

Controlli automatici

Sintesi per tentativi mediante il Luogo delle Radici

Prof. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

La sintesi per tentativi mediante LdR consente di progettare regolatori sulla base di un approccio «polinomiale» basato sull'uso del luogo delle radici.

Tale metodo ha come elemento fondamentale l'individuazione, sulla base delle specifiche del problema di controllo, di una **regione ammissibile** per i poli del sistema a ciclo chiuso.

La sintesi del regolatore ha come obiettivo ultimo quello di garantire che i poli del sistema a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.

Viene denominata «per tentativi» in quanto in taluni casi può richiedere varie iterazioni

Vediamo attraverso quali passi si sviluppa.

A ciascun problema di controllo sono associate due tipologie di specifiche:

Le specifiche sul comportamento a regime

Le specifiche sul comportamento transitorio

Come **primo passo** nella sintesi mediante LdR si analizzano le specifiche sul comportamento a regime, e sulla base di queste si determinano due parametri:

Il tipo di sistema di controllo che si deve realizzare (tipo 0, tipo 1, ...) ed in particolare il numero di poli nell'origine che devono **eventualmente** essere inseriti nel controllore.

Una **eventuale soglia minima per il guadagno statico** (eventualmente generalizzato) **del controllore**

In generale, nell'ambito di questa metodologia di progetto si va a ricercare un controllore espresso nella forma seguente

$$C(s) = \frac{K_C}{s^\nu} C'(s) \quad C'(0) = 1$$

Come detto, l'analisi delle specifiche sul comportamento a regime ci consente di determinare il **valore di ν** ($\nu = 0, \nu = 1, \dots$) (cioè il numero di poli nell'origine che devono essere inseriti nel controllore) ed un eventuale **vincolo sul guadagno K_C** del tipo:

$$K_C \geq K_C^*$$

Quando risulta necessario inserire un polo nell'origine nel controllore, è altamente consigliato inserire contestualmente anche uno zero. Una scelta di primo tentativo per la posizione dello zero può essere quella di sovrapporlo ad uno dei poli del processo (se la relativa cancellazione è consentita, cioè se il polo del processo ha parte reale negativa).

E' in genere conveniente sovrapporre lo zero del regolatore al polo del processo a parte reale negativa situato **più in bassa frequenza**.

In generale un regolatore ben progettato ha sempre grado relativo nullo, cioè tanti zeri quanti poli.

$$C(s) = \frac{K_C}{s^\nu} C'(s)$$

$$C'(0) = 1$$

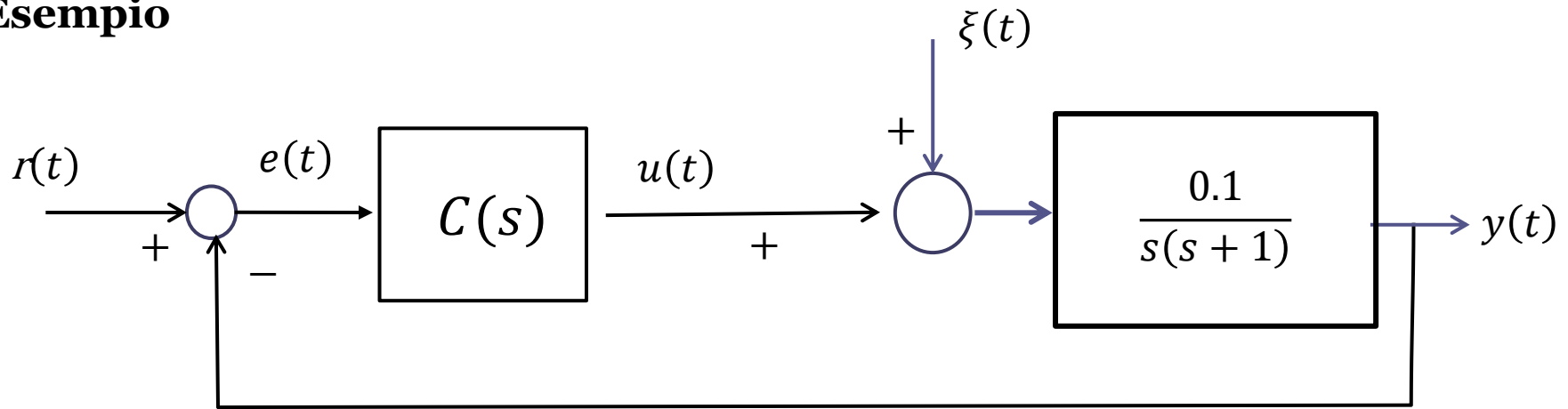
Dopo avere determinato ν ed eventuali vincoli su K_C , si analizzano le specifiche sul transitorio e si determina la regione ammissibile.

Si verifica quindi se il controllore ipotizzato a valle della analisi delle specifiche sul comportamento a regime è in grado di fare in modo che i poli del sistema a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile, e se si in corrispondenza di quale intervallo di valori per K_C . Tale analisi si svolge mediante il tracciamento del LdR ed il «confronto» fra il LdR e la regione ammissibile.

Se il controllore ipotizzato a valle della analisi delle specifiche sul comportamento a regime non è in grado di vincolare i poli del sistema a ciclo chiuso all'interno della regione ammissibile bisogna apportare ulteriori modifiche alla sua struttura attraverso la parte $C'(s)$, in particolare aggiungere una o più coppie polo-zero in modo da avere sempre un regolatore a grande relativo nullo.

L'individuazione della/delle particolari coppie polo-zero che sia opportuno inserire per giungere ad una soluzione soddisfacente del problema si svolge sempre impiegando il LdR.

Esempio



Progettare un regolatore in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%
- S3. Sovraelongazione non superiore al 10%
- S4. Tempo di assestamento all' 1% non superiore a 1.5 secondi

Analizziamo le specifiche sul comportamento a regime.

- *S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %*
- *S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%*

La specifica S1 **sarebbe** compatibile con un sistema di controllo di tipo zero. In realtà il processo possiede un polo nell'origine quindi il sistema di controllo sarà sempre almeno di tipo 1, quindi (anche sulla base del primo enunciato del PMI) la specifica S1 viene garantita **con errore nullo** da qualunque controllore $C(s)$ che renda asintoticamente stabile il sistema a ciclo chiuso.

La specifica S2 è compatibile con un sistema di controllo in cui il regolatore non possiede poli nell'origine ($\nu = 0$). Sia K_C il guadagno statico del regolatore. Per garantire la specifica S2 si deve imporre che il guadagno statico della FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita sia inferiore a **0.02**.

$$W_{\zeta}^y(0) = \frac{1}{K_C} \leq 0.02 \quad \rightarrow \quad K_C \geq 50$$

Desumiamo pertanto con riferimento all'esempio di sintesi in esame che **non devono essere inseriti dei poli nell'origine nel controllore** ($\nu = 0$) e ricercheremo pertanto un controllore della forma

$$C(s) = K_C C'(s) \quad C'(0) = 1$$

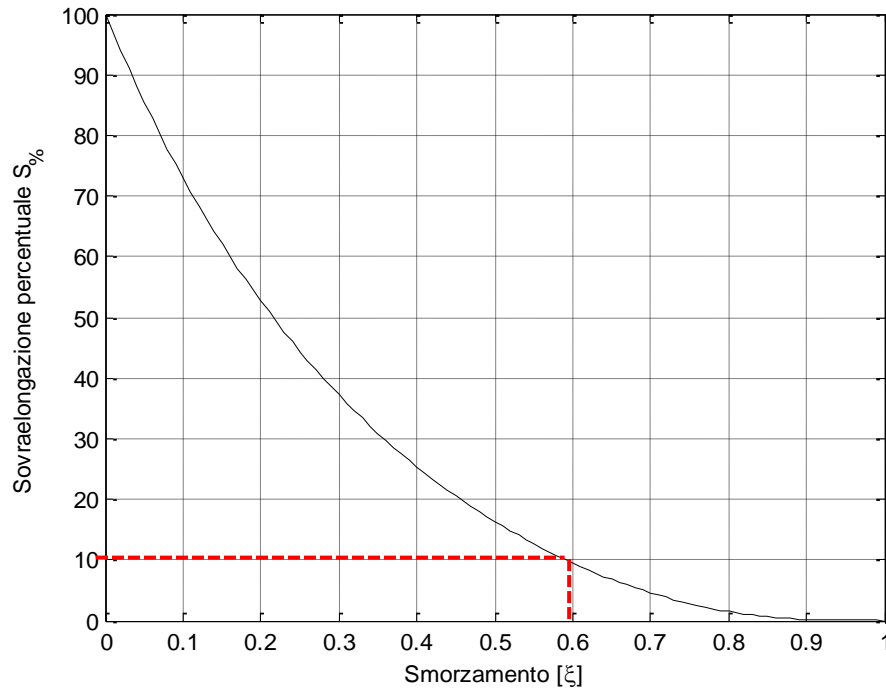
tenendo a mente che il guadagno statico K_C dovrà essere maggiore o uguale a 50

$$K_C \geq 50$$

La «parte dinamica» $C'(s)$ del regolatore, cioè una eventuale aggiunta di poli e zeri, va progettata per garantire il soddisfacimento delle specifiche sul comportamento transitorio avendo ovviamente cura di continuare a garantire la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Le specifiche sul comportamento transitorio vengono «convertite» in una **regione ammissibile** del piano all'interno della quale devono essere vincolati i poli del sistema a ciclo chiuso.

- S₃. Sovraelongazione non superiore al 10%

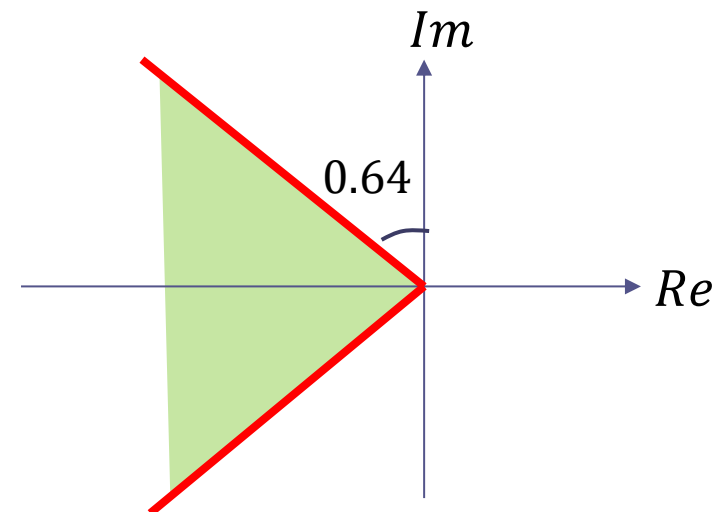


$$S_{\%} \leq 10 \quad \rightarrow \quad \xi \geq 0.6$$

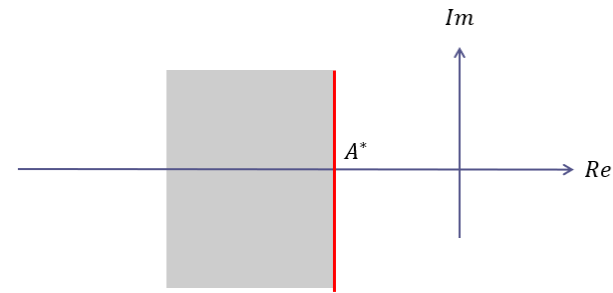


$$\beta \geq \beta^* = \tan^{-1} \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln \frac{S^*}{100} \right\} = 0.64 \text{ rad}$$

Ovviamente: $\sin(0.64) = 0.6$



- S4. Tempo di assestamento all' 1% non superiore a 1.5 secondi

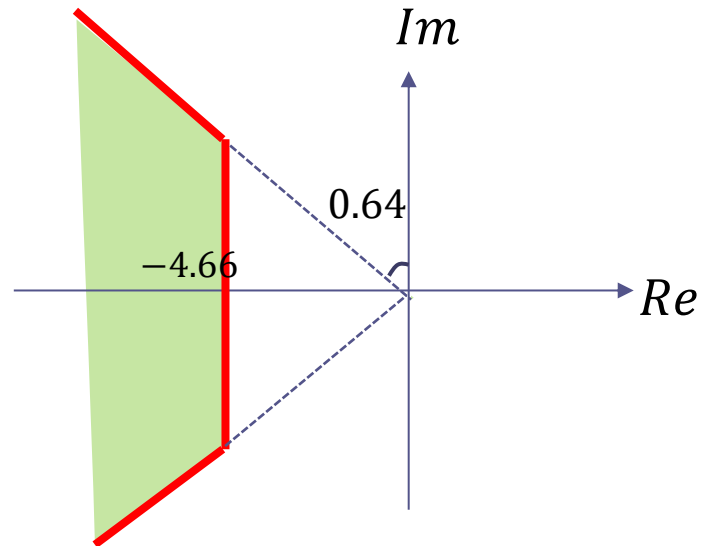


$$T_{a1\%} \leq T^* \quad \Rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

Poiché il processo è del secondo ordine il sistema a ciclo chiuso sarà sicuramente di grado superiore al primo. Si deve pertanto far riferimento alla formula:

$$A^* = -\frac{7}{T^*} = -4.66$$

La regione ammissibile è complessivamente la seguente



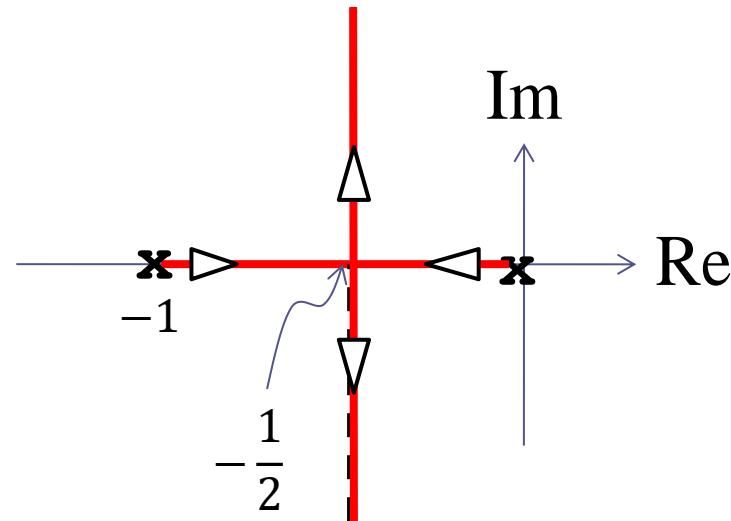
Iniziamo dal controllore più semplice,

Verifichiamo se un **controllore proporzionale** $C(s) = K_C$ con guadagno $K_C \geq 50$ è in grado di soddisfare le specifiche sul transitorio.

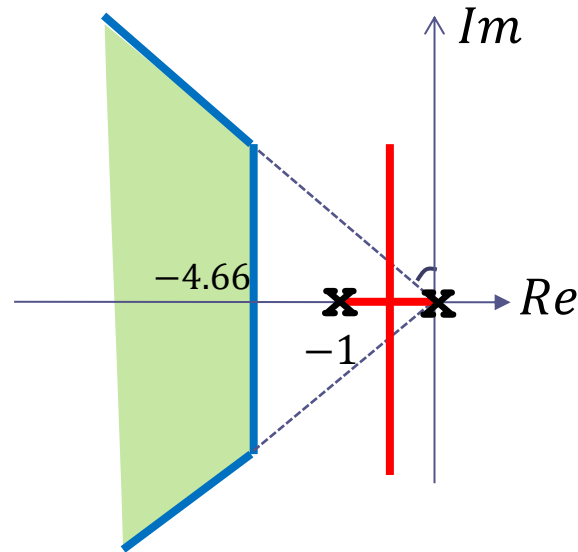
Tracciamo il LdR:

$$L(s) = \frac{0.1}{s(s+1)}$$

A ciclo chiuso sono presenti **due poli** che possono essere reali negativi o complessi coniugati



Sovrapponendo la regione ammissibile ed il LdR appare chiaro come impiegando un controllore proporzionale risulta impossibile fare in modo che i poli a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.



Dobbiamo indagare una **struttura alternativa per il controllore**.

$$C(s) = K_C C'(s) \quad C'(0) = 1$$

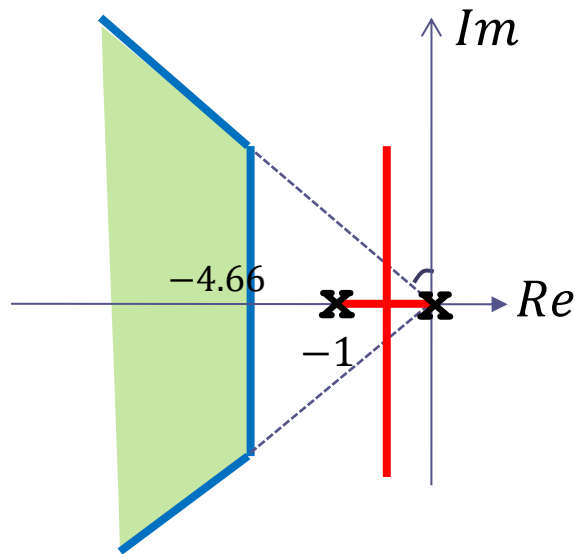
Una scelta frequente nell'ambito della sintesi mediante LdR prevede l'inserimento nella parte dinamica $C'(s)$ del regolatore di una o più **coppie polo-zero**

$$C(s) = K_C \frac{p s - z}{z s - p} \quad C'(s) = \frac{p s - z}{z s - p} \quad C'(0) = 1$$

Se non inserissimo il fattore $\frac{p}{z}$ nella definizione del controllore il suo guadagno statico non sarebbe più pari a K_C .

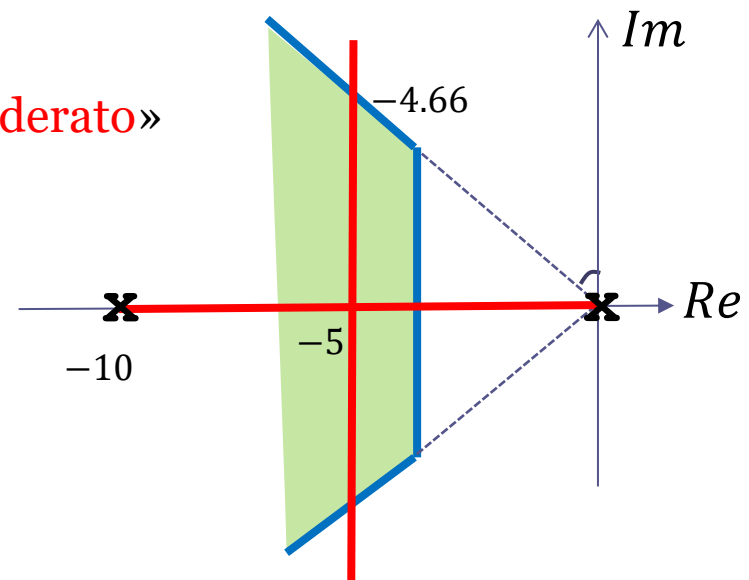
Una scelta altrettanto frequente prevede che **lo zero del regolatore venga sovrapposto ad uno dei poli del processo in modo da «cancellarlo» e «sostituirlo» con un polo che abbia una collocazione maggiormente vantaggiosa per quanto concerne l'andamento del LdR**. Cancellare mediante uno zero del controllore uno dei poli (**a parte reale negativa**) del processo è in generale sempre una scelta conveniente in quanto riduce anche l'ordine della FdT a ciclo aperto $L(s)$, quindi riduce il numero dei poli a ciclo chiuso e semplifica l'analisi

Riguardando il LdR e la regione ammissibile appare chiaro che il principale fattore limitante sia dovuto alla presenza del polo in -1 , per effetto del quale il punto doppio va a collocarsi nel punto -0.5 (a metà strada fra i due poli)



Se il polo in -1 fosse collocato più in alta frequenza, in particolare in -10 , si avrebbe un punto doppio in -5 , e quindi i rami del luogo verrebbero «attratti» all'interno della regione ammissibile

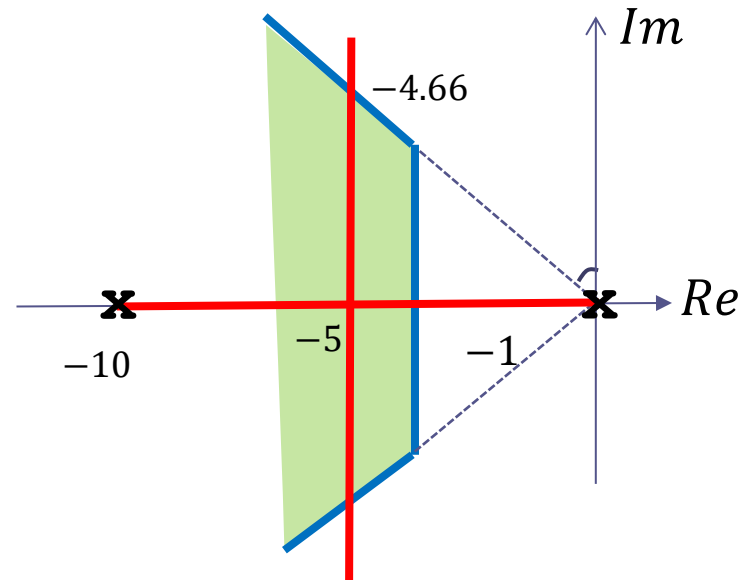
LdR «**desiderato**»



E' possibile ottenere il LdR «desiderato» cancellando con uno zero del regolatore il polo del processo in -1 e inserendo un polo in -10 ($z = -1, p = -10$)

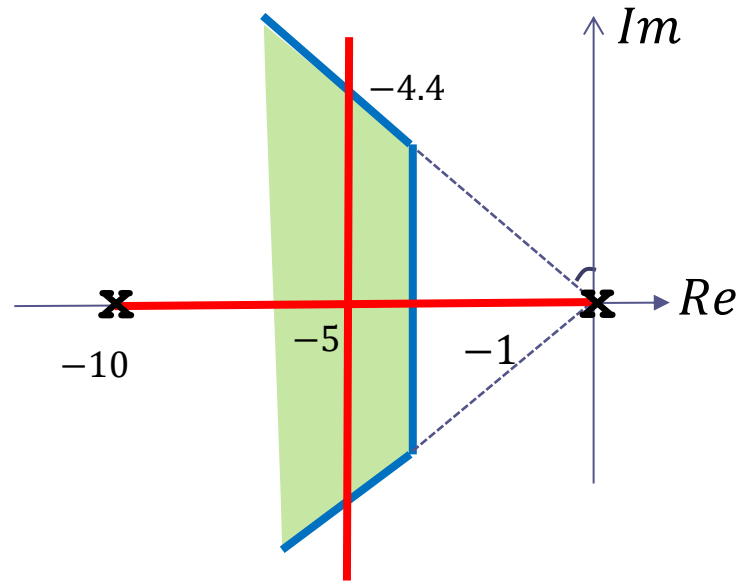
$$C(s) = K_C 10 \frac{s+1}{s+10} \quad C'(s) = 10 \frac{s+1}{s+10} \quad C'(0) = 1$$

$$L(s) = 10 \frac{\cancel{s+1}}{s+10} \frac{0.1}{s(\cancel{s+1})} = \frac{1}{s(s+10)} \quad \text{Cancellazione polo-zero}$$



Utilizzando un regolatore $C(s) = K_C 10 \frac{s+1}{s+10}$ il LdR diventa coincidente con quello desiderato, e i poli a ciclo chiuso possono essere collocati, mediante una opportuna scelta di K_C , sulle traiettorie dei rami del LdR desiderato

Utilizzando un regolatore $C(s) = K_C 10 \frac{s+1}{s+10}$ il LdR diventa coincidente con quello desiderato, e i poli a ciclo chiuso possono essere collocati, mediante una opportuna scelta di K_C , sulle traiettorie dei rami del LdR desiderato

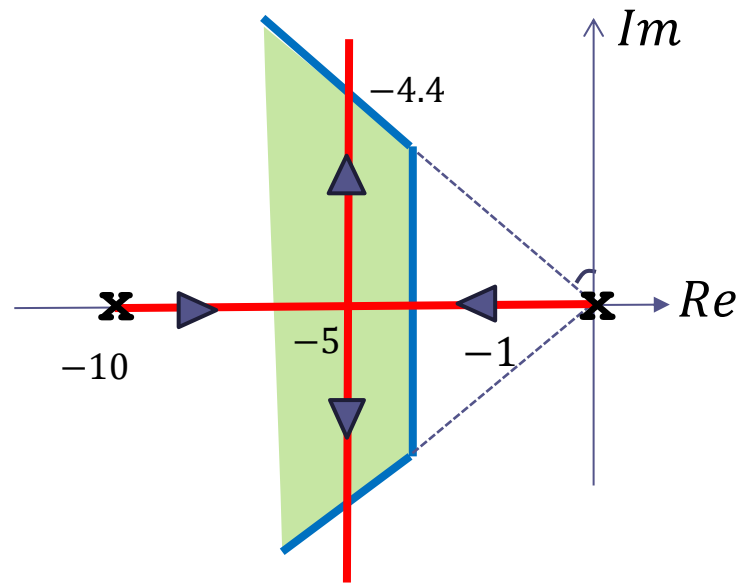


Il valore del guadagno K_C associato al punto doppio in -5 si determina facilmente operando la taratura del punto doppio, e vale **20** (*fatelo come esercizio*). Tale valore non è compatibile con il vincolo sul guadagno statico del controllore derivante dalle specifiche a regime. Dobbiamo pertanto utilizzare un valore più elevato, nella fattispecie un valore ≥ 50 , che inevitabilmente condurrà alla presenza nella FdT a ciclo chiuso di poli complessi coniugati.

Possiamo scegliere $K_C = 50$ e «dormire tranquilli» in merito alla risoluzione di questo esercizio ?

Possiamo scegliere $K_C = 50$ e «dormire tranquilli» in merito alla risoluzione di questo esercizio ?

No



Vi è difatti il rischio che in corrispondenza del minimo valore consentito per il guadagno statico del controllore, pari a 50, i due rami del luogo delle radici siano già usciti dalla regione ammissibile.

Per verificare se ciò avvenga o meno, calcoliamo i poli a ciclo chiuso in corrispondenza del valore $K_C = 50$ (sappiamo già che sono complessi coniugati, e che la loro parte reale è pari a -5) e verifichiamo se il valore del loro smorzamento risulti maggiore di 0.6

$$P_{car}(s) = s(s + 10) + K_C = s^2 + 10s + K_C \quad K_C = 50$$

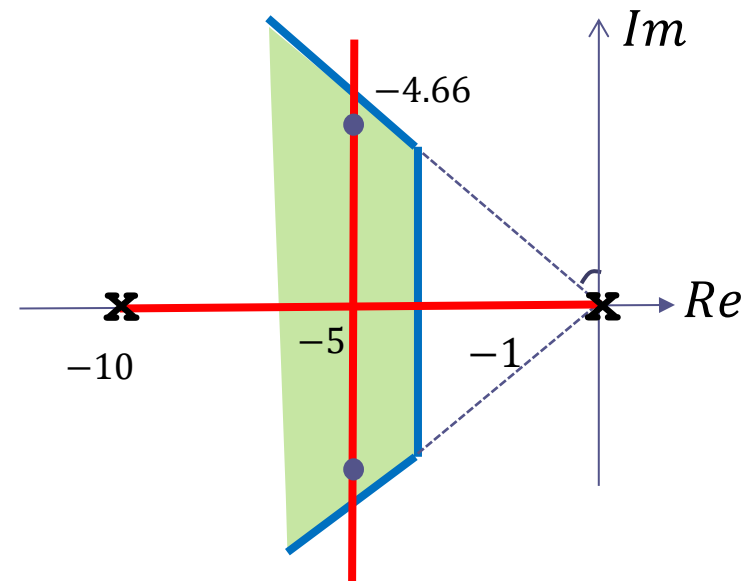
$$P_{car}(s) = s^2 + 10s + 50$$

$$p_{1,2} = -5 \pm j 5 \quad \xi = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 5^2}} = 0.7071 \quad \xi > 0.6 \quad \checkmark$$

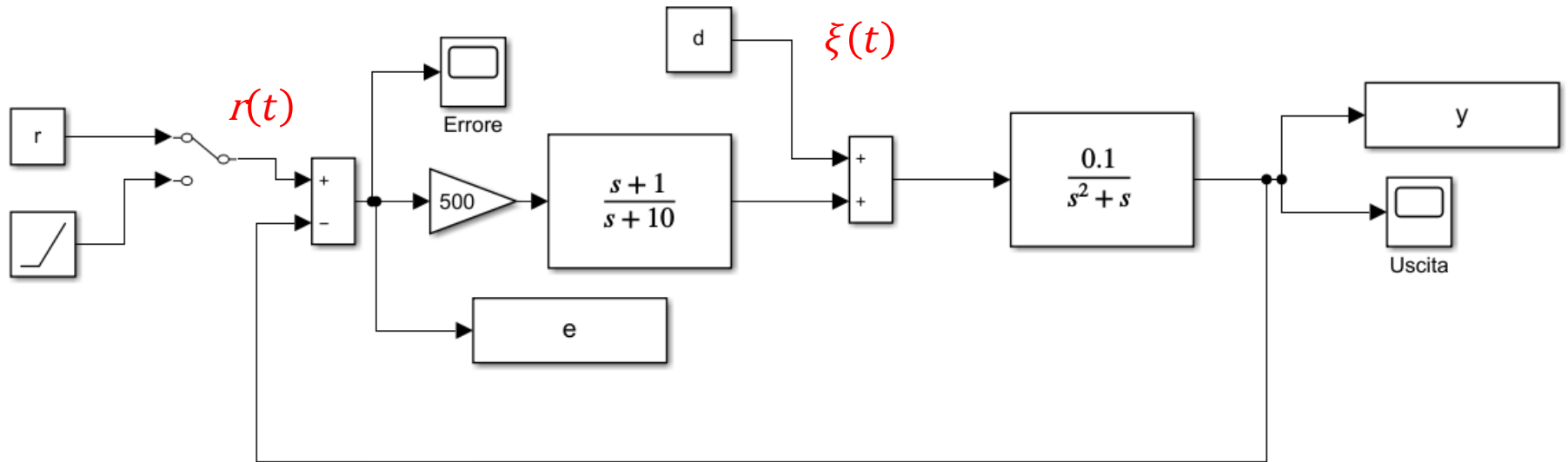
Lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati conseguente alla scelta $K_C = 50$ rientra all'interno della regione ammissibile.

Quindi il seguente regolatore risolve il problema di progetto

$$C(s) = 500 \frac{s + 1}{s + 10}$$

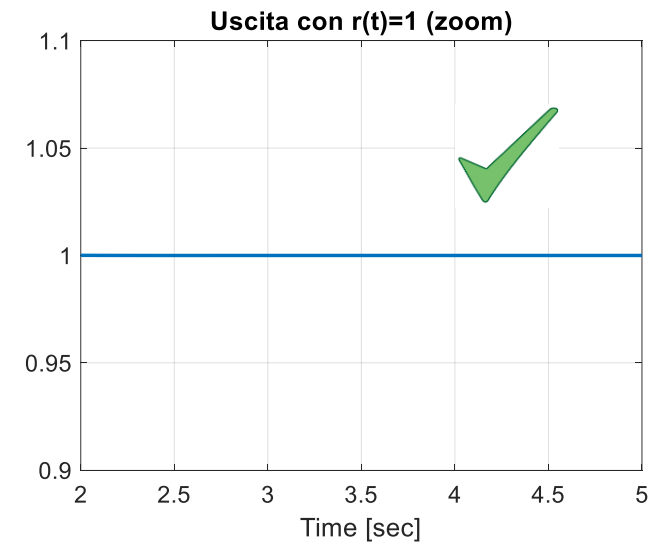
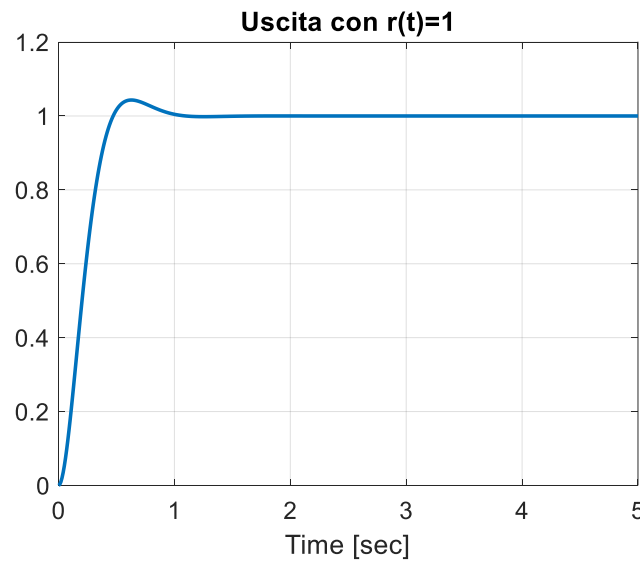


File: SintesiLdR01.slx



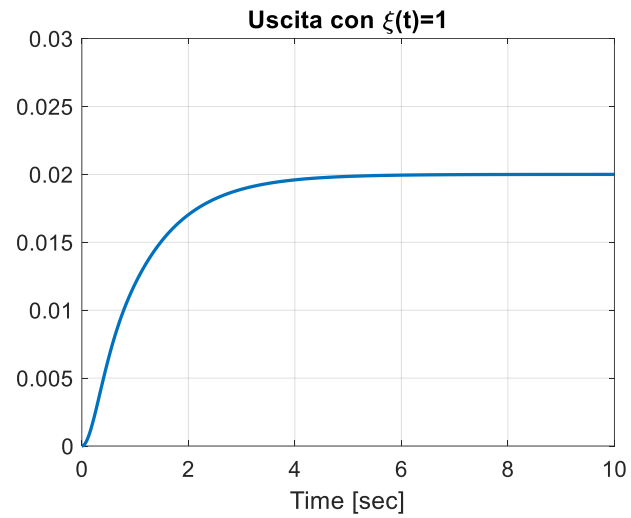
- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %

$$r(t) = 1$$



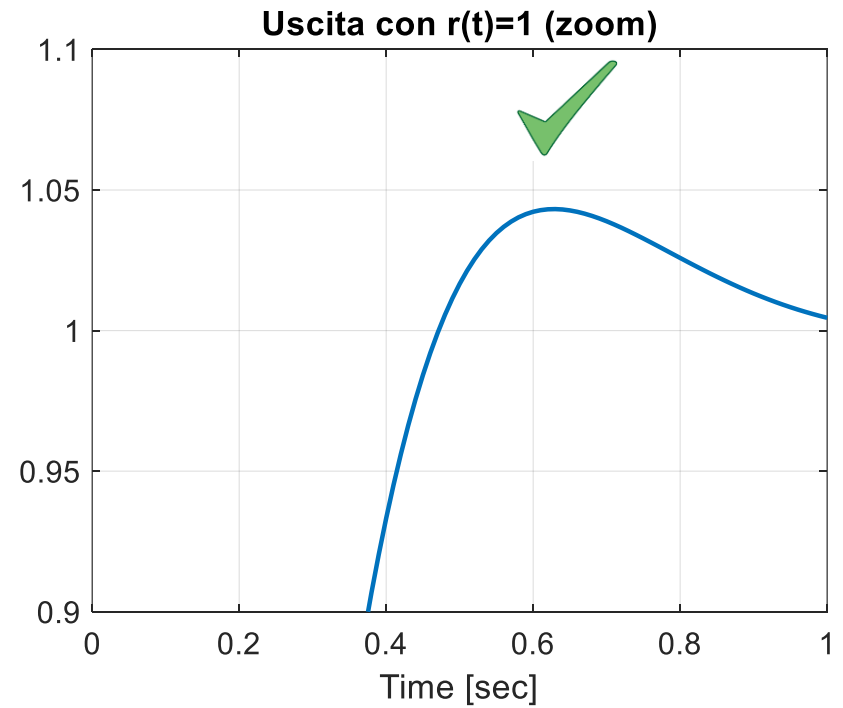
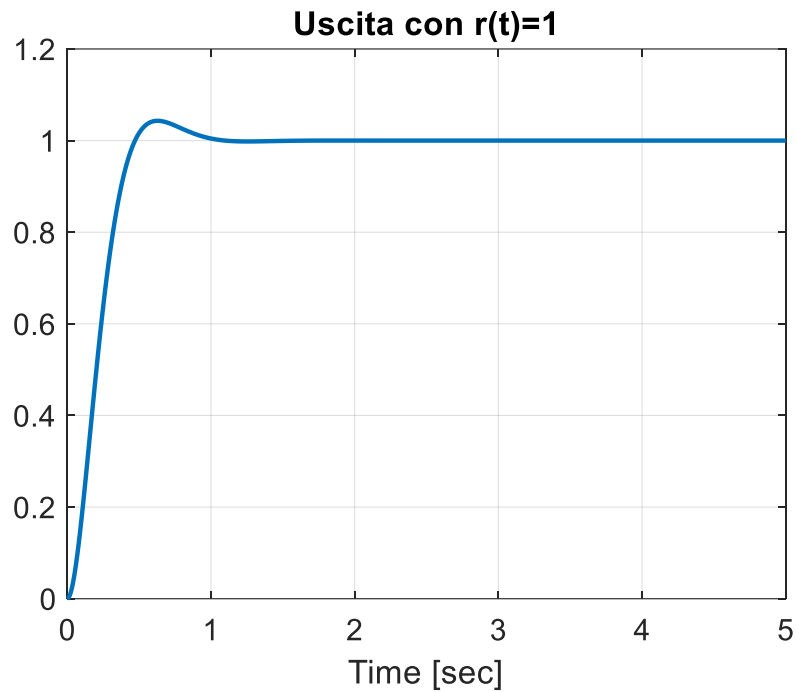
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%

$$\xi(t) = 1$$



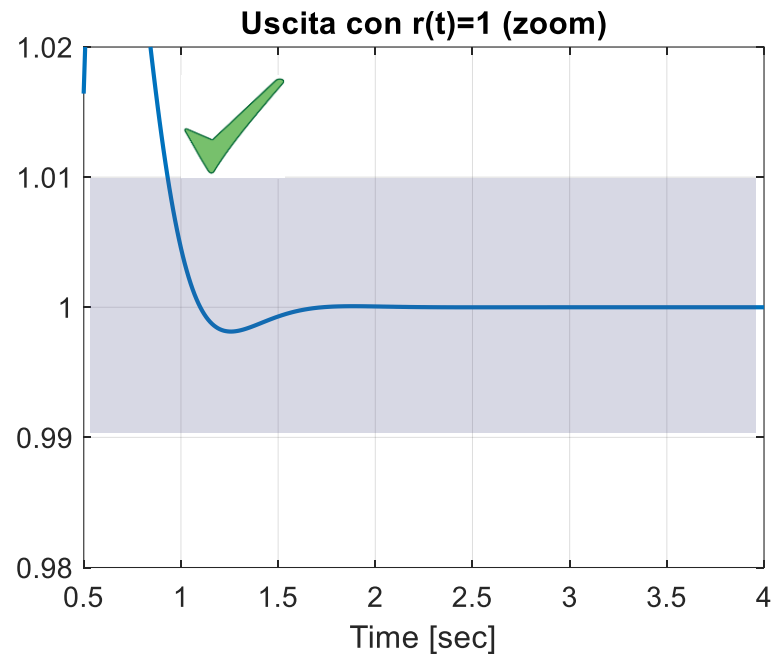
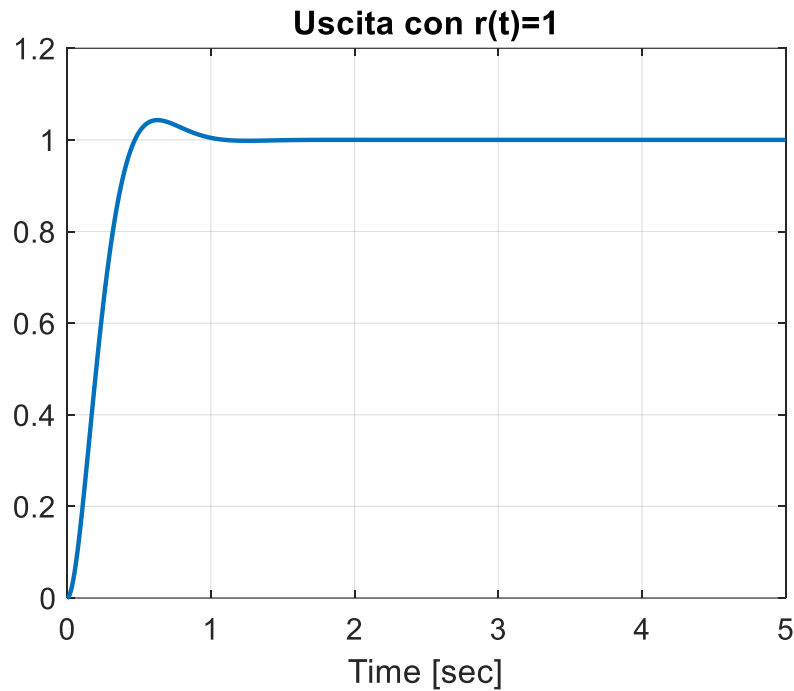
- S3. Sovraelongazione non superiore al 10%

$$r(t) = 1$$

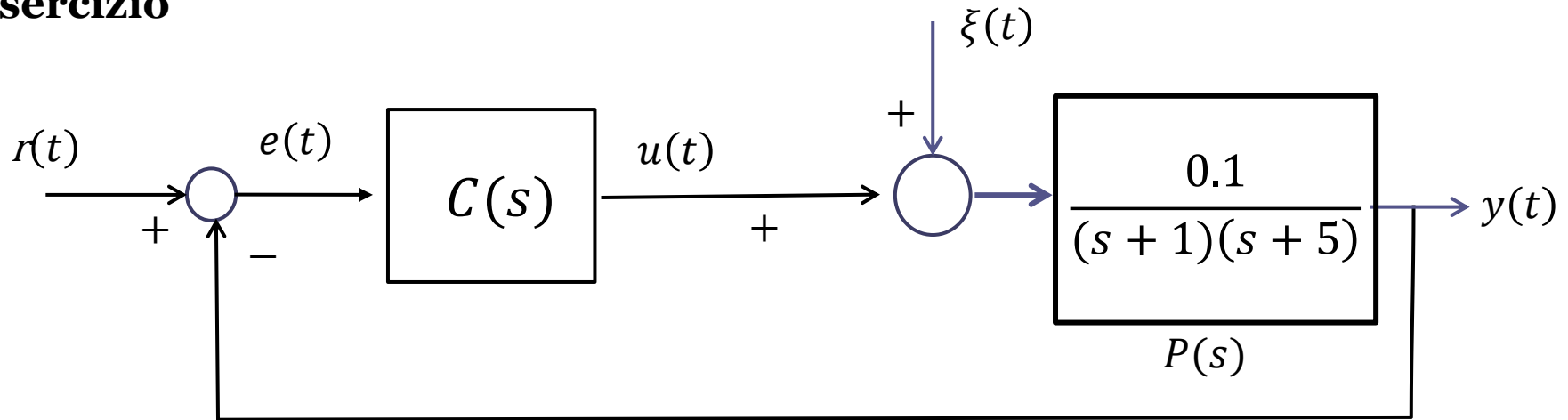


- S4. Tempo di assestamento all' 1% non superiore a 1.5 secondi

$$r(t) = 1$$



Esercizio



Progettare un regolatore in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Precisione statica
- S2. Attenuazione di un disturbo costante almeno del 95%
- S3. Errore a regime per un set point $r(t) = 2t$ (rampa con pendenza pari a 2) non superiore ad 1
- S4. Tempo di assestamento al 5% non superiore a 1.75 secondi
- S5. Sovraelongazione percentuale non superiore al 5%

Soluzione

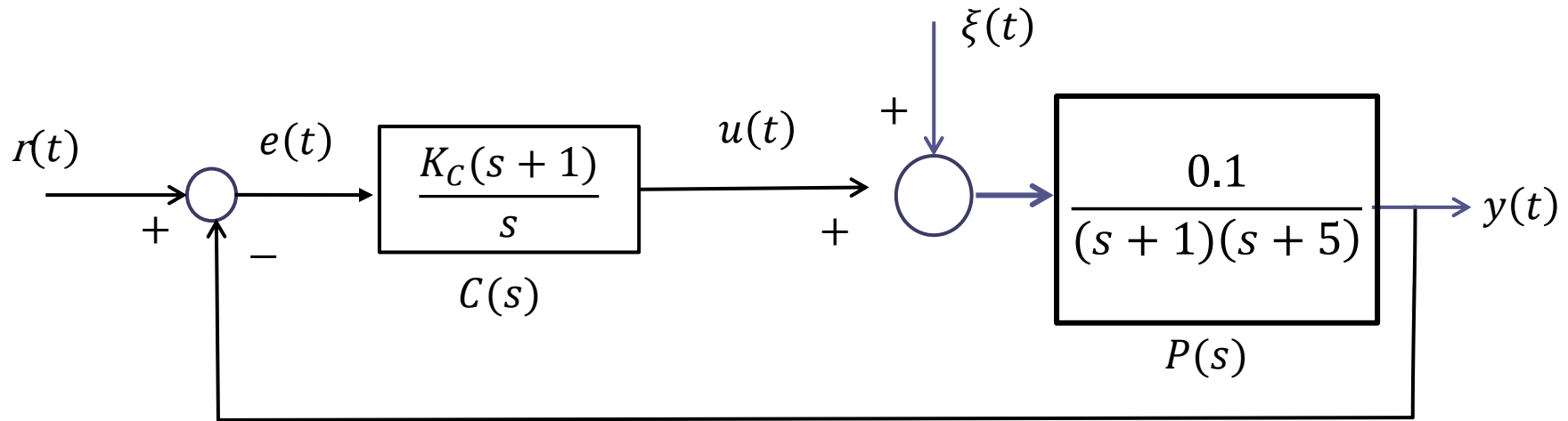
La specifica **S1** (precisione statica) implica la realizzazione di un sistema di controllo di tipo 1. Poiché il processo non contiene poli nell'origine sarà necessario progettare un regolatore contenente un polo nell'origine ($\nu = 1$)

Includiamo da subito nel regolatore anche uno zero in modo da avere un regolatore a grado relativo nullo. Come da prassi operativa, sovrapponiamo lo zero del controllore al polo del processo a parte reale negativa collocato più in bassa frequenza

Struttura di tentativo:

$$C(s) = \frac{K_C(s + 1)}{s} \quad \text{Ovviamente } K_C \text{ dovrà essere tale da garantire che il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile.}$$

Verifichiamo se tale scelta per il controllore è tale da garantire la stabilità a ciclo chiuso per qualunque valore di K_C o se invece sussistono dei vincoli



Vi è un modo rapido per determinare il polinomio caratteristico associato ad un sistema di controllo a retroazione unitaria. E' sufficiente moltiplicare fra loro le FdT del controllore e del processo, e sommare i relativi polinomi a denominatore e a numeratore

$$C(s)P(s) = \frac{K_C(s+1)}{s} \cdot \frac{0.1}{(s+1)(s+5)} = \frac{0.1K_C}{s(s+5)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+5) + 0.1K_C = s^2 + 5s + 0.1K_C$$

Il sistema di controllo è sempre asintoticamente stabile a ciclo chiuso per qualunque valore di $K_C > 0$ (regola di Cartesio)



- **S2**. Attenuazione di un disturbo costante almeno del 95%

La specifica **S2** cela un piccolo «tranello». Essa è *compatibile* con un sistema di controllo in cui il controllore non contiene poli nell'origine ed abbia un guadagno **statico** $\mu_C \geq \frac{1}{0.05} = 20$, ma poiché nel contesto del presente esercizio siamo in ogni caso «costretti» (dalla specifica S1) ad inserire nel controllore un polo nell'origine ecco che la specifica S2 diventa «ridondante». Sulla base del PMI essa difatti sarà garantita (con un livello di attenuazione completo, pari quindi al 100%) da ciascun regolatore avente un polo nell'origine che, nel contempo, garantisca la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Non è quindi prevista, almeno per il momento, nessuna soglia inferiore per il guadagno del controllore, la cui struttura di tentativo resta la seguente:

$$C(s) = \frac{K_C(s + 1)}{s} \quad K_C > 0$$

- **S3**. Errore a regime per un set point $r(t) = 2t$ (rampa con pendenza pari a 2) non superiore ad 1

Ora vediamo se la specifica **S3** implica dei vincoli sul guadagno del controllore.

Abbiamo visto in precedenza che un sistema di controllo di tipo 1 è tale da rispondere ad un set point a rampa con un segnale di errore che tende ad un valore costante.

Calcoliamo il valore a regime del segnale di errore nel caso in cui sia impiegato un set-point a rampa $r(t) = 2t$

FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'errore

$$W_r^e(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K_C(s+1)}{s} \frac{0.1}{(s+1)(s+5)}} = \frac{s(s+5)}{s(s+5) + 0.1K_C}$$

TdL dell'errore
$$E(s) = W_r^e(s)R(s) = \frac{s(s+5)}{s(s+5) + 0.1K_C} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{(s+5)}{s(s+5) + 0.1K_C} \cdot \frac{2}{s}$$

$E(s)$ soddisfa i requisiti di applicabilità del Teorema del valore finale in quanto i suoi poli coincidono con le radici del polinomio caratteristici più un ulteriore polo semplice nell'origine. Ciò conferma, come già sapevamo, che il segnale di errore tende a un valore costante.

Applichiamo il Teorema del valore finale

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = E^* &= [sE(s)]_{s=0} = \left[s \cdot \frac{(s+5)}{s(s+5) + 0.1K_C} \cdot \frac{2}{s} \right]_{s=0} \\ &= \left[\frac{2(s+5)}{s(s+5) + 0.1K_C} \right]_{s=0} = \frac{10}{0.1K_C} = \frac{100}{K_C} \end{aligned}$$

Imponiamo che il valore di regime dell'errore soddisfi la specifica S3. Ciò comporterà un vincolo sul valore minimo del guadagno K_C

$$E^* = \frac{100}{K_C} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad K_C \geq 100$$

L'imposizione della specifica S3 ha comportato un vincolo sul minimo valore del guadagno K_C

$$C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s} \quad K_C \geq 100$$

N.B. K_C non è il guadagno statico del controllore. Se difatti si sostituisce $s = 0$ nella FdT del controllore non si ottiene K_C ma bensì infinito, per effetto del fatto che il controllore possiede un polo nell'origine. K_C viene invece detto «guadagno statico **generalizzato**»

Il **guadagno statico generalizzato** è una estensione del concetto di guadagno statico per sistemi dinamici che possiedono poli nell'origine.

Esso si determina secondo la seguente formula:

$$\mu_{GEN} = [s^{\nu} F(s)]_{s=0} \quad \nu = \text{numero di poli nell'origine di } F(s)$$

cioè, rimuovendo dalla FdT i poli nell'origine e successivamente valutandone il valore in $s = 0$

Se una FdT non possiede poli nell'origine ($\nu = 0$) le definizioni di guadagno statico generalizzato e di guadagno statico standard coincidono.

Mostriamo che K_C è il guadagno statico generalizzato del controllore $C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s}$

$$C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s} \quad \nu = 1$$

$$\mu_{GEN} = [s C(s)]_{s=0} = [K_C(s+1)]_{s=0} = K_C$$

Riserviamoci la possibilità di modificare successivamente la struttura del regolatore, se risulterà necessario alla luce della analisi delle specifiche sul transitorio, aggiungendo ulteriori poli e zeri ma sempre impiegando una forma tale che il **guadagno statico generalizzato** del controllore sia pari a K_C , cioè:

$$C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s} C'(s) \quad K_C \geq 100 \quad C'(0) = 1$$

Si verifica facilmente che il controllore così modificato continua ad avere guadagno statico generalizzato pari a K_C .

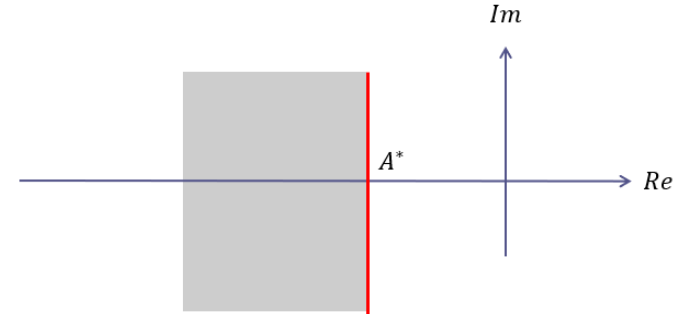
$$\mu_{GEN} = [s C(s)]_{s=0} = [K_C(s+1)C'(s)]_{s=0} = K_C C'(0) = K_C$$

Ciò ci garantisce che il controllore eventualmente modificato mediante l'aggiunta dell'ulteriore parte dinamica addizionale $C'(s)$ continuerà a soddisfare le specifiche sul comportamento a regime (purché, ovviamente, continui a garantire la stabilità a ciclo chiuso, cosa che andrà verificata)

Si può infatti verificare come eseguendo l'analisi della specifica S_3 considerando il controllore modificato $C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s} C'(s)$ con $C'(0) = 1$ si ottenga il medesimo vincolo su K_C , ricavato in precedenza per $C'(s) = 1$, cioè $K_C \geq 100$

Passiamo alla analisi delle specifiche sul transitorio. Determiniamo la regione ammissibile per i poli del sistema a ciclo chiuso.

- **S4.** Tempo di **assestamento al 2%** non superiore a **1.75 secondi**

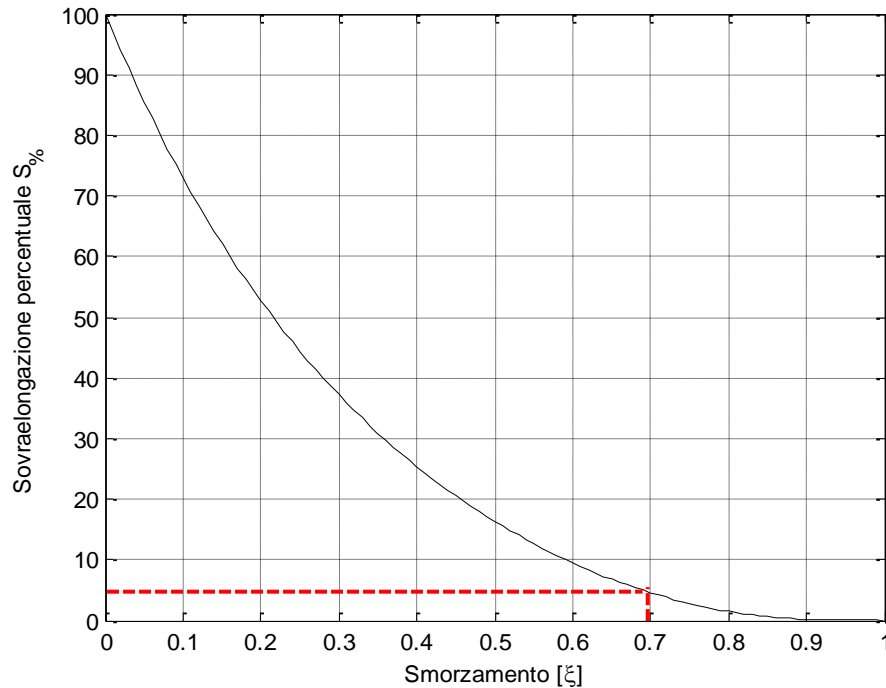


$$T_{a2\%} \leq T^* \quad \rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\frac{4}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{6}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

Poiché il processo è del secondo ordine il sistema a ciclo chiuso sarà sicuramente di grado superiore al primo. Si deve pertanto far riferimento alla formula:

$$A^* = -\frac{6}{T^*} = -3.42$$

- **S5. Sovraelongazione non superiore al 5%**



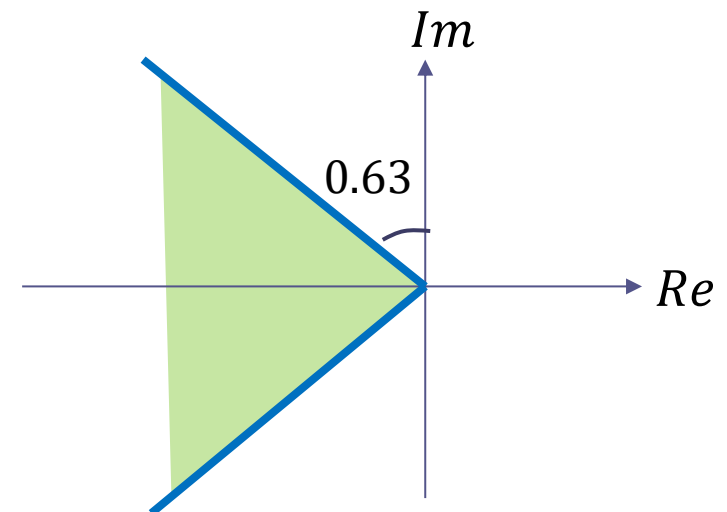
$$S_{\%} \leq 5 \quad \rightarrow \quad \xi \geq 0.7$$



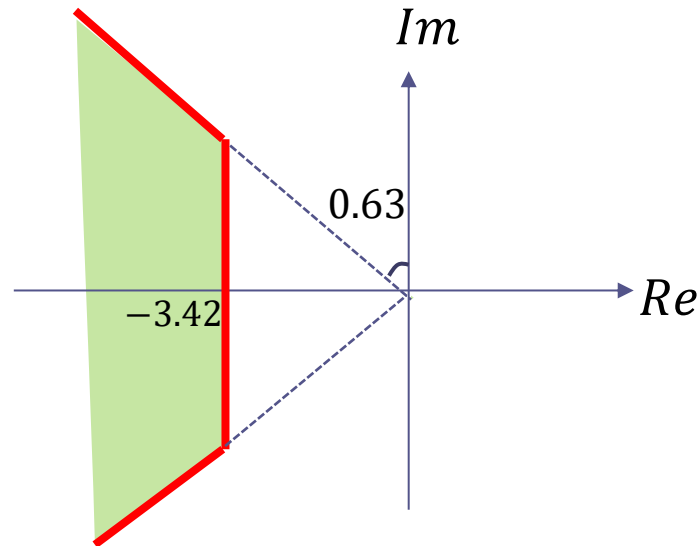
$$\beta \geq \beta^* = \tan^{-1} \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln \frac{S^*}{100} \right\} = 0.63 \text{ rad}$$

Ovviamente:

$$\sin(0.63) = 0.59$$

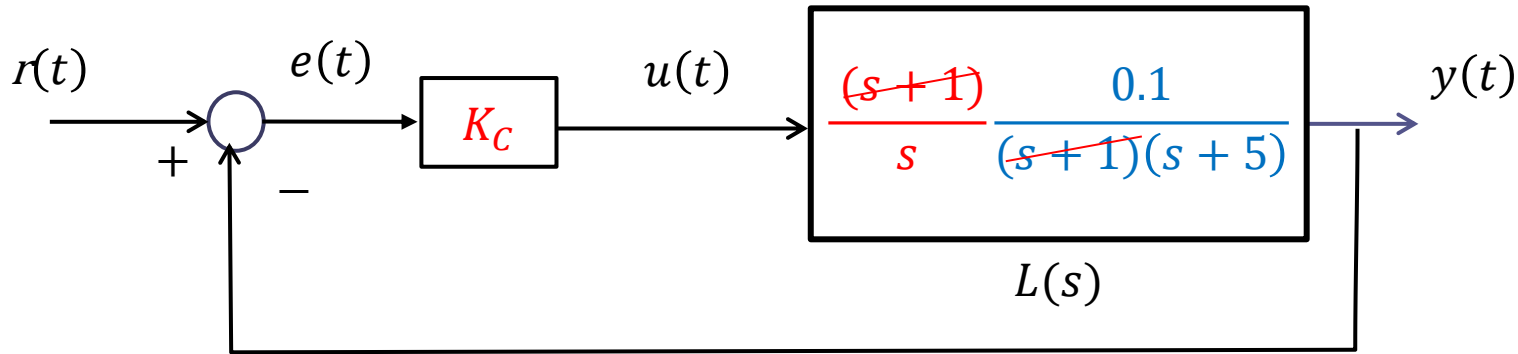


La regione ammissibile derivante dalle specifiche S4 ed S5 è complessivamente la seguente (area verde in figura)



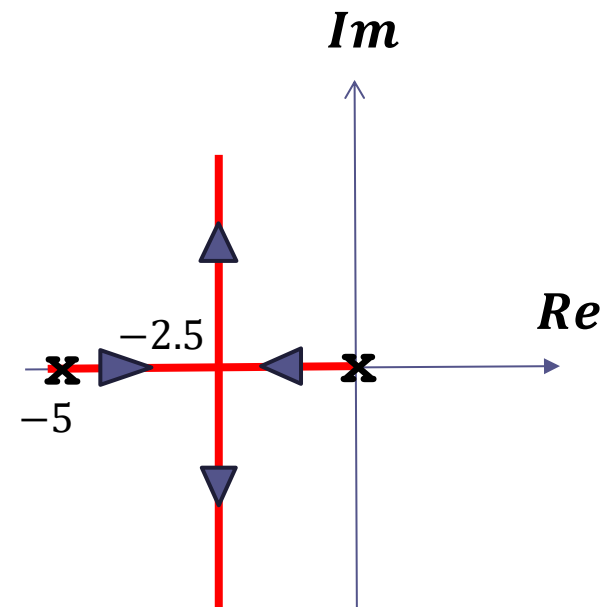
Ora, sulla base della struttura che è stata ipotizzata per il regolatore in esito alla imposizione delle specifiche S1, S2 e S3 sul comportamento a regime dobbiamo tracciare il relativo LdR e «sovrapporlo» alla regione ammissibile per vedere se scegliendo in maniera adeguata il guadagno del regolatore si può garantire che tutti poli a ciclo chiuso ricadano al suo interno

Rappresentiamo lo schema a blocchi del sistema di controllo secondo lo schema standard per il tracciamento del LdR, cioè isolando il guadagno del controllore in un blocco a se stante ed «accorpendo» nel blocco $L(s)$ la parte dinamica del controllore (in rosso) e la FdT del processo (in blu). Il disturbo può essere rimosso da questo schema.

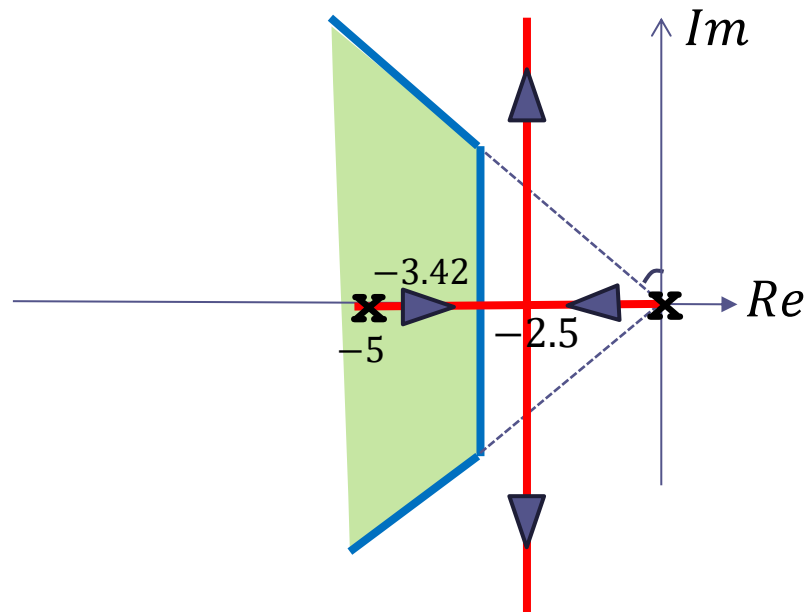


$$L(s) = \frac{\cancel{(s+1)}}{s} \cdot \frac{0.1}{\cancel{(s+1)}(s+5)} = \frac{0.1}{s(s+5)}$$

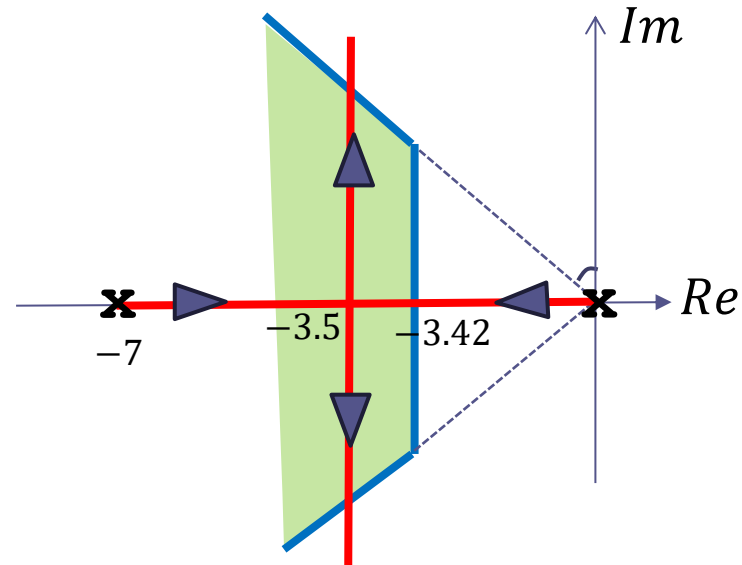
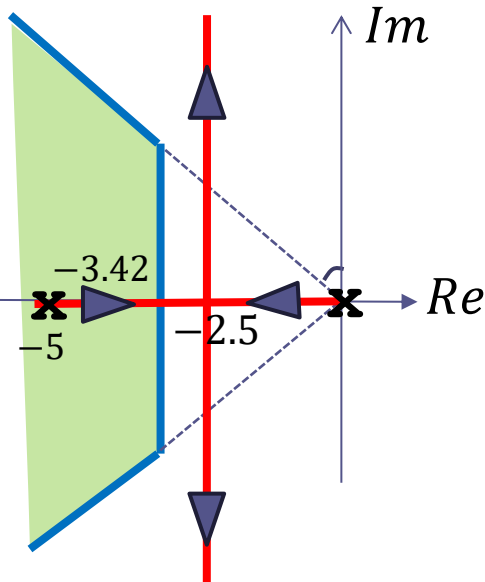
Il LdR risultante è mostrato sulla destra



Sovrapponendo la regione ammissibile ed il LdR appare chiaro come impiegando il controllore $C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s}$ risulta **impossibile** fare in modo che entrambi i poli a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.



Il principale fattore limitante è dovuto alla presenza nella $L(s)$ del polo in -5 , per effetto del quale il punto doppio va a collocarsi nel punto -2.5 (a metà strada fra i due poli di $L(s)$). Se il polo in -5 fosse collocato più in alta frequenza, in particolare in -7 , si avrebbe un punto doppio in -3.5 , e quindi i rami del luogo verrebbero «attratti», almeno in un intervallo di valori del guadagno K_C , all'interno della regione ammissibile



E' possibile ottenere il LdR «desiderato» inserendo nel controllore una ulteriore coppia polo-zero, in cui lo zero del controllore cancella il polo del processo in -5 e lo «sostituisce» con un polo in -7

$$C(s) = K_C \frac{s+1}{s} C'(s) \quad C'(s) = \frac{7}{5} \cdot \frac{s+5}{s+7} \quad C'(0) = 1$$

$$C(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

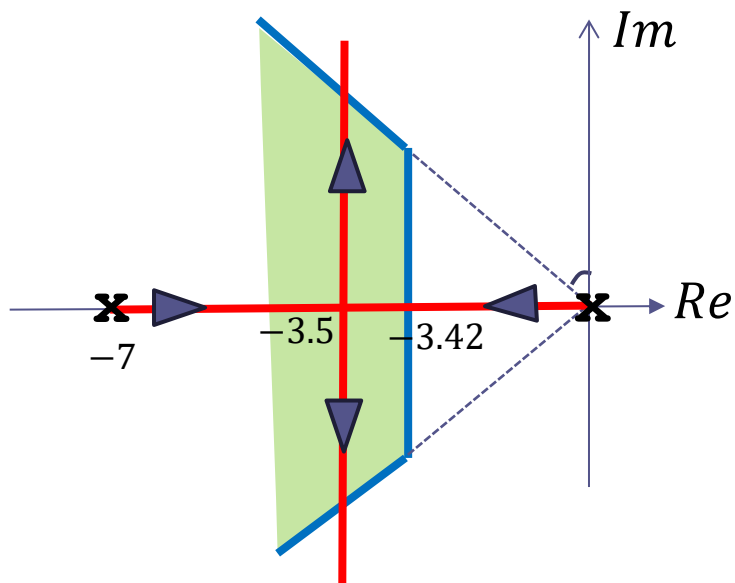
N.B. Avendo inserito nella $C'(s)$ il guadagno $7/5$ (per fare in modo che il guadagno statico generalizzato di $C(s)$ non sia alterato e continui ad essere pari a K_C) abbiamo garanzia che la specifica S_3 sarà soddisfatta se $K_C \geq 100$, così come precedentemente ricavato prima di inserire anche $C'(s)$.

$$C(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

$$P(s) = \frac{0.1}{(s+1)(s+5)}$$

$$L(s) = \frac{7}{5} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s} \cdot \frac{\cancel{s+5}}{s+7} \cdot \frac{0.1}{\cancel{(s+1)}\cancel{(s+5)}} = \frac{0.1 \cdot \frac{7}{5}}{s(s+7)}$$

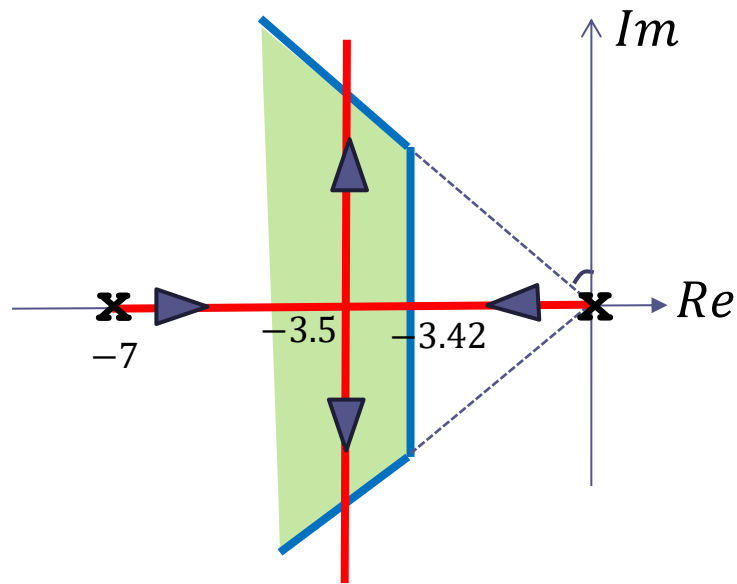
Doppia cancellazione
polo-zero



Il «nuovo» LdR, che coincide con quello desiderato, rende superflua l'analisi della stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo con il «nuovo» controllore

$$C(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

I due rami sono interamente contenuti nel semipiano sinistro quindi il sistema di controllo sarà asintoticamente stabile a ciclo chiuso per qualunque valore di K_C . Poiché le cancellazioni polo-zero fra controllore e processo avvengono nel semipiano sinistro è garantita anche la stabilità interna



Si deve verificare che in corrispondenza del minimo valore consentito per K_C , pari a 100, i poli si trovino all'interno della regione ammissibile, cioè che la loro parte reale sia minore o uguale a -3.42 ed il loro smorzamento (se fossero complessi coniugati) sia maggiore o uguale di 0.7.

Calcoliamo il polinomio caratteristico sommando fra loro il denominatore ed il numeratore di $C(s)P(s)$

$$C(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

$$P(s) = \frac{0.1}{(s+1)(s+5)}$$

$$C(s)P(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7} \frac{0.1}{(s+1)(s+5)} = \frac{K_C \cdot 0.1 \cdot \frac{7}{5}}{s(s+7)} = \frac{K_C \cdot 0.14}{s(s+7)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+7) + K_C \cdot 0.1 \cdot \frac{7}{5} = s^2 + 7s + 0.14K_C$$

Valutiamo il polinomio caratteristico per $K_C = 100$

$$P_{car}(s) = s^2 + 7s + 0.14K_C = s^2 + 7s + 14$$

Le radici del polinomio $s^2 + 7s + 14$ sono complesse coniugate perchè il Δ dell'equazione di secondo grado è negativo ($\Delta = 49 - 4 \cdot 14 = -7$)

Uguagliamo membro a membro il polinomio caratteristico con la forma standard del termine trinomio:

$$s^2 + 7s + 14 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 14$$

$$\omega_n = \sqrt{14} \approx 3.74$$

$$2\xi\omega_n = 7$$

$$\xi = \frac{7}{2\omega_n} \approx 0.93$$



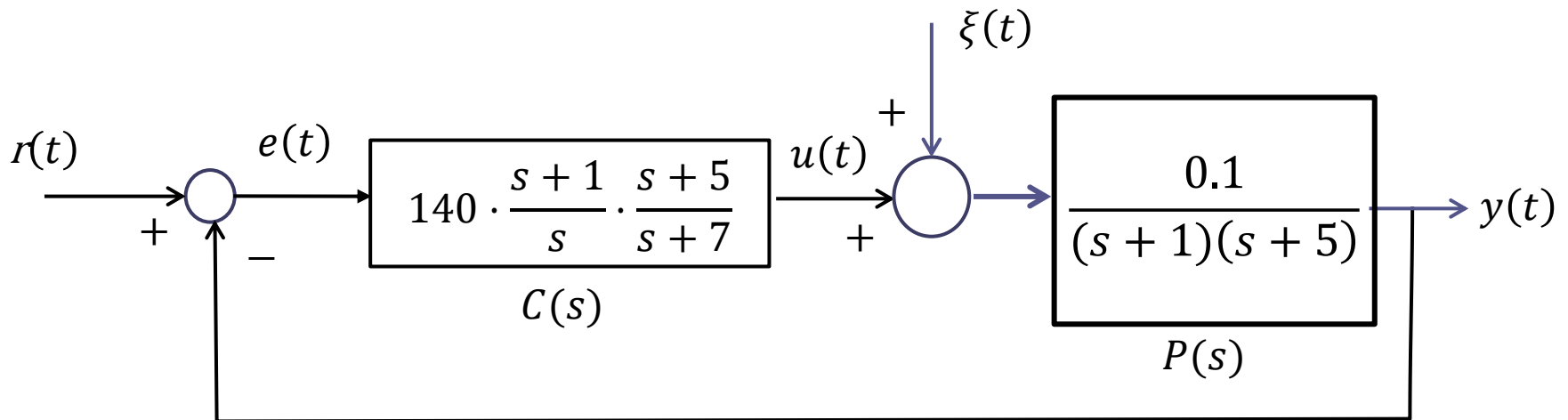
Altra procedura di calcolo: calcoliamo le radici del polinomio con la formula risolutiva dei polinomi di secondo grado (sappiamo già che solo complesse coniugate e che la loro parte reale è -3.5), e poi ricaviamo lo smorzamento in funzione della parte reale e immaginaria

$$p_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -3.5 \pm j 1.32 = a \pm jb$$

$$\xi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3.5}{\sqrt{(3.5)^2 + (1.32)^2}} \approx 0.93$$

Quindi il seguente regolatore risolve il problema di progetto

$$C(s) = 100 \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7} = 140 \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$



Poiché un **valore più elevato di K_C migliora le proprietà di precisione a regime** è lecito porsi il problema di determinare il massimo valore di K_C tale da garantire la permanenza dei poli all'interno della regione ammissibile. Sviluppiamo questo calcolo:

$$P_{car}(s) = s^2 + 7s + 0.14K_C = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 0.14K_C$$

$$\omega_n = \sqrt{0.14K_C} \approx 0.374\sqrt{K_C}$$

$$2\xi\omega_n = 7$$

$$\xi = \frac{7}{2\omega_n} = \frac{7}{2 \cdot 0.374\sqrt{K_C}} = \frac{9.35}{\sqrt{K_C}} \geq 0.7$$

$$\xi \geq 0.7 \quad \sqrt{K_C} \leq \frac{9.35}{0.7} = 13.36 \quad K_C \leq (13.36)^2 = 178.7$$

Abbiamo mostrato che la seguente **famiglia di regolatori** garantisce il soddisfacimento di tutte le specifiche del problema in esame

$$C(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

$$100 \leq K_C \leq 178.7$$



Sviluppiamo un ulteriore ragionamento:

Se la specifica S3 fosse stata maggiormente stringente, si sarebbe ottenuto un valore minimo per K_C più grande di 100 che avrebbe potuto pregiudicare la verifica sulla appartenenza dei poli a ciclo chiuso alla regione ammissibile.

Vediamo come si sarebbe potuto procedere.

Consideriamo un esercizio totalmente identico eccetto la specifica S3 che viene resa maggiormente stringente dimezzando l'errore a regime massimo tollerato

- **S3. Errore a regime per un set point $r(t) = 2t$ (rampa con pendenza pari a 2) non superiore a 0.5**

L'analisi della specifica S3 fornirebbe il seguente esito

$$E^* = \frac{100}{K_C} \leq 0.5 \quad \longrightarrow \quad K_C \geq 200$$

Valutiamo il polinomio caratteristico per $K_C = 200$

$$P_{car}(s) = s^2 + 7s + 0.14K_C = s^2 + 7s + 28$$

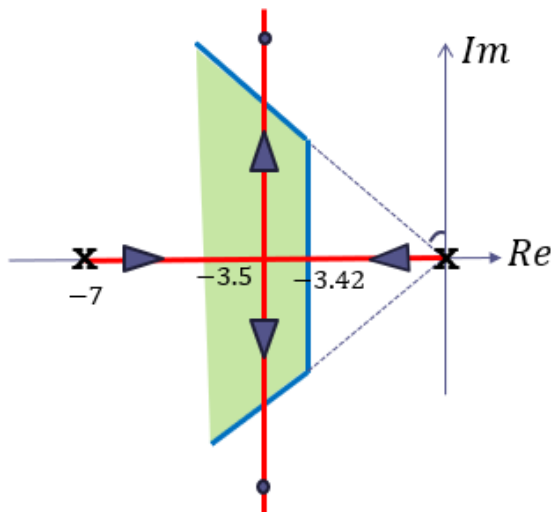
Le radici del polinomio $s^2 + 7s + 28$ sono complesse coniugate perchè il Δ dell'equazione di secondo grado è negativo ($\Delta = 49 - 4 \cdot 28 = -63$)

Seguiamo il medesimo procedimento adottato in precedenza: eguagliamo membro a membro il polinomio caratteristico con la forma standard del termine trinomio:

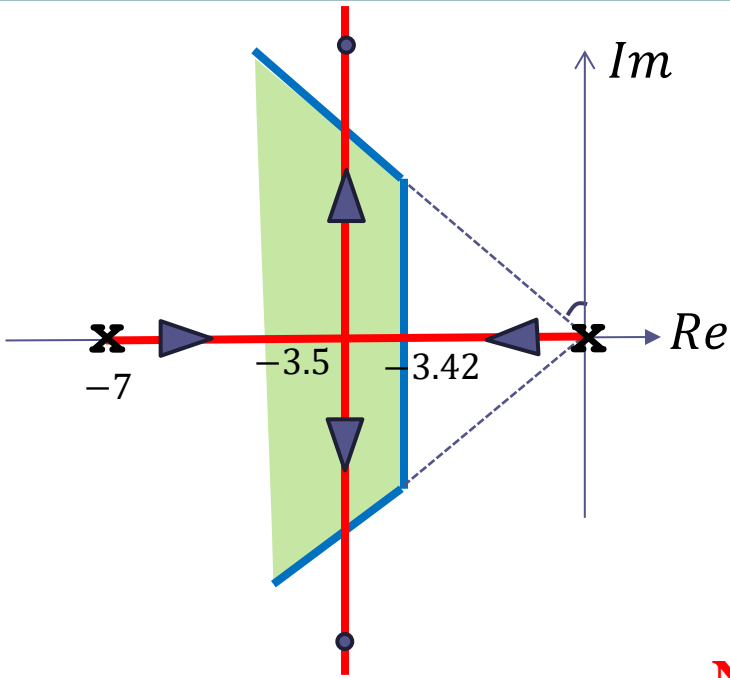
$$s^2 + 7s + 28 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 28 \quad \omega_n = \sqrt{28} \approx 5.29$$

$$2\xi\omega_n = 7 \quad \xi = \frac{7}{2\omega_n} \approx 0.66$$



Siamo andati «troppo in la» lungo i rami verticali del luogo delle radici, e i poli sono fuoriusciti dalla regione ammissibile. In realtà potevamo già predire questo risultato in quanto abbiamo calcolato poche slides fa come il massimo valore consentito per K_C tale da garantire la permanenza all'interno della regione ammissibile fosse pari a 178.7



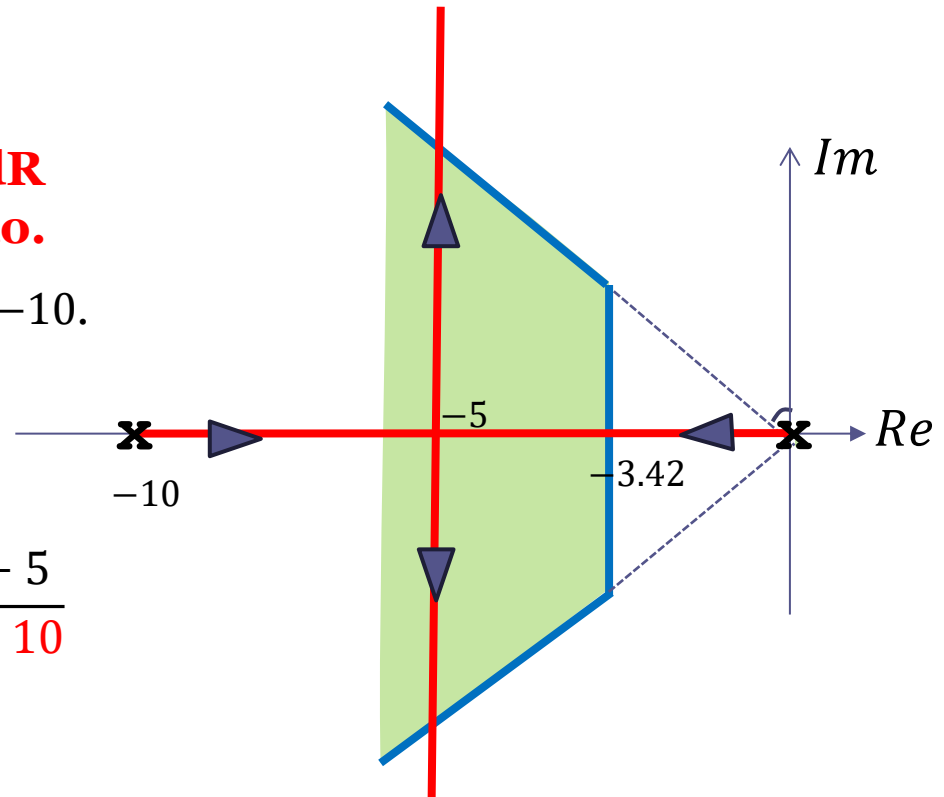
La soluzione è spostare ulteriormente a sinistra il polo in -7 in modo da avere più margine sulla traslazione verticale dei poli prima che si fuoriesca dalla regione ammissibile

Nuovo LdR desiderato.

Proviamo a collocare il polo del regolatore in -10 .
 Il nuovo punto doppio risulta collocato in -5 .
 Il regolatore deve pertanto essere modificato come segue:

$$C(s) = K_C \frac{s+1}{s} C'(s) \quad C'(s) = \frac{10}{5} \cdot \frac{s+5}{s+10}$$

$$C(s) = K_C \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+10}$$



Ora verifichiamo la collocazione dei poli a ciclo chiuso in corrispondenza del valore $K_C = 200$

Calcoliamo il polinomio caratteristico sommando fra loro il denominatore ed il numeratore di $C(s)P(s)$

$$C(s) = K_C \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+10} \quad P(s) = \frac{0.1}{(s+1)(s+5)}$$

$$C(s)P(s) = K_C \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+10} \cdot \frac{0.1}{(s+1)(s+5)} = \frac{K_C \cdot 0.1 \cdot \frac{10}{5}}{s(s+10)} = \frac{K_C \cdot 0.2}{s(s+10)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+10) + K_C \cdot 0.2 = s^2 + 10s + 0.2K_C$$

Valutiamo il polinomio caratteristico per $K_C = 200$

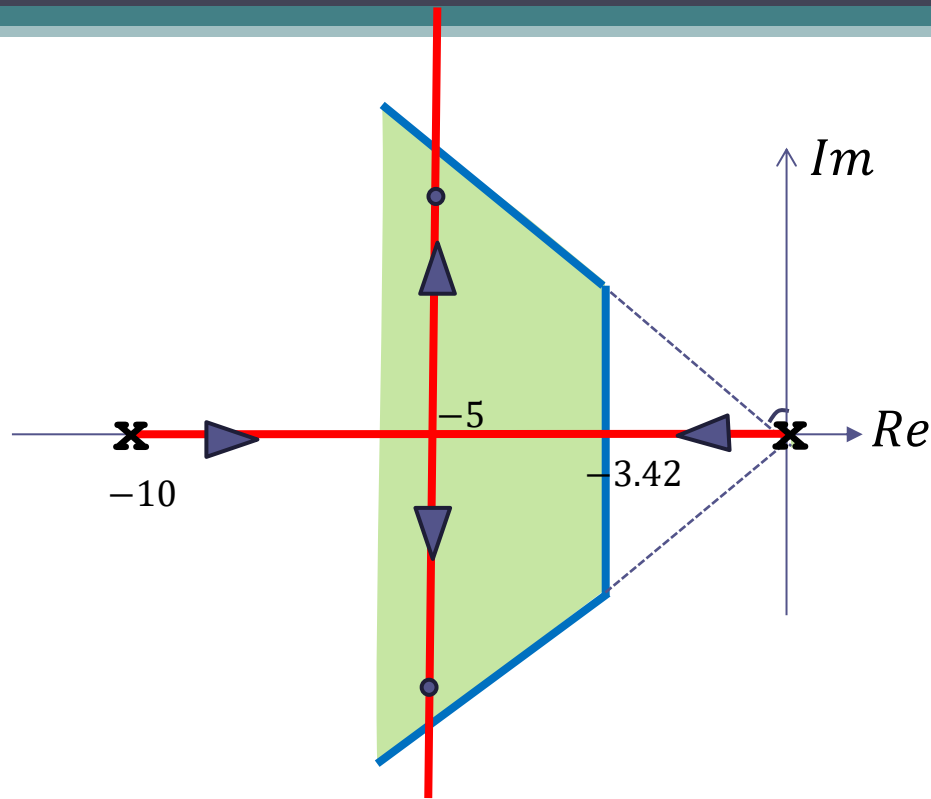
$$P_{car}(s) = s^2 + 10s + 0.2K_C = s^2 + 10s + 40$$

$$s^2 + 10s + 40 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 40 \quad \omega_n = \sqrt{40} \approx 6.32$$

$$2\xi\omega_n = 10 \quad \xi = \frac{10}{2\omega_n} \approx 0.79$$





In corrispondenza del valore $K_C = 200$ per il guadagno statico generalizzato del regolatore i poli a ciclo chiuso sono interni alla regione ammissibile

Quindi il seguente regolatore risolve l'esercizio di progetto in presenza di una specifica S_3 più stringente rispetto alla formulazione originaria

$$C(s) = 200 \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+10} = 400 \cdot \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+10)}$$

Determinare, come fatto in precedenza, la soglia massima per il guadagno K_C tale da garantire la permanenza nella regione ammissibile (cioè lo smorzamento ≥ 0.7)

(Soluzione: 263.53. passaggi nella slide successiva)

$$P_{car}(s) = s^2 + 10s + 0.2K_C$$

$$s^2 + 10s + 0.2K_C = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 0.2K_C$$

$$2\xi\omega_n = 10$$

$$\omega_n = \sqrt{0.2K_C} \approx 0.44\sqrt{K_C}$$

$$\xi = \frac{10}{2 \cdot 0.44\sqrt{K_C}} \approx \frac{11.36}{\sqrt{K_C}} \geq 0.7$$

$$\sqrt{K_C} \leq \frac{11.36}{0.7} = 16.23$$

$$K_C \leq (16.23)^2 = 263.53$$

Soglia massima per K_C ,
oltre la quale lo
smorzamento dei poli CC
diventa minore di 0.7

Pertanto, la seguente famiglia di controllori garantisce il soddisfacimento di tutte le specifiche del problema in esame, inclusa la specifica S3 più stringente:

$$C(s) = 2K_C \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+10}$$

$$200 \leq K_C \leq 263.53$$