4}$ del percorso), siamo nel primo caso e non c'è nessun paradosso.

La soluzione moderna standard (1)

- Determinare la distanza dalla partenza del punto in cui Achille supererà la tartaruga equivale a trovare il valore della somma infinita (serie)

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \cdots$$

- Se la somma di questo numero infinito di termini è infinita, ha ragione Zenone
- Come si può dimostrare che la serie è convergente anziché divergente?

- Moltiplichiamo ambo i membri per 10:

$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} \cdots$$

- Sottraiamo la prima uguaglianza dalla seconda:

$$\begin{aligned} 10S &= 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} \cdots \\ S &= 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \cdots \end{aligned}$$

- Otteniamo l'equazione

$$9S = 100$$

- La cui soluzione è 100/9 = 11,11111...

La soluzione moderna standard (3)

- La serie della tartaruga è un esempio di serie geometrica, della forma

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 \ldots$$

- È sufficiente, infatti, scegliere a=10, r=1/10
- Se 0 < r < 1, si può trovare il valore della serie moltiplicando S per r e sottraendo Sr da S:

$$\begin{aligned} Sr &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \ldots \\ S - Sr &= a \\ S &= \frac{a}{1-r} \end{aligned}$$

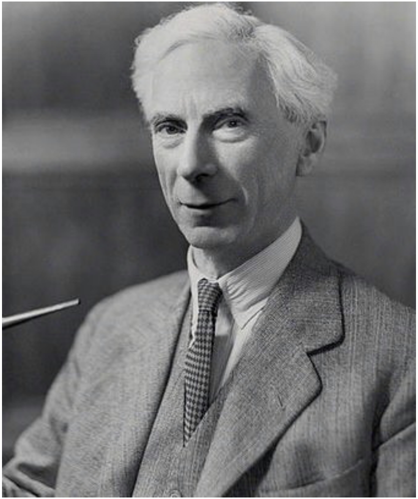
Obiezione di Grünbaum

- Dimostrare che, nell'Achille, la somma S tende a $\frac{100}{9}$ quando il numero n di termini tende all'infinito non dimostra che Achille raggiungerà la tartaruga, perché $\frac{100}{9}$ non appartiene alla successione delle somme parziali.
- Risposta: se lo spazio è continuo, allora non esiste niente tra $\frac{100}{9}$ e i numeri determinati dalla successione delle somme parziali.
- Grünbaum: non è però in questione in questione la struttura matematica dello spazio o del tempo, ma la natura della realtà *fisica*. Se l'analisi matematica non è una buona descrizione dello spazio e del tempo fisico, la soluzione standard non risolve i suoi paradossi.
- Niente garantisce a priori che lo spazio sia continuo o che le sue parti obbediscano all'aritmetica delle serie infinite. La nostra convinzione che la teoria matematica del continuo descrive correttamente lo spazio e il tempo è giustificata nella misura in cui essa viene presupposta dalle leggi della fisica, che sono a loro volta confermate dall'esperienza. Ma si tratta di una giustificazione fallibile...

L'obiezione dei supercompiti

- Nei paradossi della dicotomia e di Achille e la tartaruga, Elena e Achille devono realizzare un *supercompito*: eseguire un numero infinito di compiti in un tempo finito.
- Si noti che la possibilità di portare a termine un supercompito è problematica anche se si può dimostrare (mediante l'analisi matematica) che la durata totale del supercompito è finita.

Bertrand Russell (1872-1970)



Russell, Peirce e James sui supercompiti

- Per Russell (1901), esiste una corrispondenza biunivoca tra gli istanti della corsa di Achille e quelli della corsa della tartaruga. Per Russell, Zenone parte dalla premessa sbagliata che il tutto sia maggiore della parte e conclude che Achille, nel caso raggiunga la tartaruga, non può aver percorso una distanza maggiore.
- Broad (1913) mostra l'infondatezza storiografica della ricostruzione di Russell.
- James (1914) critica Russell: se il continuo è costituito da infiniti punti, allora Achille non può eseguire il supercompito di toccarli tutti. Ne deduce che il continuo non è costituito da infiniti punti. Peirce (1931) sembra confermare l'analisi di James.

Max Black (1909-1988)

Black sui supercompiti (1)

- Black (1951) pone in maniera chiara l'obiezione dei supercompiti. Vi è un'importante differenza tra una serie infinita di numeri e una somma finita. Sommare tutti i tempi della serie non è possibile. Si può solo stabilire il limite (se esiste) a cui tale serie converge.
- Dimostrare che la serie di Achille converge al limite in cui Achille raggiunge la tartaruga non dimostra ancora che Achille possa raggiungerla: Achille deve prima realizzare il supercompito ad essa associato.

Black sui supercompiti (2)

- Black prova a dimostrare che la nozione di supercompito è autocontraddittoria. Per Black, un atto è "un qualcosa che è distinto dal suo ambiente per avere un inizio e una fine ben definiti". Più precisamente: un agente A, relativamente a una sua proprietà misurabile $m(t)$, compie un atto nell'intervallo $[t_1, t_2]$ se i valori $m(t_1)$ e $m(t_2)$ rappresentano un massimo o un minimo per la funzione m.
- La corsa di Achille, per Black, consiste di un unico atto, non un'infinità, perché nessuna variabile che lo riguarda assume tali valori di massimo o minimo agli estremi di ciascun intervallo.

L'argomento topologico contro i supercompiti (1)

Definition

Uno spazio topologico è una coppia ordinata $\mathcal{T} = \langle X, T \rangle$, dove X è un insieme non vuoto e $T \subseteq \wp(X)$ è tale che:

- $\emptyset \in T, X \in T$;
- T è chiuso rispetto a intersezioni finite e unioni arbitrarie.

Gli elementi di T si dicono *aperti* di $\mathcal{T}$.

Definition

Uno spazio topologico $\mathcal{T} = \langle X, T \rangle$ si dice *connesso* se non esistono $A, B \in T$, $A \neq \emptyset \neq B$, tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$.

Tali coppie di aperti si dicono *separazioni*.

L'argomento topologico contro i supercompiti (2)

Sia S il segmento percorso da Achille nella sua corsa (estremi esclusi), visto come insieme di punti *con coordinate razionali*. Allora $\langle S, I \rangle$ è un spazio topologico, dove I è l'insieme di tutte le unioni di intervalli aperti (p_1, p_2), dove p_2 dista dall'origine della corsa più di p_1.

Se fosse corretto rappresentare la corsa di Achille come un supercompito, allora $\langle S, I \rangle$ potrebbe contenere separazioni. Ad esempio, potremmo prendere A come l'insieme dei punti che seguono il punto di partenza di Achille e precedono il punto di partenza della tartaruga (supposto che abbia coordinata irrazionale), e prendere $B = S - A$.

Le nostre migliori teorie fisiche, però, rappresentano le distanze spaziali come sottoinsiemi connessi di numeri *reali*.

Lo pseudoproblema della freccia (1)

- In ciascun istante del suo tragitto, la freccia si sposta di 0 m. Sommando 0 a se stesso, anche un numero infinito di volte, si ottiene però sempre 0. Quindi la freccia è in realtà ferma.
- Questo pseudoproblema, però, ha una soluzione relativamente facile. L'espressione "sommare un numero a se stesso un numero infinito di volte" ha significato solo in casi particolari, come ci accingiamo a mostrare.

Lo pseudoproblema della freccia (2)

Definition

Dato un insieme X, una *σ-algebra* su X è una famiglia $F \subseteq \wp(X)$ tale che:

- $X \in F$;
- se $A \in F$, allora $X - A \in F$;
- Se per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha che $A_i \in F$, allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

Definition

Sia F una σ-algebra sull'insieme X. Una *misura* su F è una funzione $\mu : F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ che gode della proprietà di *additività numerabile*: se per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha che $A_i \in F$ e $A_j \cap A_k$ per ogni $j, k \in \mathbb{N}$, allora

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Lo pseudoproblema della freccia (3)

Siano:

- X: insieme degli istanti del tragitto compiuto dalla freccia;
- F: σ-algebra dei sottoinsiemi misurabili di istanti di X;
- μ: funzione che associa a ciascun $A \in F$ la misura $\mu(A)$ del tragitto compiuto dalla freccia negli istanti appartenenti a F.

Lo pseudoproblema della freccia presuppone che per misurare il tragitto totale compiuto dalla freccia si debbano sommare tra loro i tragitti compiuti della freccia in ciascun *istante*. La fisica e la matematica contemporanee, però, assumono che ogni intervallo temporale consista in una quantità *più che numerabile* di istanti. Il principio di additività numerabile, pertanto, non implica affatto che il tragitto totale compiuto dalla freccia sia la somma dei tragitti compiuti in ciascun istante.

Il problema vero della freccia (1)

Sia dato un corpo C e fissiamo un istante temporale t.

1. C o è in quiete o è in moto in t (*premessa della determinatezza*).
2. Se C è in quiete o in moto in t, allora C occupa in t una e una sola regione di spazio (*premessa della regione*).
3. C occupa in t una e una sola regione di spazio (modus ponens da 1 e 2).
4. Se C occupa in t una e una sola regione di spazio, allora C è in quiete in t (*premessa della quiete*).
5. C è in quiete in t (modus ponens da 3 e 4).
6. Ma C e t erano arbitrari: dunque nessun corpo C potrà mai muoversi in alcun istante t (generalizzazione univ. da 5).

Negare la premessa della determinatezza

- Zangari (1994) osserva che, per stabilire che quale sia la velocità della freccia in un certo istante t, dobbiamo dividere lo spazio percorso in t per la durata temporale di t. Ma questo ci porta alla forma inteterminata $\frac{0}{0}$. Una forma indeterminata è come un'equazione con infinite soluzioni. Se la velocità della freccia in t è indeterminata, allora la freccia non è né in quiete né in moto in t. Ma questo avrebbe conseguenze fisiche inaccettabili.
- McLaughlin e Miller (1992) propongono una soluzione basata sull'*analisi non standard*. Tale approccio all'analisi distingue tra numeri standard, soggetti al postulato di Eudosso-Archimede, e numeri non standard, che lo violano (*infinitesimi*: numeri non standard vicini a 0). Una misura può produrre come risultato solo un numero standard, per cui la premessa della determinatezza vale: ciò spiega la sua plausibilità. Tale premessa non vale per gli istanti che presentano una distanza non standard dall'inizio del moto, il che blocca l'argomento zenoniano. L'analisi non archimedea sembra però poco compatibile con la fisica matematica.

Negare la premessa della regione

- Se, con Aristotele, neghiamo l'esistenza degli istanti, allora ad ogni stadio di un processo potenzialmente infinito di suddivisione di un intervallo temporale otteniamo solo intervalli finiti, per quanto piccoli a piacere. La premessa della regione è dunque falsa, perché la freccia, in un intervallo di tempo finito ancorché piccolo a piacere, occuperà successivamente regioni diverse di spazio. Ma l'idea aristotelica è incompatibile con la fisica e la matematica contemporanee.
- L'*analisi infinitesimale liscia* è un approccio all'analisi che si basa sulla logica intuizionista e sul rifiuto del principio del terzo escluso. Anch'essa, come l'analisi non standard, ammette gli infinitesimi, ma li definisce come numeri che non sono né uguali a 0 né diversi da 0. Gli estremi di una distanza infinitesima possono "non essere diversi" senza per questo essere uguali. *Intervalletti*: distanze infinitesime di tempo. Se il tempo è costituito da intervalletti, la premessa della regione non vale. Anche questa impostazione è poco compatibile con la fisica matematizzata.

Negare la premessa della quiete

- Secondo Russell, gli argomenti di Zenone si basano su una concezione errata, metafisica, del moto. Per affermare che un oggetto è in movimento in un certo intervallo di tempo, secondo Russell (*teoria at-at*), è sufficiente che esso si trovi in (*at*) una certa posizione all'istante iniziale e in (*at*) un'altra posizione all'istante finale:

  La freccia, in ogni istante del suo volo, è davvero in quiete. L'unico punto dove Zenone ha probabilmente errato è inferire (se lo ha fatto) dall'assenza di cambiamento la conclusione che il mondo si trova nello stesso stato all'inizio e alla fine del volo stesso. Questa conclusione non segue affatto.

- La descrizione matematica del moto è una funzione che appaia punti nello spazio a istanti nel tempo. Muoversi da A a B significa occupare via via i punti associati a ciascun istante. Consiste nel trovarsi in certi punti a determinati istanti, e nient'altro. Non ha alcun senso filosofico chiedersi *come* l'oggetto viene a trovarsi in B partendo da A.

L'obiezione di Bergson e la teoria at-at sofisticata

- Bergson: Russell non propone un'analisi del movimento, ma del *già mosso*. Se per assurdo la freccia si trovasse nel punto A nell'istante t_1 e venisse teletrasportata in B nell'istante t_2, dovremmo dire che negli istanti tra t_1 e t_2 sta ferma, contrariamente alle predizioni della teoria at-at.
- A tale obiezione si può rispondere con la *teoria at-at sofisticata*: un corpo C si muove tra gli istanti t_1 e t_2 se, presa una qualsiasi coppia di istanti t_3, t_4 tali che $t_1 \leq t_3 < t_4 \leq t_2$, la posizione $p(t_3)$ di C all'istante t_3 è diversa dalla posizione $p(t_4)$ di C all'istante t_4.

Frank Arntzenius (n. 1957)

L'obiezione di Arntzenius

- Supponiamo che C_{12} si muova a velocità costante da p_1 a p_2, e che C_{21} si muova a velocità costante da p_2 a p_1. Supponiamo di osservare un corpo C che si trova a metà strada tra p_1 e p_2: lo stato del corpo C e le predizioni della teoria at-at non consentono di determinare se si tratti di C_{12} o di C_{21}.
- La teoria at-at, anche quella sofisticata, sembrerebbe quindi implicare una forma radicale di indeterminismo.