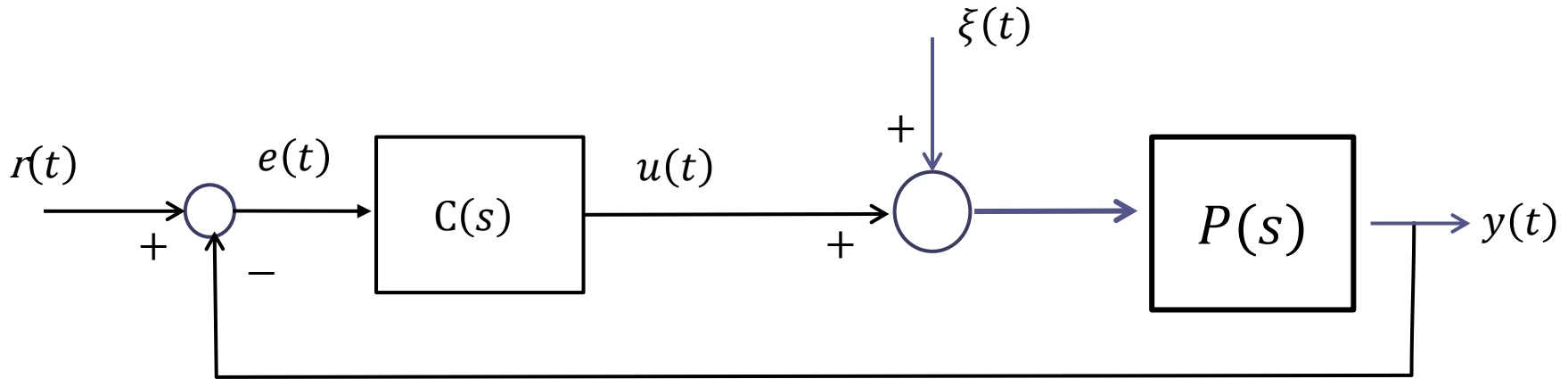


Controlli automatici

Comportamento a regime dei sistemi di controllo – parte 2

Prof. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Sistemi di controllo di tipo uno



Lo schema in retroazione in Figura viene detto di **tipo 1** se **nel regolatore, oppure nel processo, è presente un polo nell'origine**

I due scenari sono equivalenti per quanto concerne la risposta al set-point, ma conducono a **comportamenti differenti per quanto concerne la risposta al disturbo**, e pertanto in tale ambito verranno trattati separatamente.

Sistemi di controllo di tipo uno

Comportamento a regime in risposta ad un set-point costante $r(t) = R^*$
(con disturbo nullo)

In un sistema di controllo di tipo 1 sottoposto ad un set-point costante $r(t) = R^* = \text{cost.}$ vale, in assenza di disturbo ($\xi(t) = 0$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^*$$

Precisione statica

La formula sopraripotata vale unicamente nel caso in cui il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

Il valore di regime dell'uscita coincide con il valore del set-point costante indipendentemente dai guadagni di regolatore e processo.

Sistemi di controllo di tipo uno

Comportamento a regime in risposta ad un **disturbo costante** $\xi(t) = \Delta$

In un sistema di controllo di tipo 1 sottoposto ad un disturbo costante $\xi(t) = \Delta = \text{cost.}$ valgono, in assenza di set point, le seguenti proprietà:

Se il polo in $s = 0$ è contenuto nel regolatore si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Se invece il polo in $s = 0$ è contenuto nel processo si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{\Delta}{\mu_C}$$

in cui:

$$\mu_C = C(0)$$

Guadagno statico del controllore

Se il polo in $s = 0$ è contenuto nel regolatore, il sistema di controllo è in grado di operare la **reiezione completa a regime di un disturbo costante**. Il valore di regime dell'uscita dovuto alla sola presenza del disturbo è pari a zero indipendentemente dall'ampiezza Δ del disturbo e dai guadagni di regolatore e processo

Se invece il polo in $s = 0$ è contenuto nel processo, il disturbo altera il valore di regime dell'uscita. L'entità di tale effetto indesiderato dipende dal solo guadagno statico μ_C del regolatore.

Aumentando il guadagno del controllore la precisione a regime migliora.

Sistemi di controllo di tipo uno

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di **set-point costante di ampiezza R^*** e **disturbo costante di ampiezza Δ**

Il **principio di sovrapposizione degli effetti** ci consente di affermare che in un sistema di controllo di tipo uno soggetto **simultaneamente** ad un set point costante di ampiezza R^* e ad un disturbo costante di ampiezza Δ il valore di regime dell'uscita sarà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^*$$

Se il polo in $s = 0$ è contenuto nel regolatore

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* + \frac{\Delta}{\mu_C}$$

Se il polo in $s = 0$ è contenuto nel processo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^*$$

Se il polo in $s = 0$ è contenuto nel regolatore

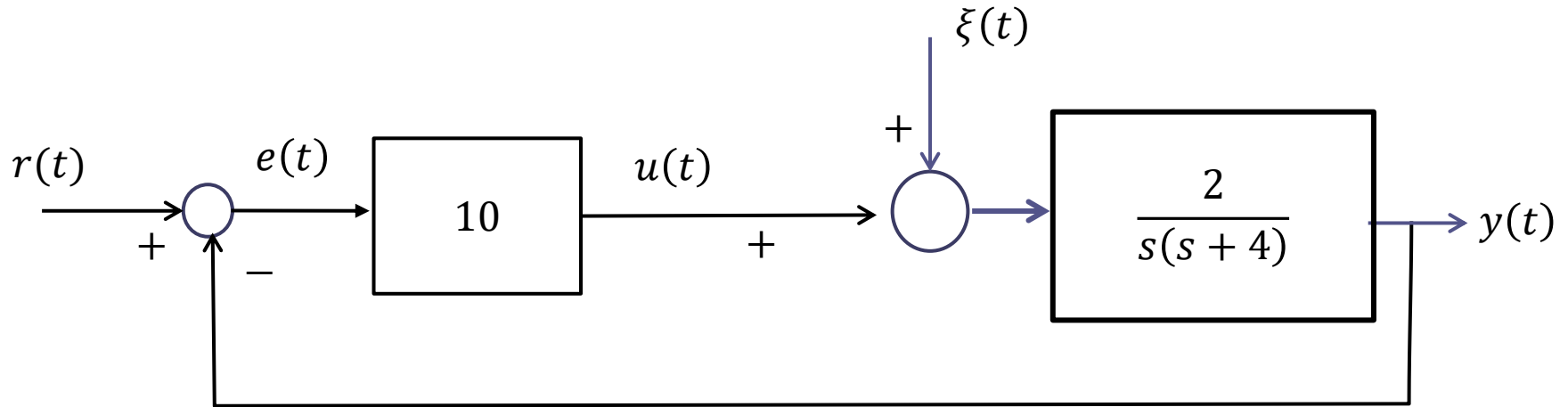
Tale relazione stabilisce una importante proprietà di **precisione statica robusta**

La relazione si conserva difatti indipendentemente dall'intervento di un disturbo costante di ampiezza sconosciuta, oltre che dai guadagni, e dalla struttura dinamica (poli e zeri), del regolatore e del processo

Essa è unicamente garantita dalla presenza del polo in $s = 0$ **nel regolatore** (e dalla **concomitante stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo**).

E' uno dei principali motivi della ampia diffusione dei regolatori PI.

Esempio



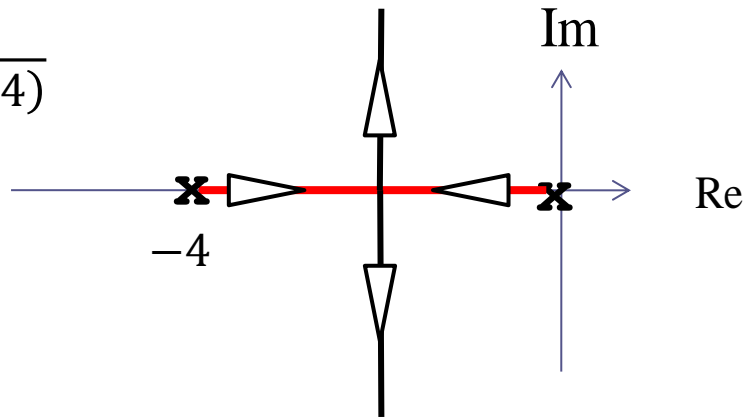
Dato il sistema di controllo in figura, valutare il comportamento di regime dell'uscita in presenza di un set point costante $r(t) = 5$ e di un disturbo costante $\xi(t) = 0.5$

Verifichiamo preliminarmente la **stabilità a ciclo chiuso** del sistema di controllo

$$p_{car} = s(s + 4) + 20 = s^2 + 4s + 20$$

OK (regola di cartesio)

$$L(s) = \frac{2}{s(s + 4)}$$



Il LdR rivela come il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso qualunque sia il valore del guadagno del controllore, e quindi (come mostrato sopra) lo sarà anche per $\mu_C = 10$

E' un sistema di controllo di **tipo 1** in cui **il polo nell'origine è contenuto nel processo**.

In base alle proprietà viste, la componente della uscita dovuta al set-point converge al valore del set point.

$$r(t) = 5$$

$$\xi(t) = 0$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = 5$$

Poiché il polo nell'origine è presente nel processo, la componente della uscita dovuta al disturbo converge al valore costante $\frac{\Delta}{\mu_C}$, in cui $\Delta = 0.5$ è l'ampiezza del disturbo e $\mu_C = 10$ è il guadagno statico del controllore

$$\begin{array}{l} r(t) = 0 \\ \xi(t) = 0.5 \end{array} \quad \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\xi}(t) = \frac{\Delta}{\mu_C} = 0.05$$

Complessivamente quindi, deduciamo sulla base del principio di sovrapposizione degli effetti che la variabile di uscita tenderà al valore 5.05

$$W_r^y(s) = \frac{\frac{20}{s(s+4)}}{1 + \frac{20}{s(s+4)}} = \frac{20}{s(s+4) + 20}$$

FdT a ciclo chiuso fra set-point e uscita

$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{2}{s(s+4)}}{1 + \frac{20}{s(s+4)}} = \frac{2}{s(s+4) + 20}$$

FdT a ciclo chiuso fra disturbo e uscita

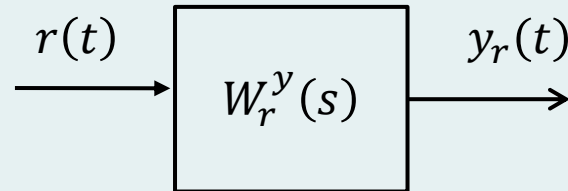
$$W_r^y(0) = 1 \quad W_\xi^y(0) = \frac{1}{\mu_c} = 0.1 \quad \text{Guadagni statici delle FdT a ciclo chiuso}$$

Poli a ciclo chiuso: $p_{1,2} = -2 \pm j4$

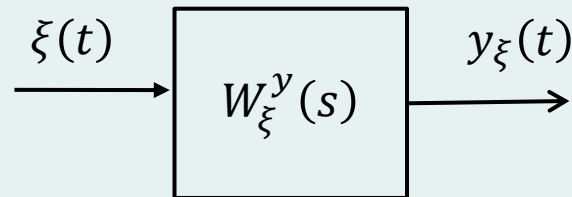
Smorzamento: $\xi = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0.44$

Puls. naturale: $\omega_n = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47 \text{ rad/sec}$

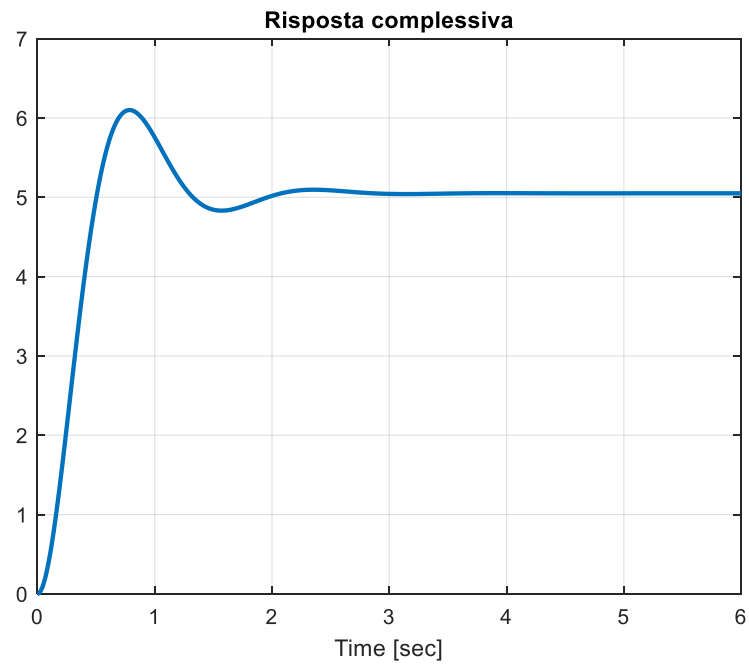
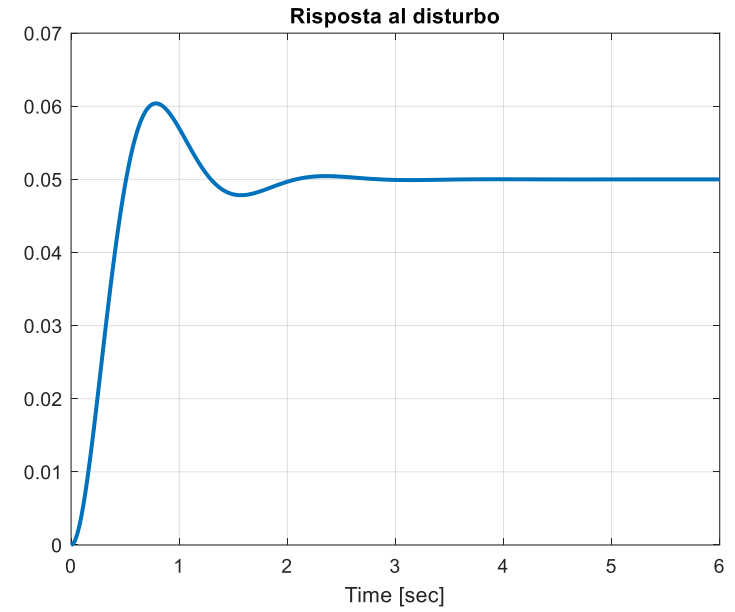
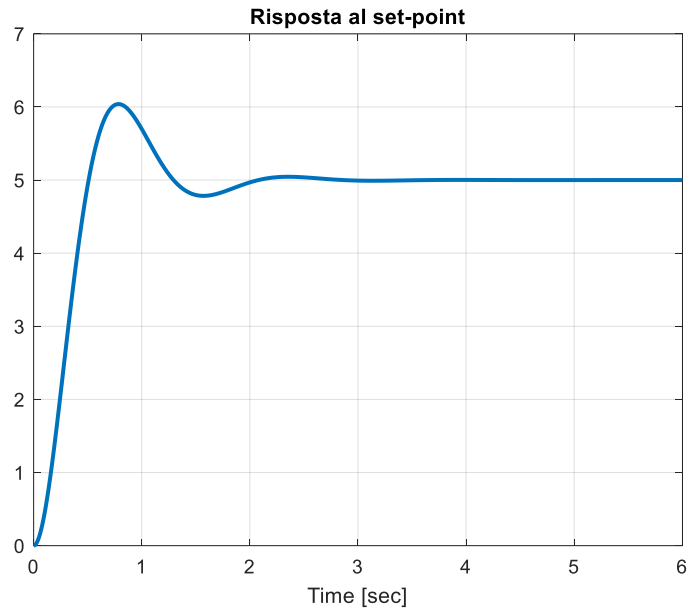
Le conclusioni tratte in merito al comportamento di regime dell'uscita potevano essere ricavate per via differente, senza ricorrere alle formule ma bensì applicando il T.F.R.G., che stabilisce come **il valore di regime della risposta al gradino di una FdT asintoticamente stabile sia pari al prodotto fra il suo guadagno statico e l'ampiezza del gradino in ingresso**



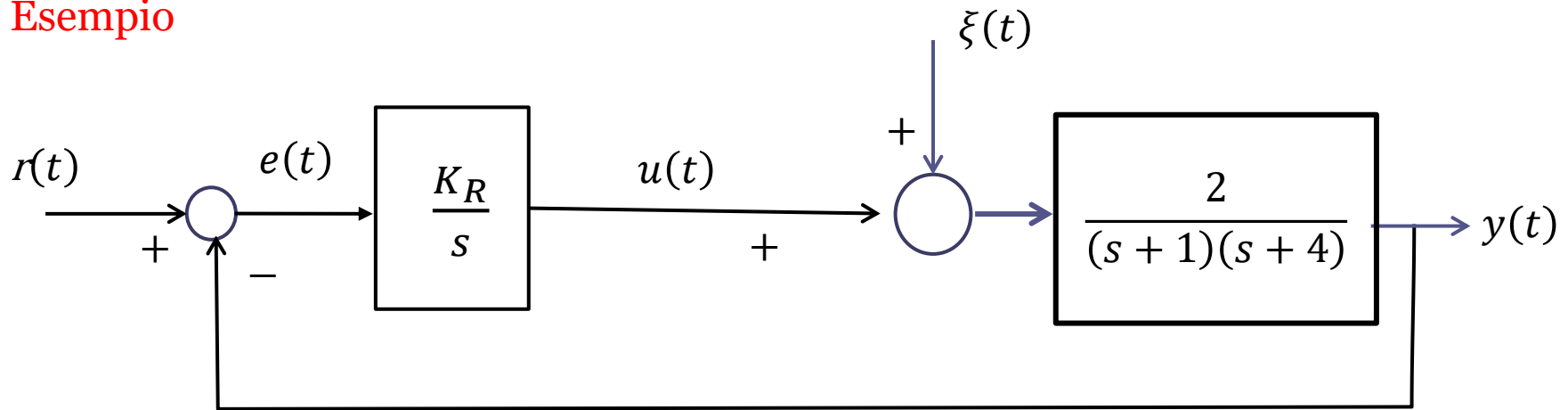
$$\begin{array}{l} r(t) = 5 \\ \xi(t) = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = 5 \cdot W_r^y(0) = 5$$



$$\begin{array}{l} r(t) = 0 \\ \xi(t) = 0.5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_\xi(t) = 0.5 \cdot W_\xi^y(0) = 0.05$$



Esempio

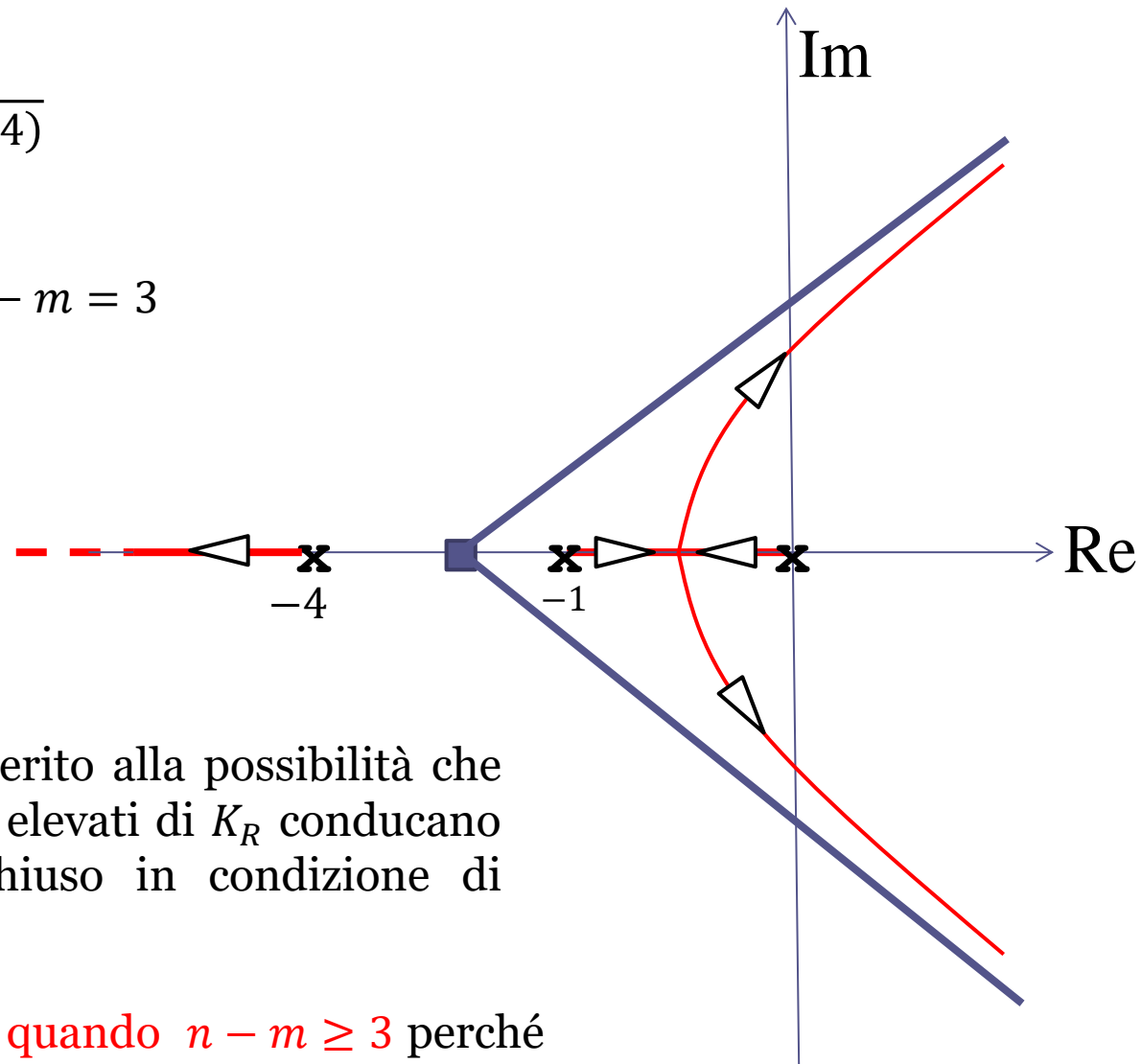


Dato il sistema di controllo in figura, valutare il comportamento di regime dell'uscita in presenza di un set point costante $r(t) = 2$ e di un disturbo costante $\xi(t) = 10$ in corrispondenza dei seguenti valori per il guadagno K_R :

$$K_R = 1 \quad K_R = 5 \quad K_R = 20.$$

$$L(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+4)}$$

$$x_s = -\frac{5}{3} \quad n - m = 3$$



Il LdR ci allerta in merito alla possibilità che valori eccessivamente elevati di K_R conducano il sistema a ciclo chiuso in condizione di instabilità.

Cio avviene **sempre** quando $n - m \geq 3$ perché una parte degli asintoti del LdR converge verso il semipiano destro.

Il polinomio caratteristico è:

$$P_{car}(s) = s(s+1)(s+4) + 2K_r = s^3 + 5s^2 + 4s + 2K_r$$

Ricordiamo il seguente risultato:

$P(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$ è un polinomio di Hurwitz (cioè ha tutte le radici a parte reale negativa) se e solo se:

1. Tutti i coefficienti hanno segno concorde
2. $a_1a_2 > a_3a_0$

Si ricava pertanto: $4 \cdot 5 > 2K_r$ $K_r < K_r^{cr} = 10$

Il polinomio caratteristico è un polinomio di Hurwitz se $K_R = 1$ e se $K_R = 5$, ma non più quando $K_R = 20$, valore del guadagno in corrispondenza del quale il sistema a ciclo chiuso è **instabile**.

Si avrà pertanto che la proprietà di **precisione statica robusta**, che stabilisce che il valore di regime dell'uscita coincide con l'ampiezza del set point costante anche in presenza di un disturbo costante di ampiezza qualunque:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$$

sarà **soddisfatta** quando $K_R = 1$ e $K_R = 5$, ma **non più** quando $K_R = 20$

Procediamo per altra via, senza impiegare la formula ma ricorrendo al T.F.R.G.

FdT a ciclo
chiuso e
relativi
guadagni
statici

$$W_r^y(s) = \frac{\frac{2K_R}{s(s+1)(s+4)}}{1 + \frac{2K_R}{s(s+1)(s+4)}} = \frac{2K_R}{s(s+1)(s+4) + 2K_R}$$

$$W_r^y(0) = 1$$

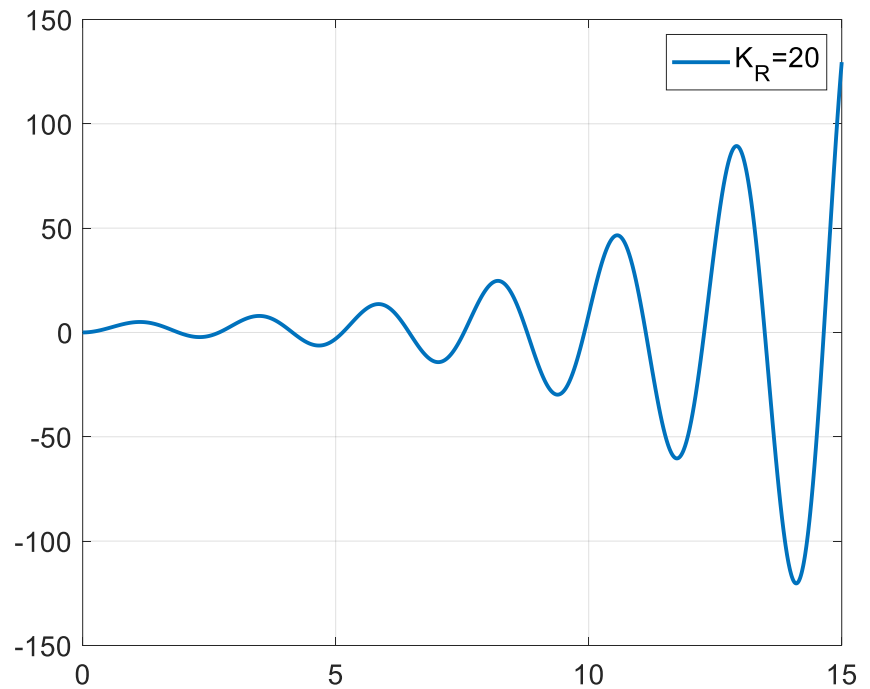
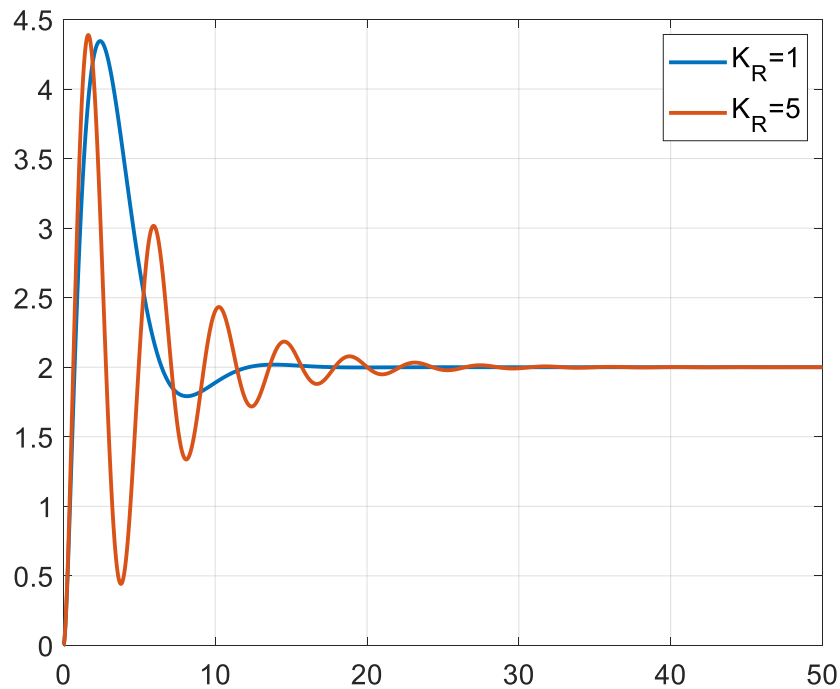
$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{2}{(s+1)(s+4)}}{1 + \frac{2K_R}{s(s+1)(s+4)}} = \frac{2s}{s(s+1)(s+4) + 2K_R}$$

$$W_\xi^y(0) = 0$$

T.F.R.G. $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2 \cdot W_r^y(0) + 10 \cdot W_\xi^y(0) = 2$

Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti

Risposte compressive



```
clc
s=tf('s');
Kr=1;
Wry=2*Kr/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);
Wdy=2*s/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);

[yr1,t1]=step(Wry,0:0.01:50);
[yd1,t1]=step(Wdy,0:0.01:50);

Kr=5;
Wry=2*Kr/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);
Wdy=2*s/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);

[yr5,t5]=step(Wry,0:0.01:50);
[yd5,t5]=step(Wdy,0:0.01:50);

figure
plot(t1,2*yr1+10*yd1,t5,2*yr5+10*yd5,'LineWidth',2),grid
legend('K_R=1','K_R=5','FontSize',15)
set(gca,'FontSize',15)

Kr=20;
Wry=2*Kr/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);
Wdy=2*s/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);

[yr20,t20]=step(Wry,0:0.01:15);
[yd20,t20]=step(Wdy,0:0.01:15);
figure
plot(t20,2*yr20+10*yd20,'LineWidth',2),grid
legend('K_R=20','FontSize',15)
set(gca,'FontSize',15)
```

Principio del modello interno (PMI)

Un principio di validità generale che caratterizza in maniera semplice e compatta il comportamento **a regime** dei sistemi di controllo per quanto concerne le proprietà di **inseguimento di un set-point non-vanishing** e di **reiezione dei disturbi «non-vanishing»** (cioè di set-point e segnali disturbanti che non tendano asintoticamente a zero)

Introduciamo una **terminologia**:

diremo che una Funzione di Trasferimento “**contiene il modello**” di un certo segnale $x(t)$ se fra i poli della FdT vi sono tutti i poli della Trasformata di Laplace $X(s)$ del segnale

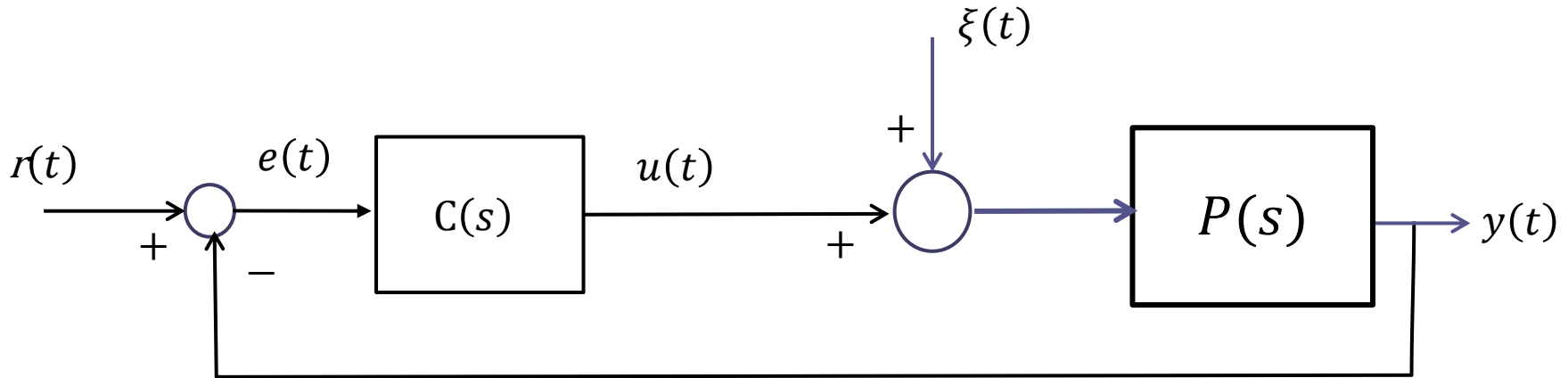
Esempi:

Una FdT “contiene il modello” di un segnale **costante** $x(t) = C = cost.$ se fra i suoi poli è presente almeno un polo in $s = 0$

Una FdT “contiene il modello” di un segnale **a rampa** $x(t) = C t$ ($C = cost$) se fra i suoi poli sono presenti almeno due poli in $s = 0$

Una FdT «contiene il modello» di un segnale **sinusoidale** $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$ se fra i suoi poli sono inclusi i due poli complessi coniugati e immaginari puri $\pm j \omega$. Deve quindi essere presente a denominatore il termine $s^2 + \omega^2$

I due seguenti enunciati si applicano al sistema in Figura nell'ipotesi che questo sia **asintoticamente stabile a ciclo chiuso**



Enunciato 1 (*inseguimento di un set-point non vanishing*).

L'uscita $y_r(t)$ ottenuta con un set-point $r(t)$ *non vanishing* qualunque (e con disturbo $\xi(t)$ nullo) converge asintoticamente al set-point **se e solo se** la **FdT a ciclo aperto** $C(s)P(s)$ contiene il modello del set-point

Enunciato 2 (*reiezione di disturbi non vanishing*).

L'uscita $y_\xi(t)$ ottenuta con un disturbo $\xi(t)$ *non vanishing* qualunque (e con set-point $r(t)$ nullo) converge a zero se e solo se la **FdT del regolatore** $C(s)$ contiene il modello del disturbo.

I due enunciati del PMI implicano, come caso particolare, alcune delle proprietà dimostrate o enunciate nelle sezioni precedenti

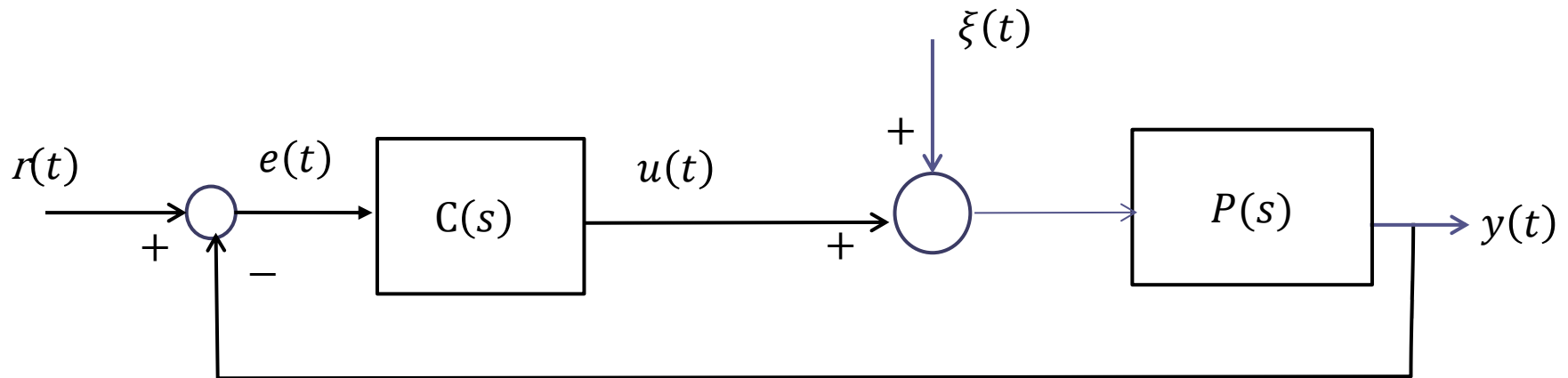
- la reiezione di un disturbo costante è garantita se e solo se il regolatore $C(s)$ contiene un polo in $s = 0$
- la precisione statica è garantita **se e solo se** il regolatore $C(s)$ oppure il processo $P(s)$ contiene un polo in $s = 0$ (in altri termini, se nella FdT a ciclo aperto $C(s)P(s)$ è presente almeno un polo nell'origine)

La capacità di «inseguire» asintoticamente un set-point a rampa (avere cioè l'uscita che tende asintoticamente a sovrapporsi alla rampa di set-point) è garantita se e solo se nella FdT a ciclo aperto $C(s)P(s)$ sono presenti almeno due poli in $s = 0$ (sistema di tipo 2)

E' errore frequente concludere che un certo sistema in retroazione possiede determinate proprietà di precisione a regime basandosi sulla sola presenza del necessario numero di poli nell'origine e trascurando di verificare la stabilità a ciclo chiuso. Tale omissione conduce a conclusioni del tutto errate circa il comportamento del sistema.

Sistemi di controllo di tipo due

Nell'ambito delle diverse possibili casistiche di sistemi di controllo di tipo due, analizziamo quella con maggior rilevanza pratica, che è quella in cui è presente **un polo nell'origine nel regolatore, ed un polo nell'origine nel processo**



Analizziamo il comportamento di regime del sistema di controllo in risposta a un set-point caratterizzato da una componente costante e da una componente a rampa

$$r(t) = R_0 + R_1 t$$

e un disturbo costante

$$\xi(t) = \Delta_0$$

Analizziamo separatamente il contributo delle 3 componenti

Componente costante del set-point

$$r(t) = R_0$$

PMI (1° enunciato)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R_0$$

Componente costante del disturbo

$$\xi(t) = \Delta_0$$

PMI (2° enunciato)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Se in un sistema di controllo di tipo 2 in cui il regolatore ed il processo hanno un polo nell'origine a testa intervengono simultaneamente un set point costante ed un disturbo costante il valore di regime dell'uscita coincide con il valore del set point (**precisione statica robusta**, come nei sistemi di tipo 1 con il polo nell'origine nel controllore)

Componente a rampa del set-point

$$r(t) = R_1 t$$

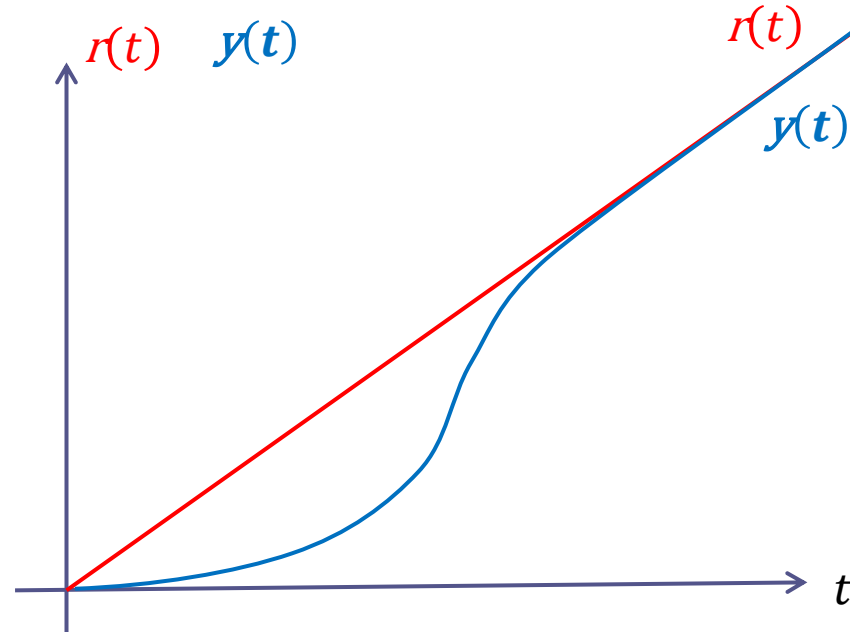
PMI (1° enunciato)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

In un sistema di controllo di tipo 2 un set point a rampa viene riprodotto a regime **senza alcun errore**

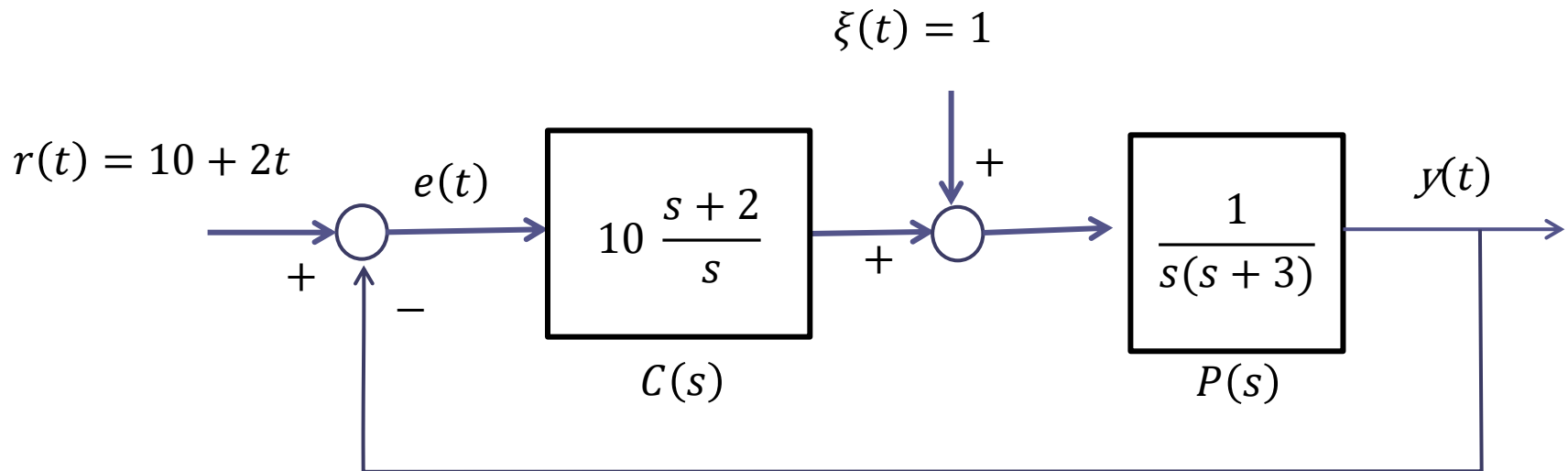
$$y_{regime}(t) = R_1 t$$

Evoluzioni **qualitative** del set-point $r(t)$ e dell'uscita $y(t)$



Esercizio

Analizzare l'evoluzione di regime della variabile di uscita nel seguente sistema di controllo



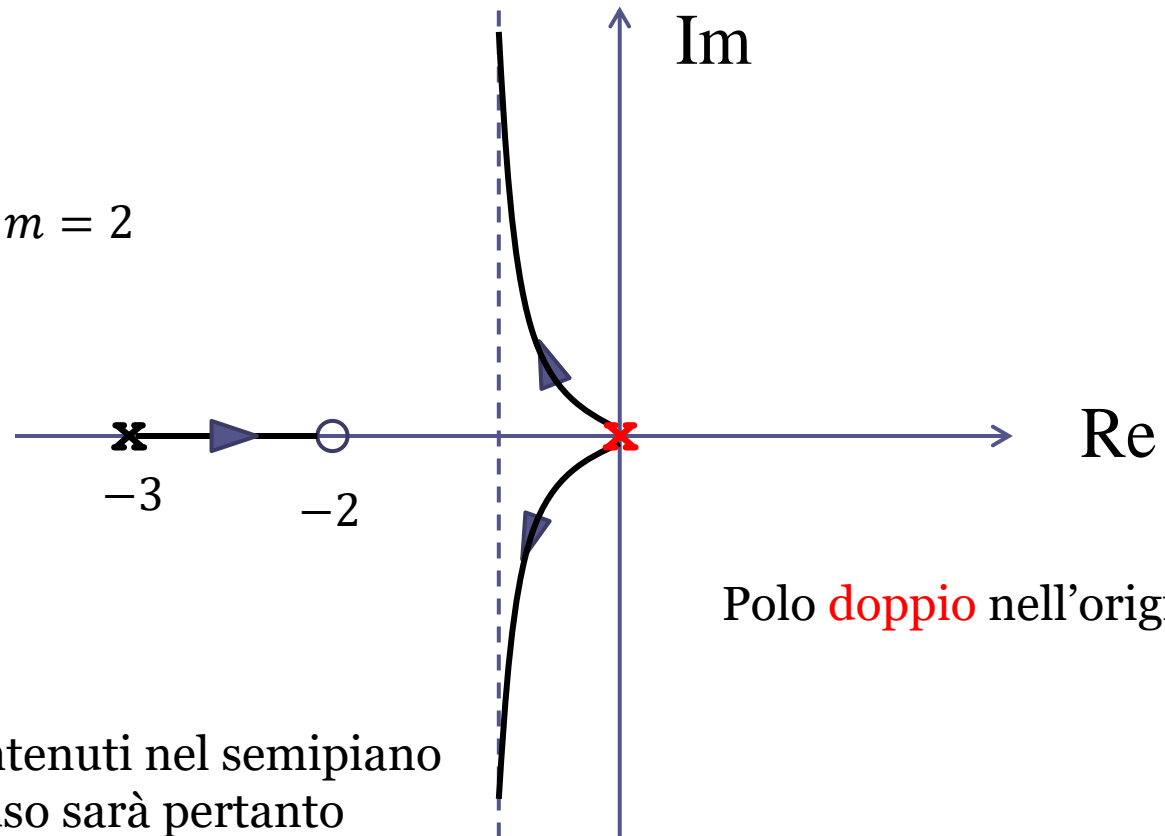
Il passo preliminare è **verificare la stabilità a ciclo chiuso**.

Tracciamo il LdR

$$L(s) = \frac{s + 2}{s^2(s + 3)}$$

$$x_s = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$n - m = 2$$



I 3 rami sono interamente contenuti nel semipiano sinistro. Il sistema a ciclo chiuso sarà pertanto asintoticamente stabile con un controllore del tipo $C(s) = k \frac{s+2}{s}$ per qualunque valore di k (e quindi anche per $k = 10$)

Altro modo per verificare la stabilità

$$P_{car}(s) = s^2(s + 3) + 10(s + 2) = s^3 + 3s^2 + 10s + 20$$

Trattandosi di un polinomio di terzo grado, per verificare se si tratti o meno di un polinomio di Hurwitz possiamo applicare la condizione sui coefficienti impiegata più volte in esempi precedenti

$$3 \cdot 10 > 20$$



In base ai due enunciati del principio del modello interno si avranno le seguenti evoluzioni a regime in risposta alle 3 componenti del set point e del disturbo:

$$r(t) = 10 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 10$$

$$\xi(t) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

$$r(t) = 2t \quad y_{regime}(t) = 2t$$

Ora ricaviamo i medesimi risultati prescindendo dalla applicazione dei due enunciati del P.M.I.

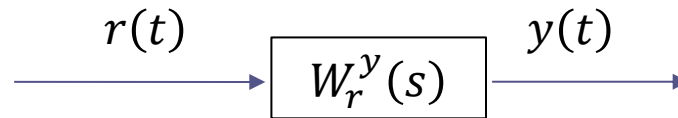
Utilizzeremo l'espressione delle FdT del sistema a ciclo chiuso. Calcoliamole e valutiamone il guadagno statico:

$$W_r^y(s) = \frac{10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}}{1 + 10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}} = \frac{10(s+2)}{s^2(s+3) + 10(s+2)} \quad W_r^y(0) = 1$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{1}{s(s+3)}}{1 + 10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}} = \frac{s}{s^2(s+3) + 10(s+2)} \quad W_\xi^y(0) = 0$$

$$W_r^e(s) = \frac{1}{1 + 10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}} = \frac{s^2(s+3)}{s^2(s+3) + 10(s+2)}$$

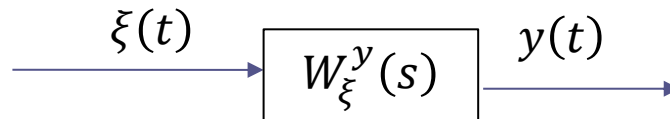
$$r(t) = 10$$



Poiché $W_r^y(s)$ è una FdT asintoticamente stabile, il valore di regime della risposta al gradino è costante e pari al prodotto fra l'ampiezza del gradino ingresso ed il guadagno statico $W_r^y(0)$ della FdT

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 10 \cdot W_r^y(0) = 10 \cdot 1 = 10$$

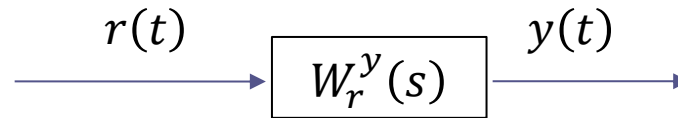
$$\xi(t) = 1$$



Poiché $W_\xi^y(s)$ è una FdT asintoticamente stabile, il valore di regime della risposta al gradino è costante e pari al prodotto fra l'ampiezza del gradino ingresso ed il guadagno statico $W_\xi^y(0)$ della FdT

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 \cdot W_\xi^y(0) = 1 \cdot 0 = 0$$

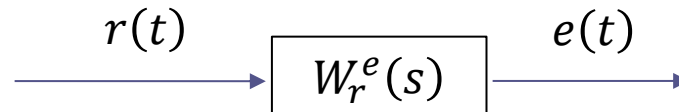
$$r(t) = 2t$$



Trasformata di Laplace dell'uscita:

$$Y(s) = W_r^y(s)R(s) = \frac{10(s+2)}{s^2(s+3)+10(s+2)} \cdot \frac{2}{s^2}$$

La $Y(s)$ **non soddisfa** l'ipotesi di applicabilità del Teorema del valore finale in quanto ha un polo doppio in $s = 0$. Quindi $y(t)$ non ammette un limite finito. Valutiamo se invece il segnale di errore tende ad un limite finito.



Trasformata di Laplace dell'errore:

$$E(s) = W_r^e(s)R(s) = \frac{s^2(s+3)}{s^2(s+3)+10(s+2)} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{2(s+3)}{s^2(s+3)+10(s+2)}$$

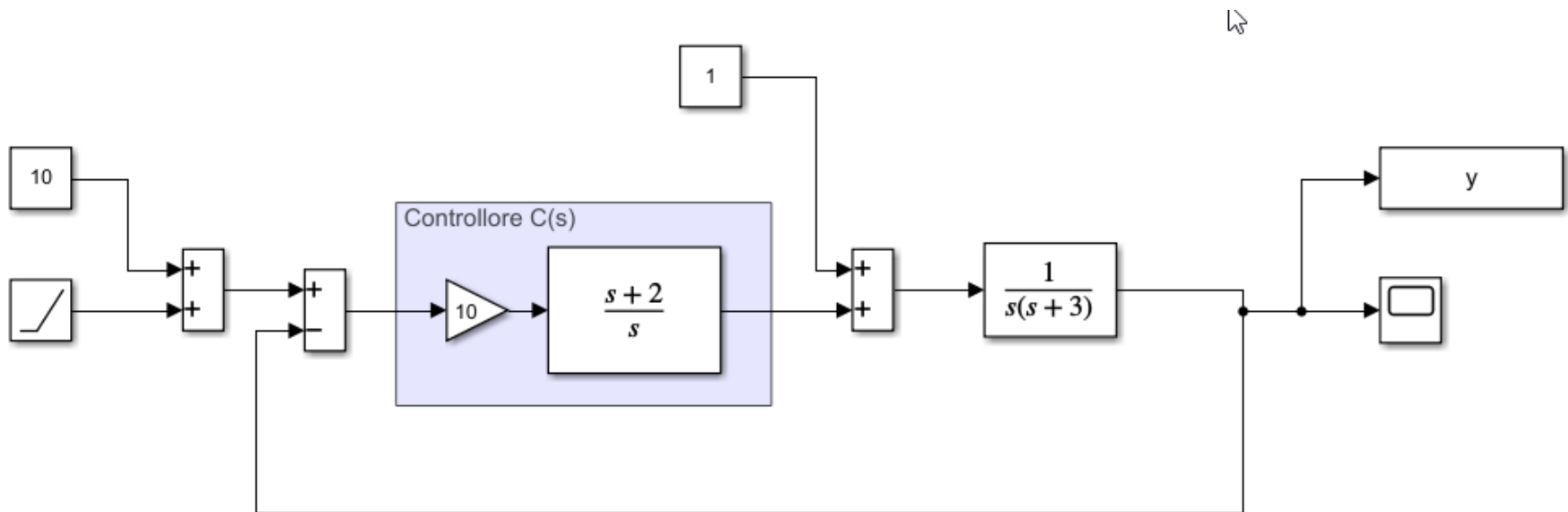
$E(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa. Il valore di regime del segnale di errore è pertanto pari a zero (v. slides trasformata di Laplace)

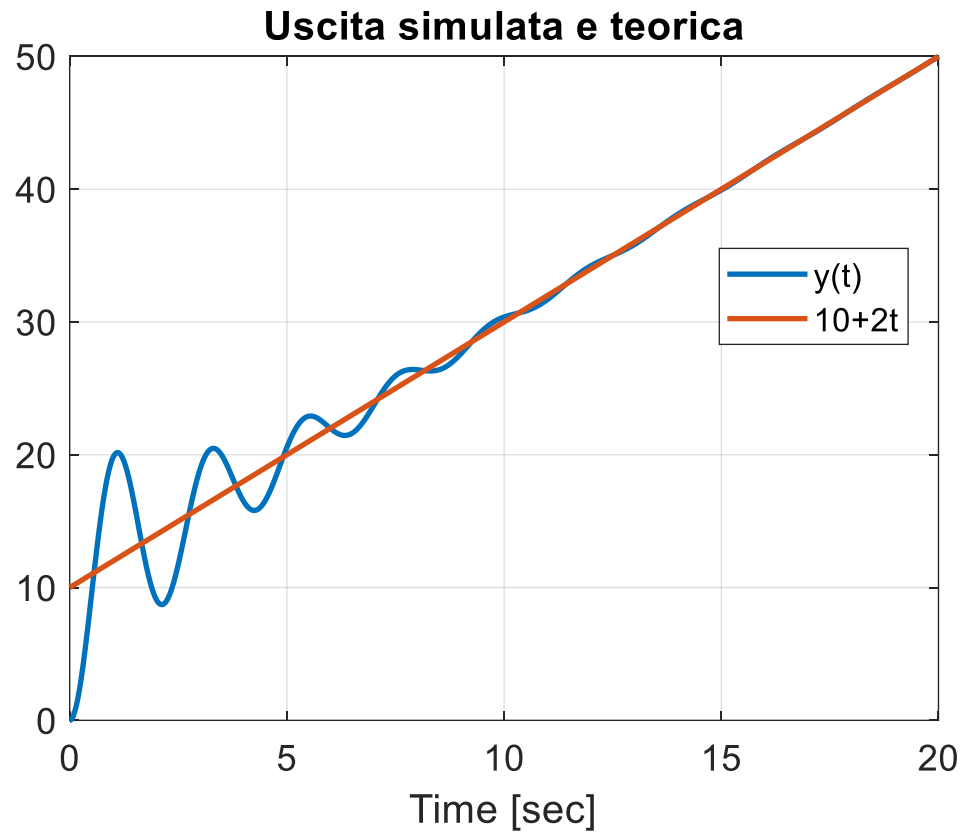
Se il segnale di errore tende asintoticamente a zero ne consegue che $y_{regime}(t) = 2t$

Complessivamente, l'evoluzione di regime dell'uscita nel sistema di controllo oggetto del presente esempio sarà pertanto **sovrapposta a quella del set point**

$$y_{regime}(t) = 10 + 2t$$

Verifichiamo mediante simulazione dinamica i risultati ottenuti



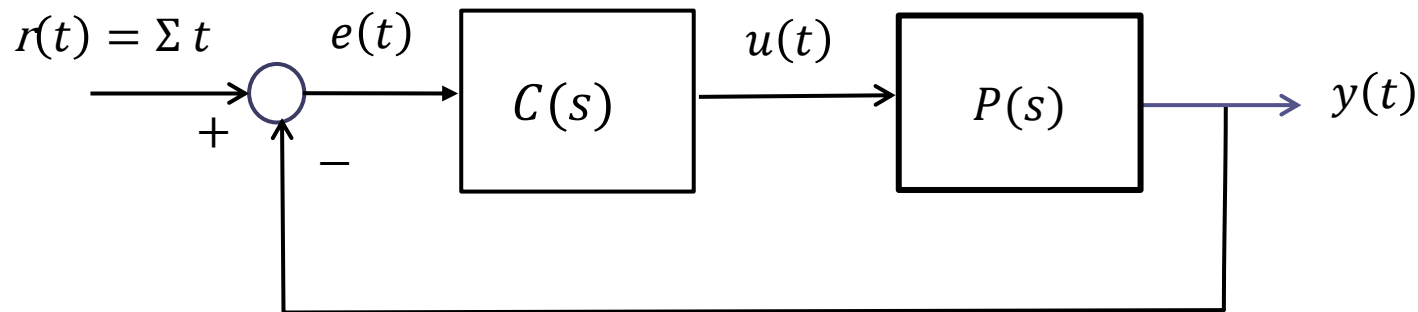


Sistemi di controllo di tipo 1 con **set-point a rampa**

Consideriamo il comportamento di regime di un sistema di controllo di **tipo uno** soggetto ad un **set-point a rampa**

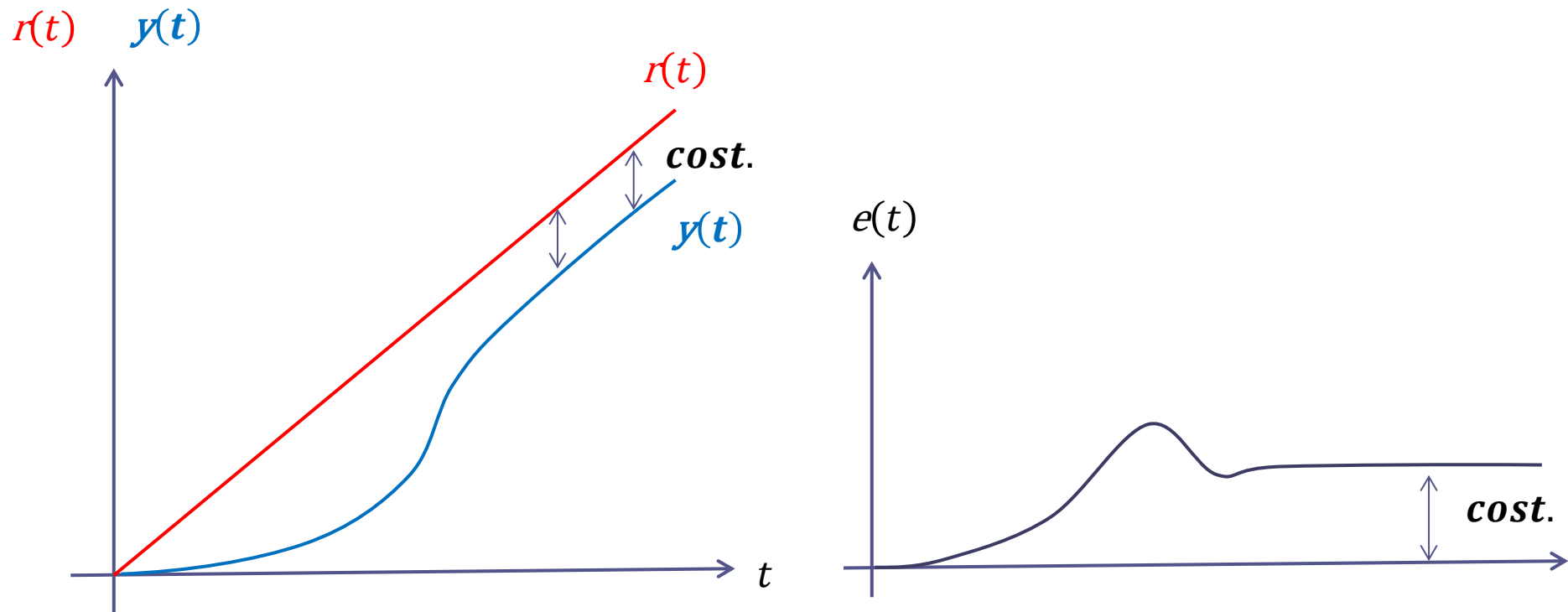
$$r(t) = \Sigma t$$

in assenza di **disturbo**



L'uscita del sistema a ciclo chiuso tenderà a divergere per t che tende ad infinito, poiché anche il set-point tende a divergere. Quindi, per l'analisi del comportamento a regime **non possiamo applicare il teorema del valore finale all'uscita.**

Evoluzioni **qualitative** del set-point $r(t)$, uscita $y(t)$, ed errore $e(t) = r(t) - y(t)$



Si dimostra che **il segnale di errore tende asintoticamente ad un valore costante**

Sistemi di controllo di tipo uno con set-point a rampa

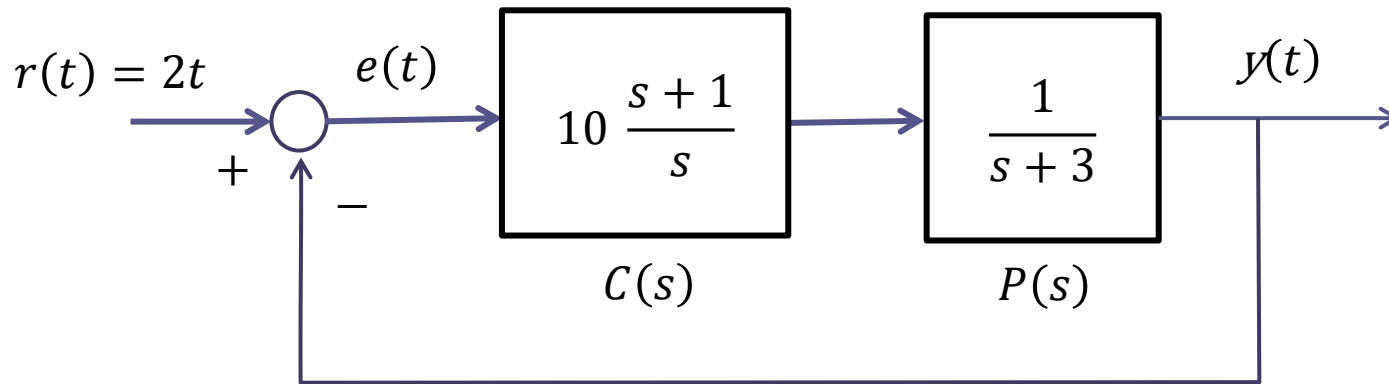
Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **set-point a rampa** $r(t) = \Sigma t$ (e disturbo nullo).

Si dimostra che **il segnale di errore** $e(t) = r(t) - y(t)$ **tende asintoticamente ad un valore costante** E^*

Tale proprietà implica che **l'evoluzione di regime dell'uscita** (espressa in funzione del set point e dell'errore come segue: $y(t) = r(t) - e(t)$) coincide con il set-point a meno di una differenza costante

$$y^{regime}(t) = r(t) - E^* = \Sigma t - E^*$$

Mostriamo la correttezza della relazione fornita nell'ambito di un caso concreto



Verifichiamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso.

$$P_{car}(s) = s(s+3) + 10(s+1) = s^2 + 13s + 10$$

Un polinomio di secondo grado avente tutti i coefficienti positivi ha tutte le radici a parte reale negativa, quindi il sistema di controllo è as. stabile a ciclo chiuso

Mostriamo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = E^* = cost$$

Applichiamo il teorema del valore finale al segnale di errore $e(t)$

$$\begin{aligned} W_r^e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} & \quad \longrightarrow \quad E(s) = W_r^e(s)R(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} \cdot R(s) \\ & = \frac{1}{1 + 10 \frac{s+1}{s} \frac{1}{s+3}} \cdot R(s) \\ & = \frac{s(s+3)}{s(s+3) + 10(s+1)} \cdot R(s) \\ & = \frac{s(s+3)}{s(s+3) + 10(s+1)} \cdot \frac{2}{s^2} \\ & = \frac{2(s+3)}{s(s+3) + 10(s+1)} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$E(s) = \frac{2(s+3)}{s(s+3) + 10(s+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

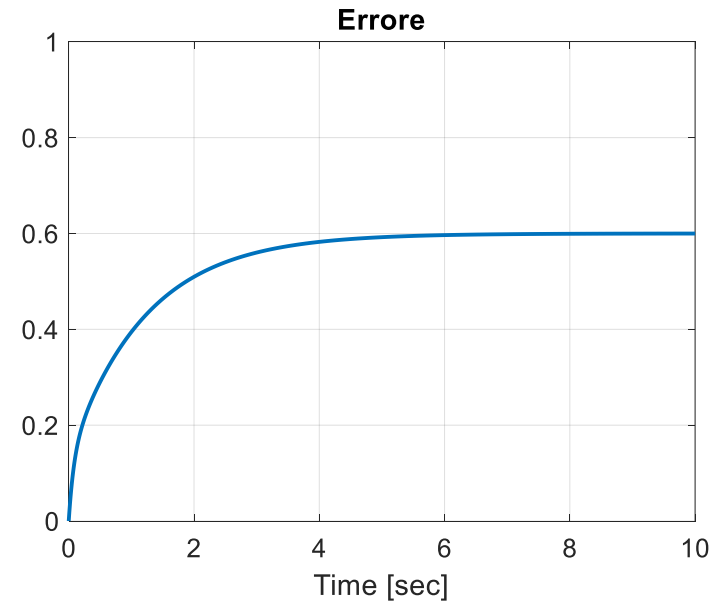
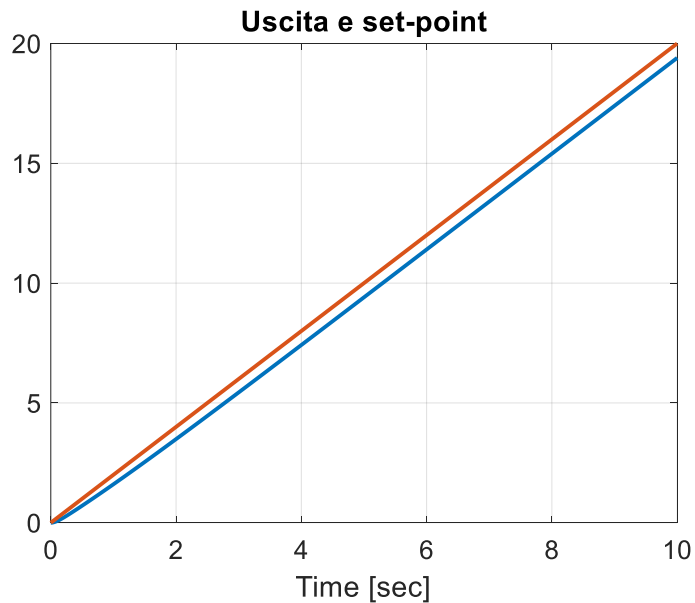
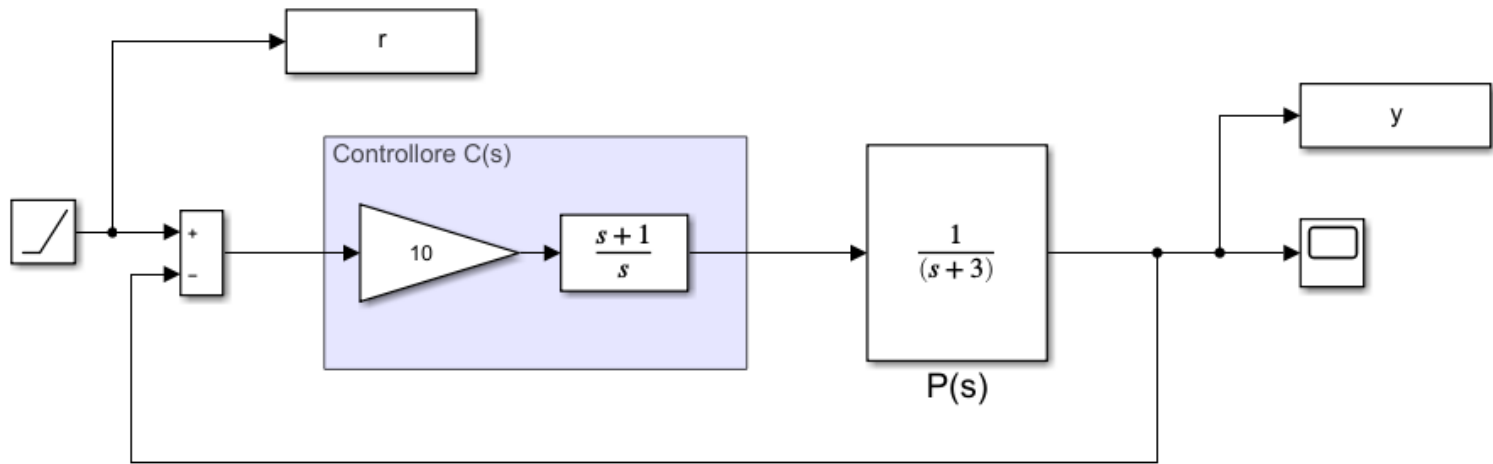
$E(s)$ ha come poli le radici del polinomio caratteristico $s(s+3) + 10(s+1)$, che abbiamo visto essere a parte reale negativa, più un polo semplice in $s = 0$.

E' quindi soddisfatta l'ipotesi di applicabilità del teorema del valore finale, che garantisce che la sequenza $e(t)$ converge verso un valore finito, e che tale valore è

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = [sE(s)]_{s=0} = \left[\frac{2(s+3)}{s(s+3) + 10(s+1)} \right]_{s=0} = \frac{6}{10} = 0.6$$

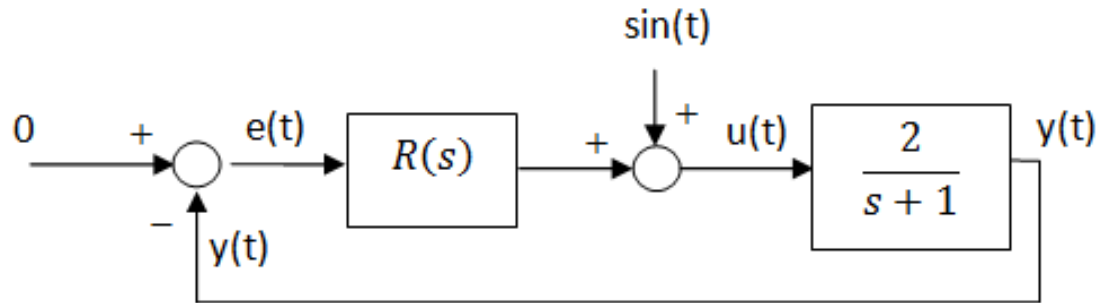
$$y^{regime}(t) = r(t) - E^* = 2t - 0.6$$

Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti



Esercizio

Si consideri il sistema di controllo in retroazione in Figura, con un processo del primo ordine asintoticamente stabile ed un disturbo sinusoidale



Progettare il regolatore $R(s)$ in modo da garantire la **reiezione asintotica del disturbo**.

Applicando il principio del modello interno concludiamo come i regolatori $R(s)$ che soddisfano la specifica (reiezione asintotica del disturbo) sono **tutti e soli** i regolatori $R(s)$ aventi una **coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \pm j$** e **tali, nel contempo, da garantire la stabilità a ciclo chiuso del sistema in retroazione**

Ricerchiamo pertanto un regolatore nella forma

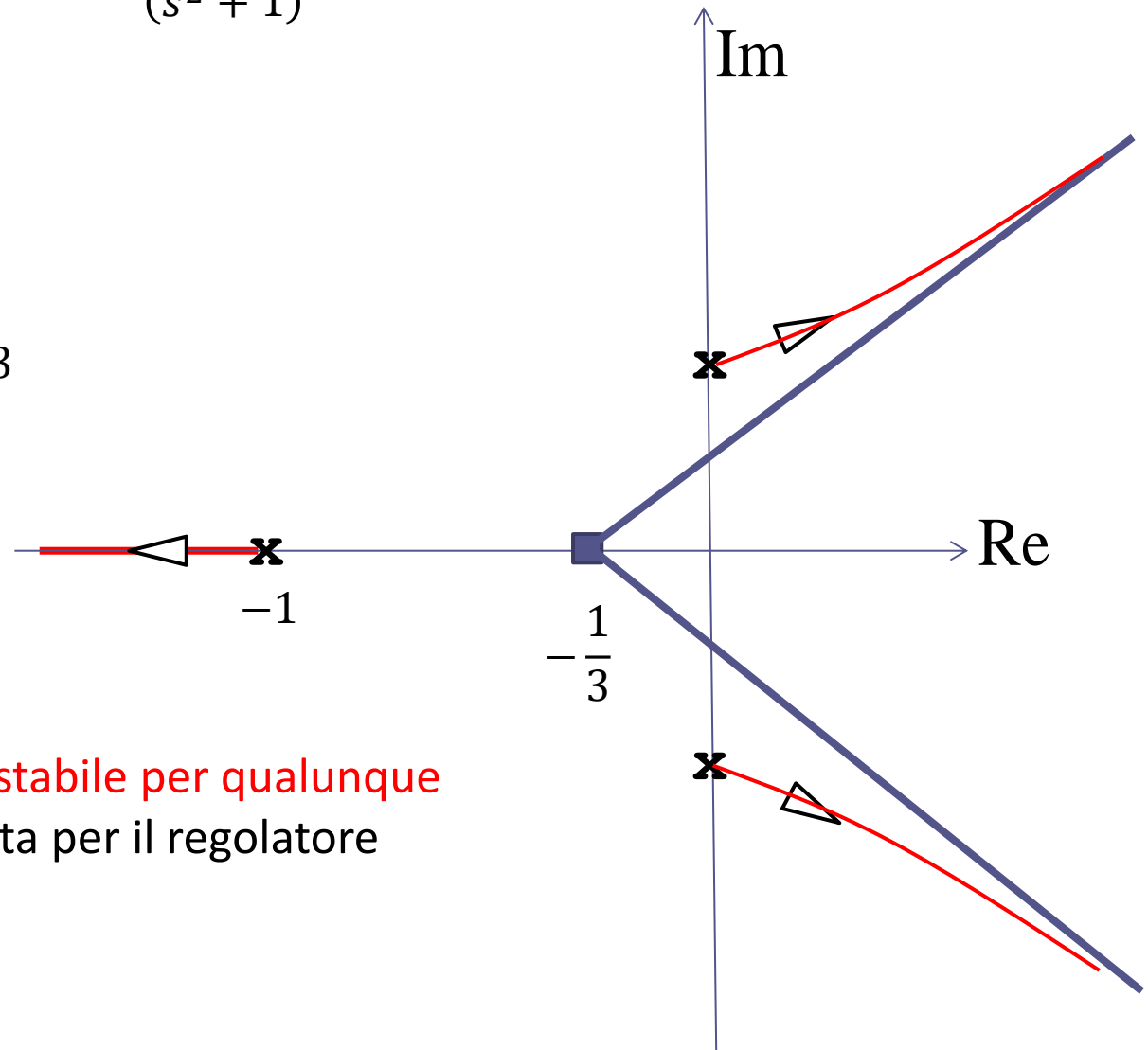
$$R(s) = \frac{N(s)}{D_1(s)(s^2 + 1)}$$

Scelta più semplice: $R(s) = \frac{k_R}{(s^2 + 1)}$

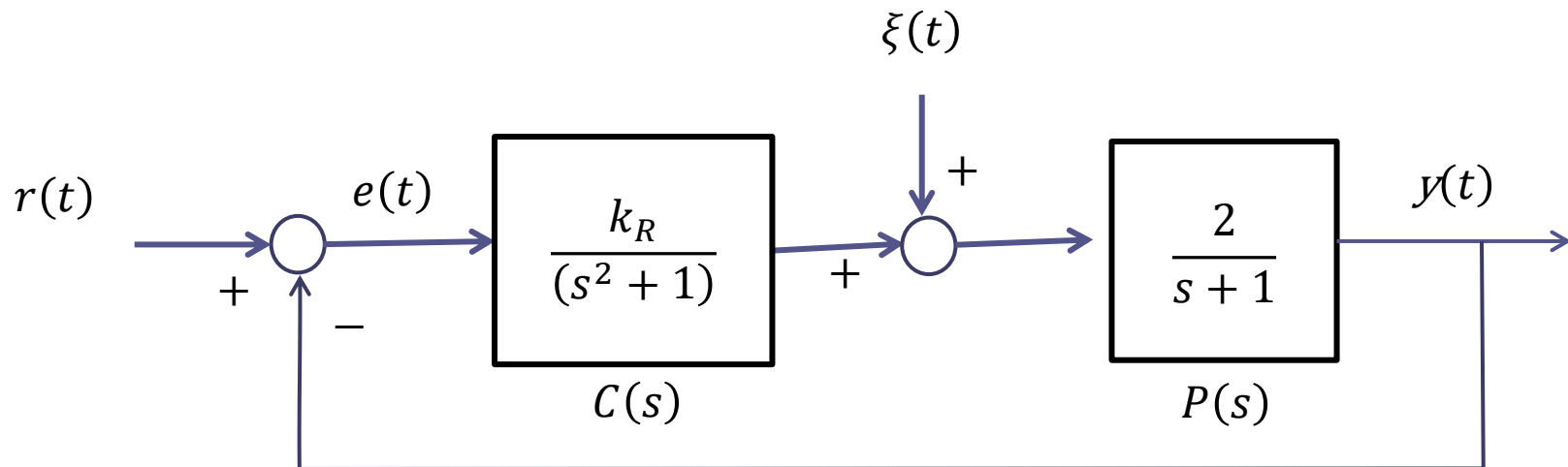
Tracciamo il LdR

$$L(s) = \frac{2}{(s + 1)(s^2 + 1)}$$

$$x_s = -\frac{1}{3} \quad n - m = 3$$



Sistema in retroazione **instabile per qualunque valore di k_R** . Questa scelta per il regolatore non va pertanto bene.



Procediamo per via polinomiale per dedurre il medesimo risultato

$$P_{car}(s) = (s + 1)(s^2 + 1) + 2k_R = s^3 + s^2 + s + 1 + 2k_R$$

Trattandosi di un polinomio di terzo grado, per verificare se si tratti o meno di un polinomio di Hurwitz possiamo applicare la condizione sui coefficienti impiegata più volte in esempi precedenti

$$1 \cdot 1 > 1 + 2k_R$$



Aggiungiamo uno zero nel regolatore, sovrapponendolo, come prima scelta di tentativo, al polo del processo

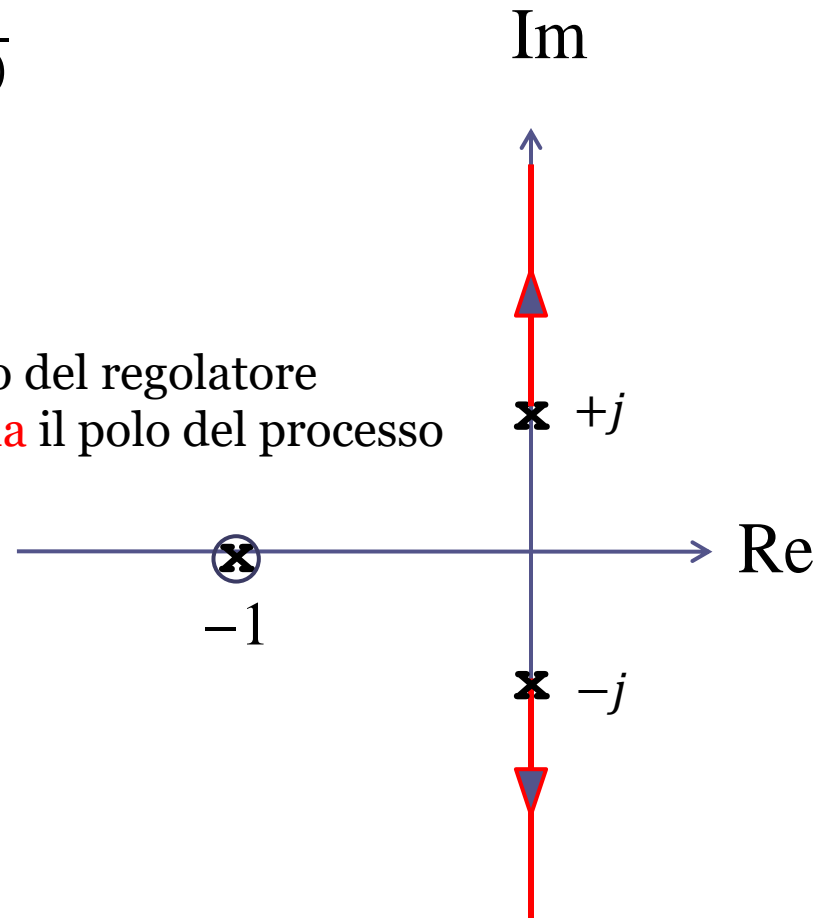
$$R(s) = \frac{k_R(1+s)}{(s^2+1)}$$

$$L(s) = \frac{(1+s)}{(s^2+1)} \cdot \frac{2}{s+1} = \frac{2}{(s^2+1)}$$

$$x_s = 0 \quad n - m = 2$$

I poli a ciclo chiuso sono immaginari puri per qualunque valore di k_R . Questa scelta per il regolatore non va pertanto bene.

Lo zero del regolatore **cancella** il polo del processo



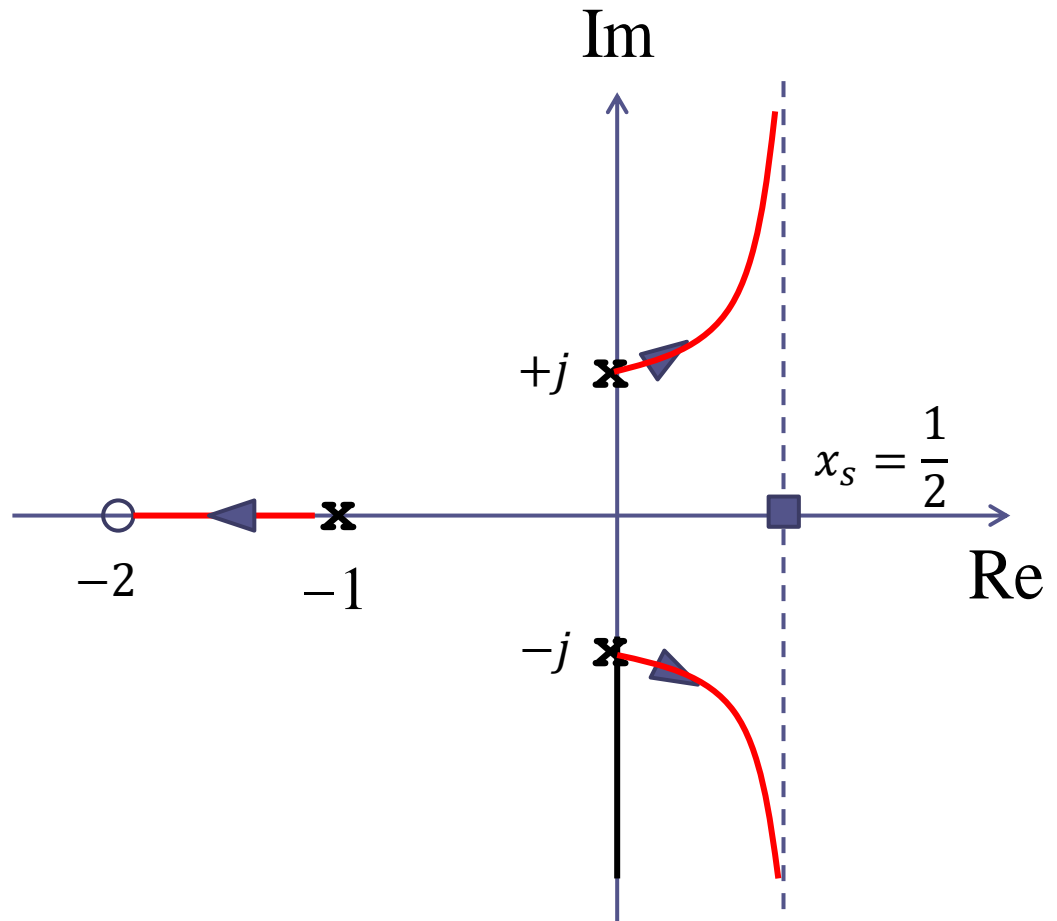
Spostiamo lo zero, posizionandolo più in **alta** frequenza rispetto al polo del processo

$$R(s) = \frac{k_R(1 + 0.5s)}{(s^2 + 1)}$$

$$L(s) = \frac{2(1 + 0.5s)}{(s^2 + 1)(s + 1)}$$

$$x_s = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$$

Sistema in retroazione instabile per qualunque valore di k_R .
Questa scelta per il regolatore non va pertanto bene.



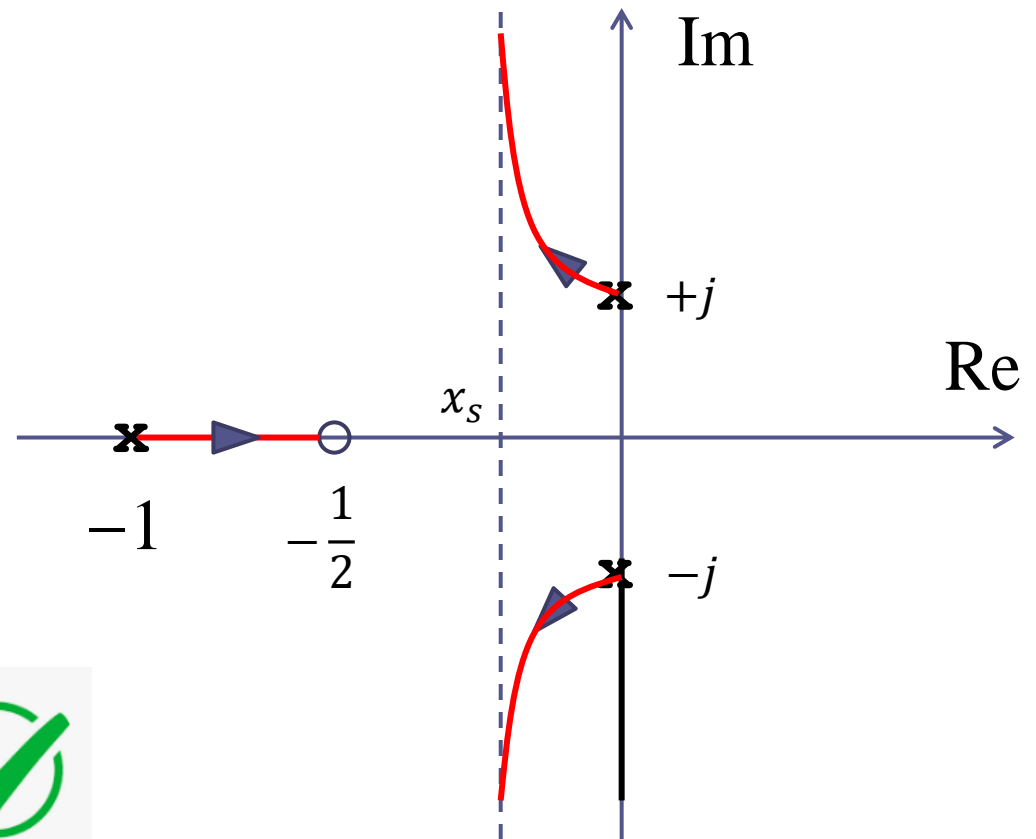
Tentiamo con l'alternativa non ancora esplorata, cioè collocare lo zero del regolatore più in **bassa** frequenza rispetto al polo del processo

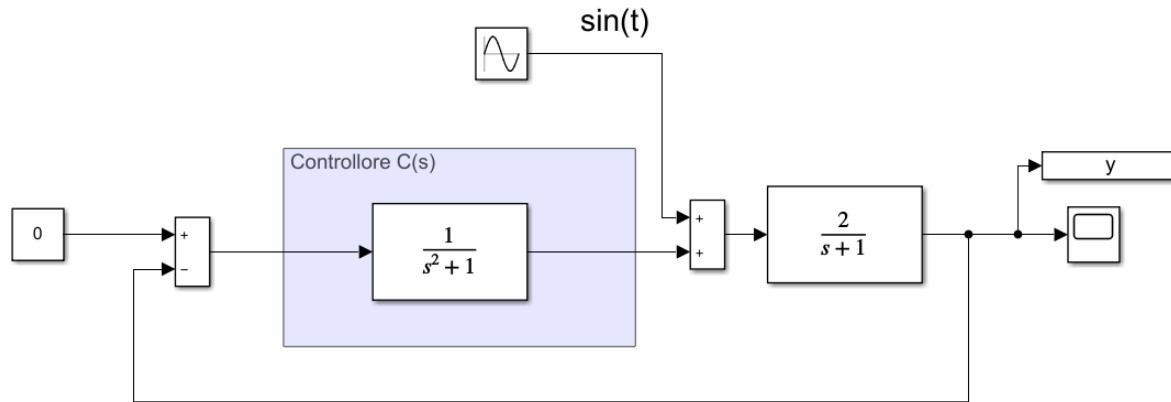
$$R(s) = \frac{k_R(1 + 2s)}{(s^2 + 1)}$$

$$L(s) = \frac{2(1 + 2s)}{(s^2 + 1)(s + 1)}$$

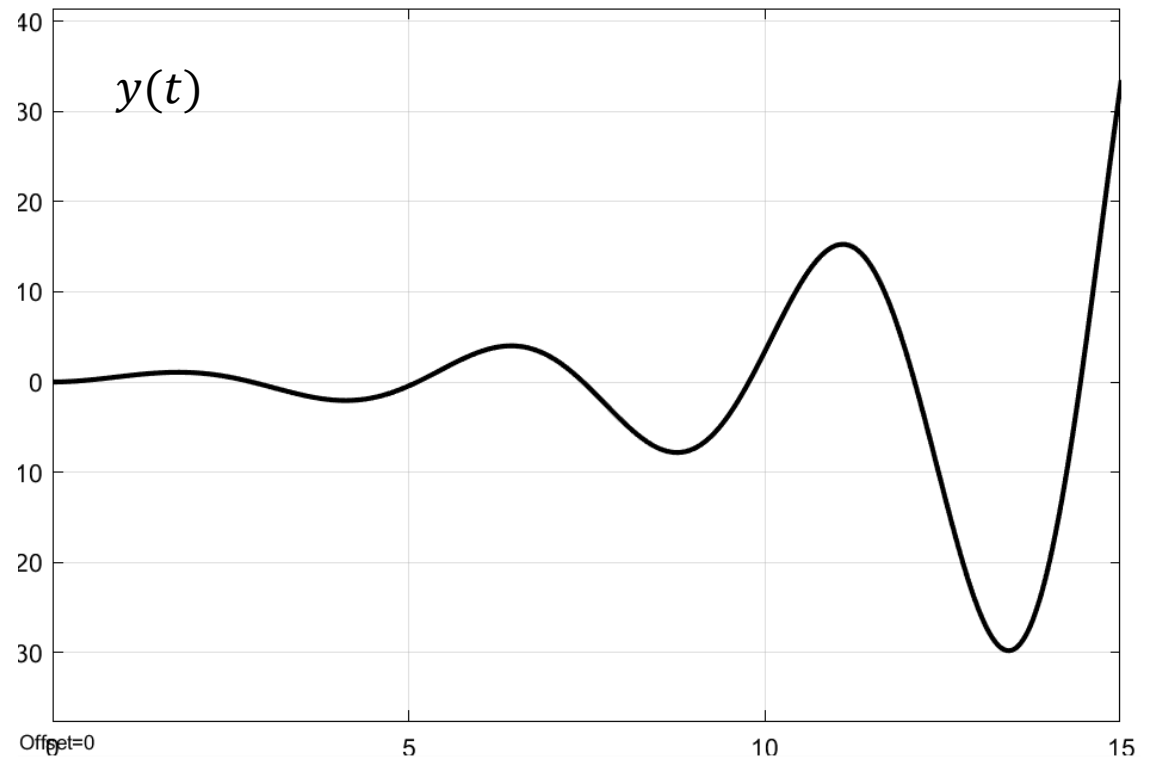
$$x_s = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

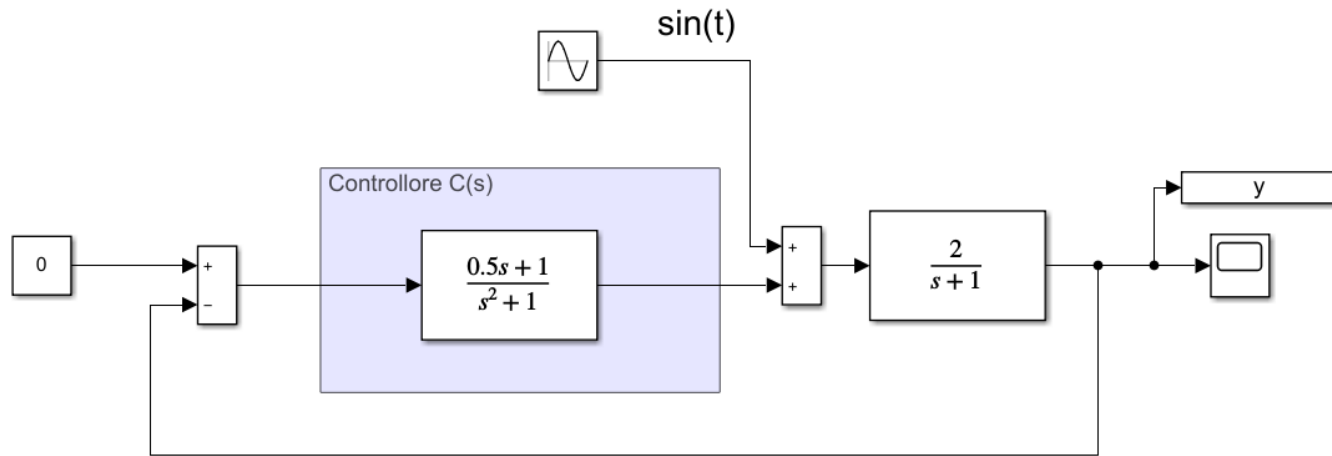
Ora il sistema a ciclo chiuso risulta essere asintoticamente stabile per qualunque valore di k_R . Questa scelta per il regolatore risolve pertanto il problema.





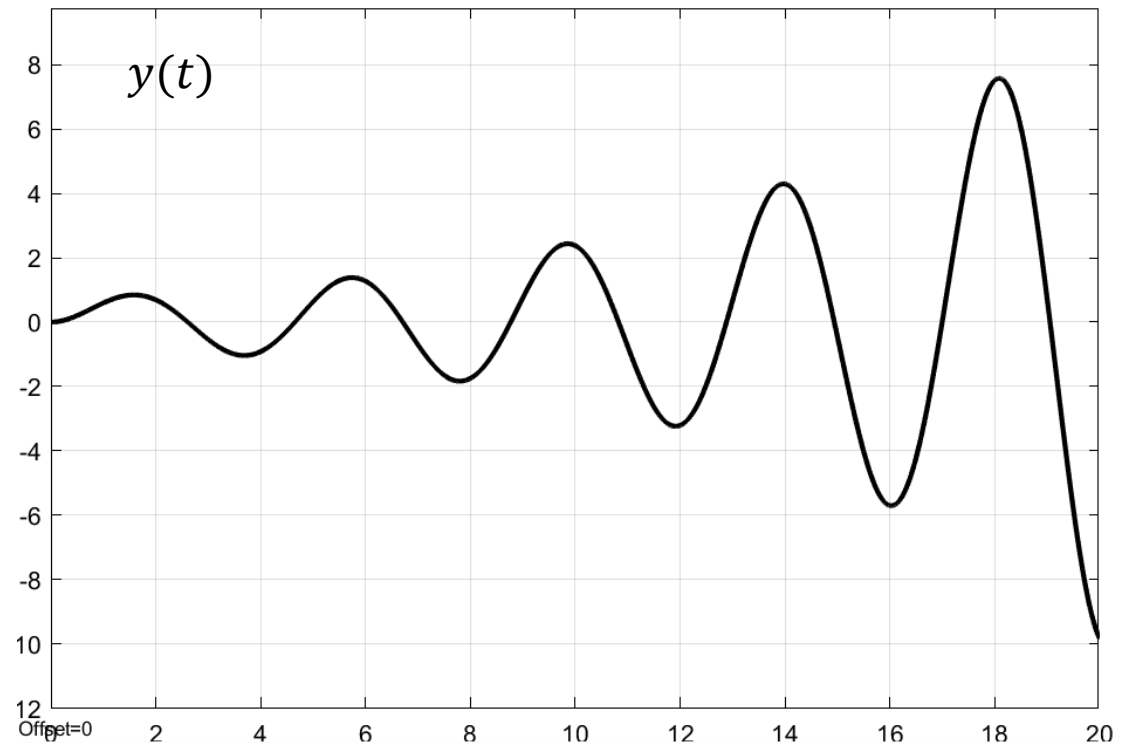
$$R_1(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)}$$

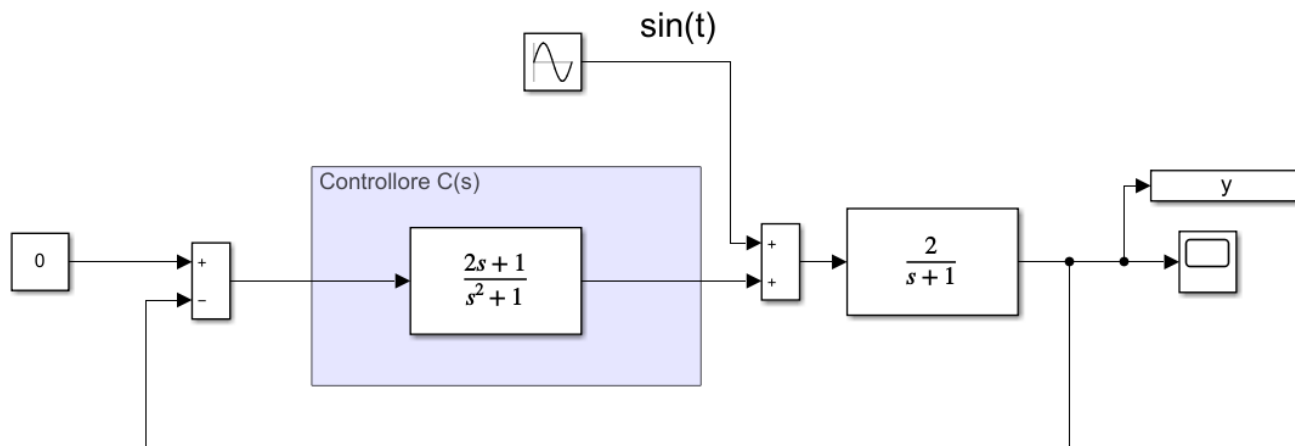




$$R_2(s) = \frac{0.5s + 1}{(s^2 + 1)}$$

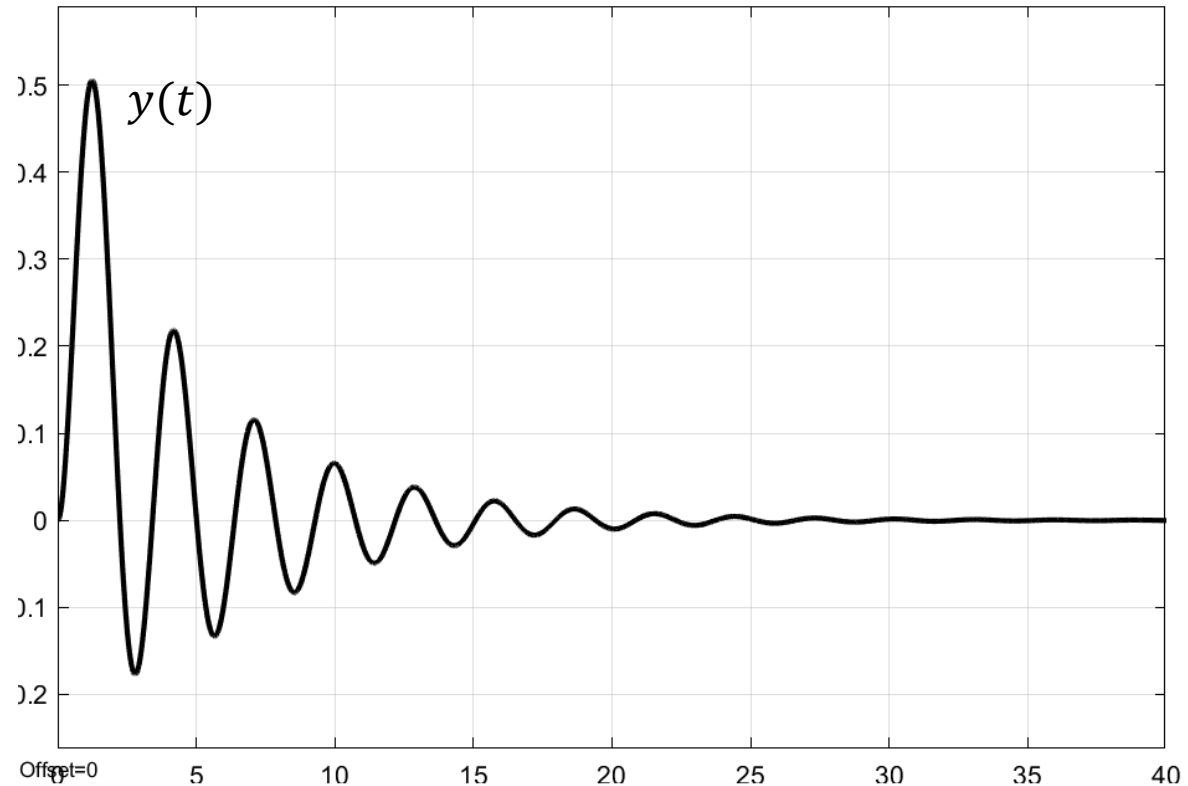
Zero del regolatore più in **alta** frequenza rispetto al polo del processo

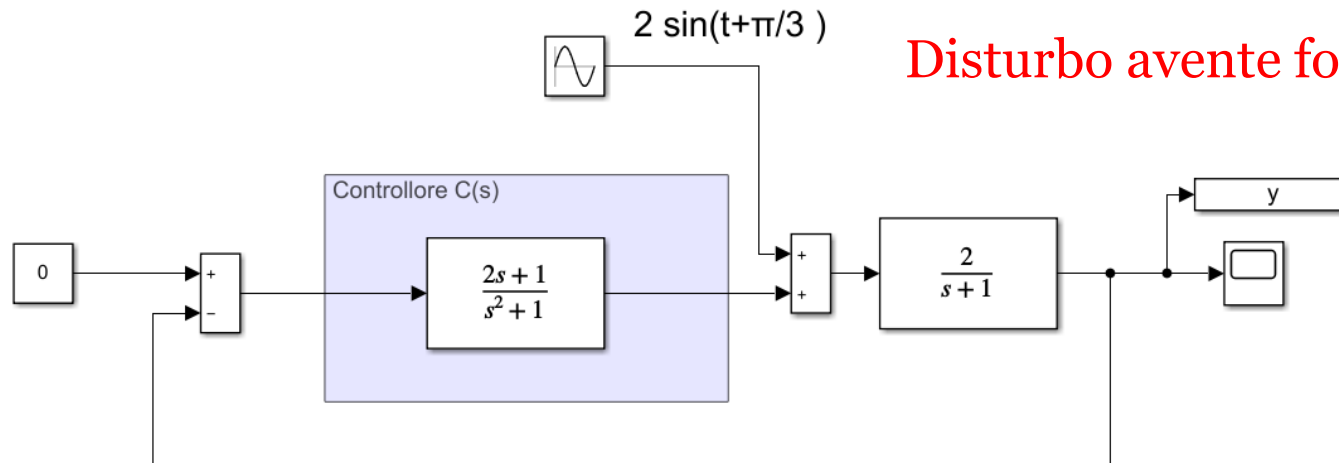




$$R_3(s) = \frac{2s + 1}{(s^2 + 1)}$$

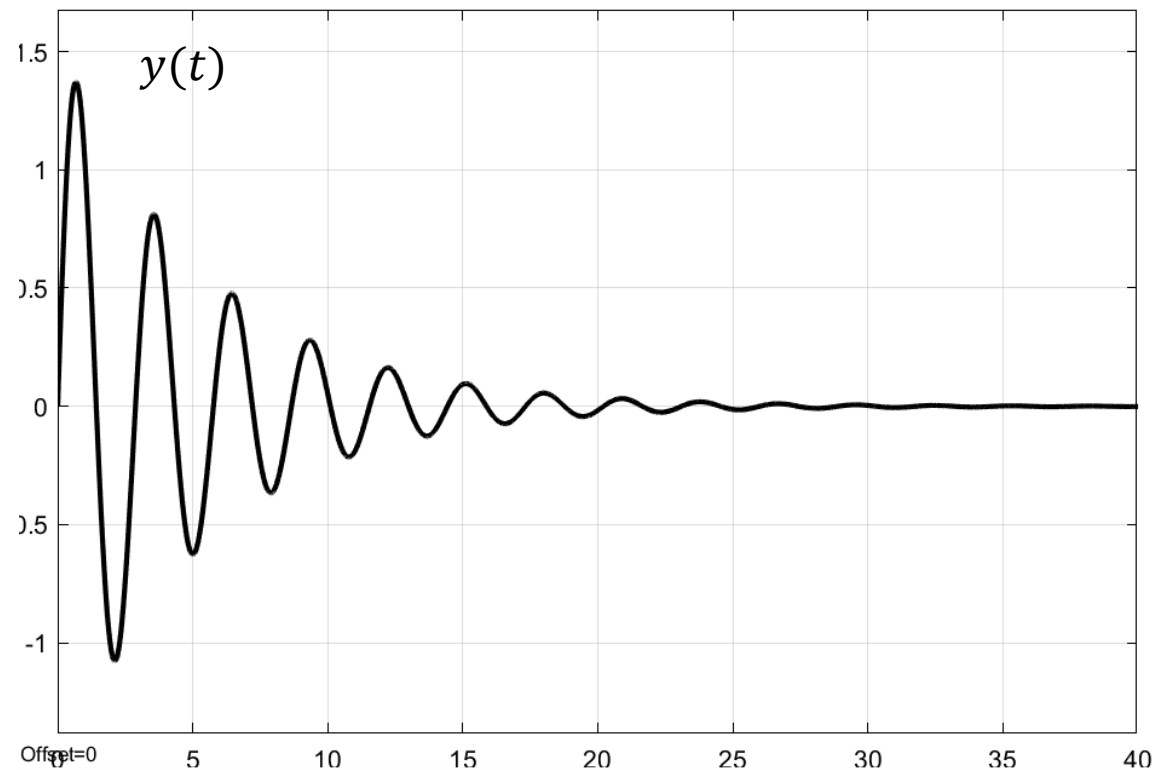
Zero del regolatore più in **bassa** frequenza rispetto al polo del processo





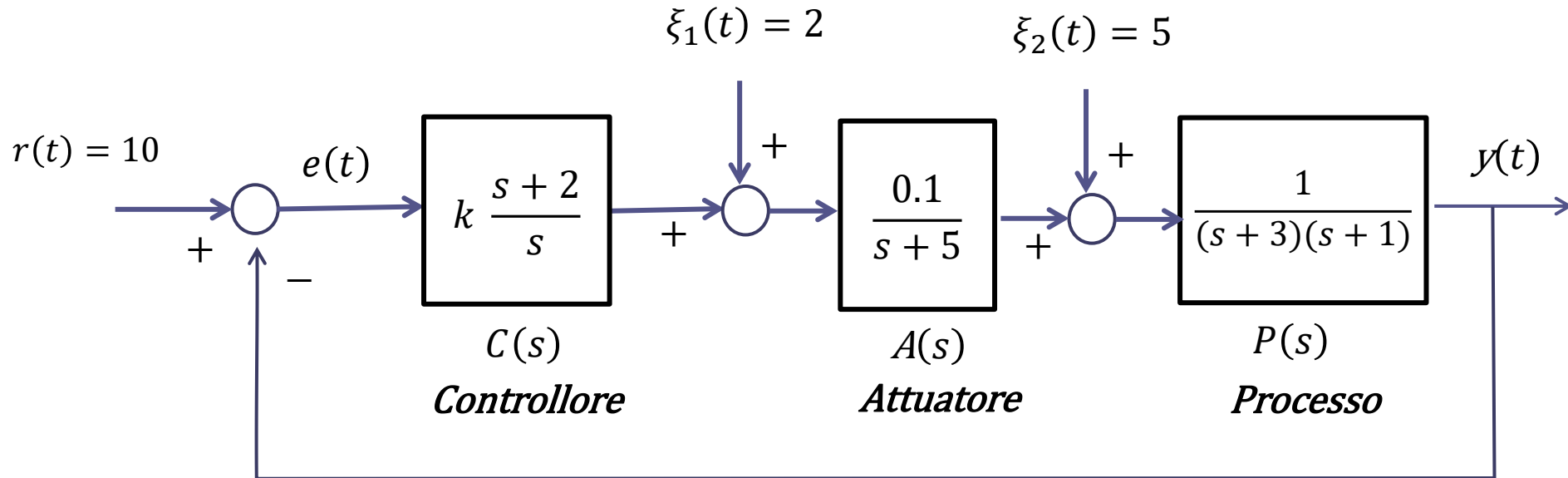
$$R_3(s) = \frac{2s + 1}{(s^2 + 1)}$$

Zero del regolatore più in **bassa** frequenza rispetto al polo del processo



Esercizio

Si consideri il seguente sistema di controllo in retroazione



Determinare l'evoluzione di regime della variabile di uscita al variare del guadagno k

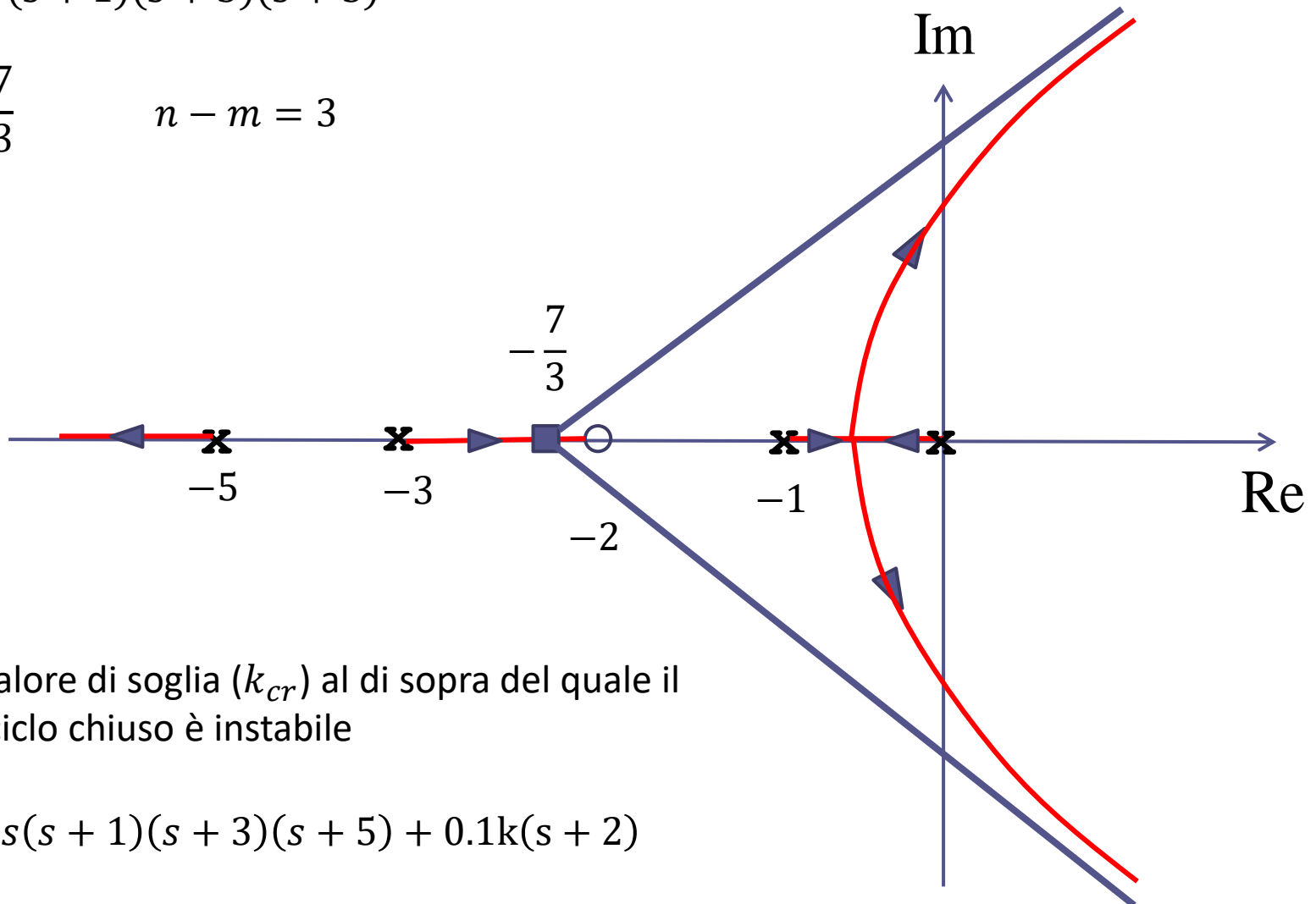
Sistema di controllo di tipo 1 con il polo nell'origine contenuto nel regolatore. Analizziamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso.

$$P_{car}(s) = s(s+1)(s+3)(s+5) + 0.1k(s+2)$$

Tracciamo il LdR

$$L(s) = \frac{0.1(s + 2)}{s(s + 1)(s + 3)(s + 5)}$$

$$x_s = -\frac{7}{3} \quad n - m = 3$$



Esiste un valore di soglia (k_{cr}) al di sopra del quale il sistema a ciclo chiuso è instabile

$$P_{car}(s) = s(s + 1)(s + 3)(s + 5) + 0.1k(s + 2)$$

Determiniamo il valore di k_{cr} applicando il **criterio di Routh-Hurwitz** al polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = \text{DEN}(L(s)) + k \text{ NUM}(L(s)) = s(s+1)(s+3)(s+5) + 0.1k(s+2) =$$

$$= s^4 + 9s^3 + 23s^2 + (15 + 0.1k)s + 0.2k$$

| | | | |
|---|-------|-------------|------|
| 4 | 1 | 23 | 0.2k |
| 3 | 9 | $15 + 0.1k$ | |
| 2 | b_2 | b_0 | |
| 1 | c_1 | | |
| 0 | d_0 | | |

$$b_2 = - \left| \begin{array}{cc} 1 & 23 \\ 9 & 15 + 0.1k \end{array} \right| = 192 - 0.1k$$

$$b_0 = - \left| \begin{array}{cc} 1 & 0.2k \\ 9 & 0 \end{array} \right| = 1.8k$$

Per il calcolo di b_2 e b_0 non si è diviso per 9

Determiniamo il valore di k_{cr} applicando il criterio di Routh-Hurwitz al polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = \text{DEN}(L(s)) + k \text{ NUM}(L(s)) = s(s+1)(s+3)(s+5) + 0.1k(s+2) =$$

$$= s^4 + 9s^3 + 23s^2 + (15 + 0.1k)s + 0.2k$$

| | | | |
|---|------------|-----------|------|
| 4 | 1 | 23 | 0.2k |
| 3 | 9 | 15 + 0.1k | |
| 2 | 192 - 0.1k | 1.8k | |
| 1 | c_1 | | |
| 0 | d_0 | | |

$$c_1 = - \begin{vmatrix} 9 & 15 + 0.1k \\ 192 - 0.1k & 1.8k \end{vmatrix} =$$

$$= -0.01k^2 + \frac{3}{2}k + 2880$$

Per il calcolo di c_1 non si è diviso per $192 - 0.1k$

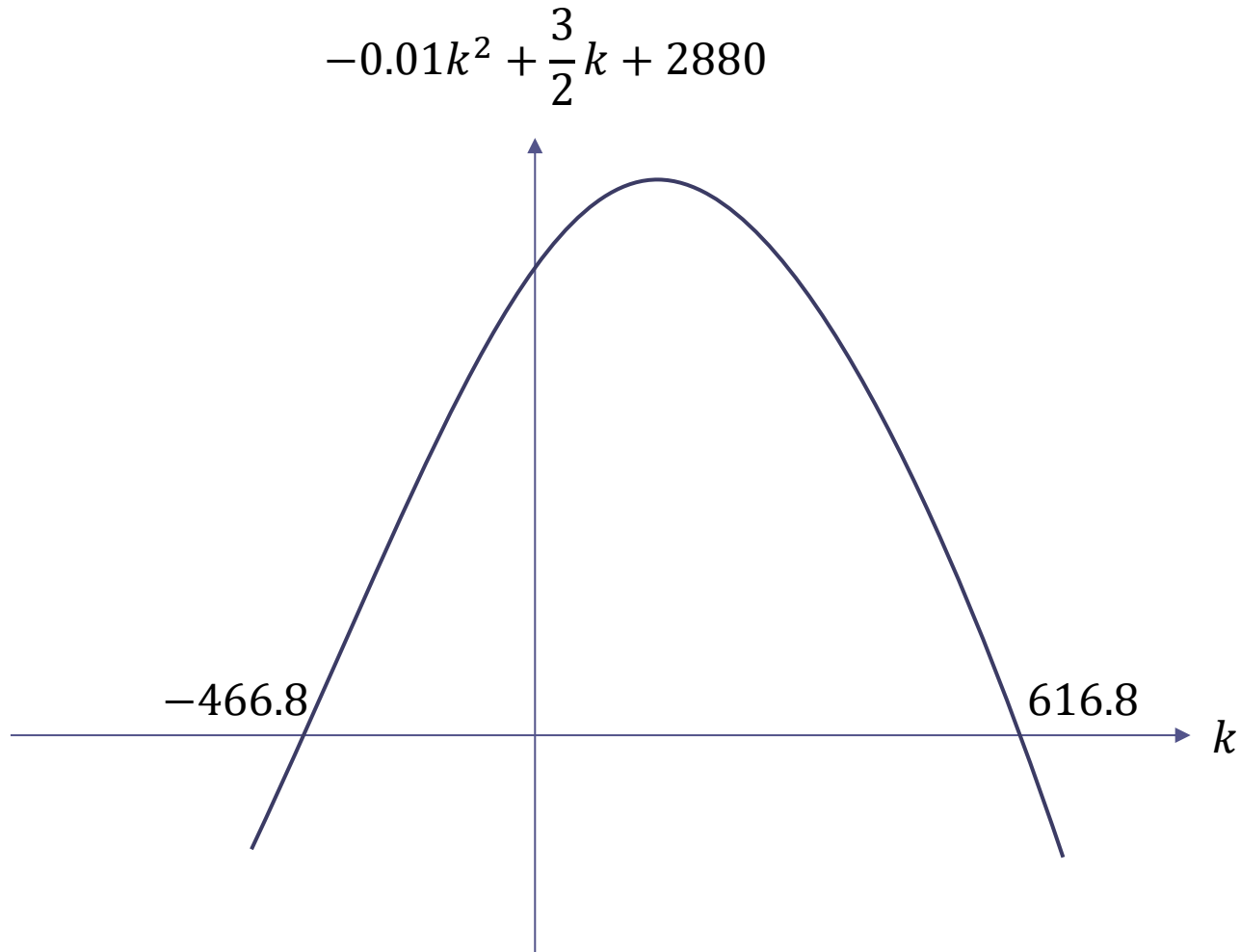
Determiniamo il valore di k_{cr} applicando il criterio di Routh-Hurwitz al polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = \text{DEN}(L(s)) + k \text{ NUM}(L(s)) = s(s+1)(s+3)(s+5) + 0.1k(s+2) =$$

$$= s^4 + 9s^3 + 23s^2 + (15 + 0.1k)s + 0.2k$$

| | | | |
|---|----------------------------------|-----------|------|
| 4 | 1 | 23 | 0.2k |
| 3 | 9 | 15 + 0.1k | |
| 2 | $192 - 0.1k$ | $1.8k$ | |
| 1 | $-0.01k^2 + \frac{3}{2}k + 2880$ | | |
| 0 | $d_0 = c_1 \cdot 1.8k$ | | |

Il polinomio $-0.01k^2 + \frac{3}{2}k + 2880$ ha come radici $k = k_1 = -466.8$ e $k = k_2 = 616.8$



Imponiamo che i coefficienti della prima colonna della tabella siano tutti positivi

$$192 - 0.1k > 0$$



$$k < 1920$$

$$-0.01k^2 + \frac{3}{2}k + 2880 > 0$$



$$-466.8 < k < 616.87$$

$$c_1 \cdot 1.8k > 0$$



$$0 < k < 616.87$$

Il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile per valori del guadagno k tali che

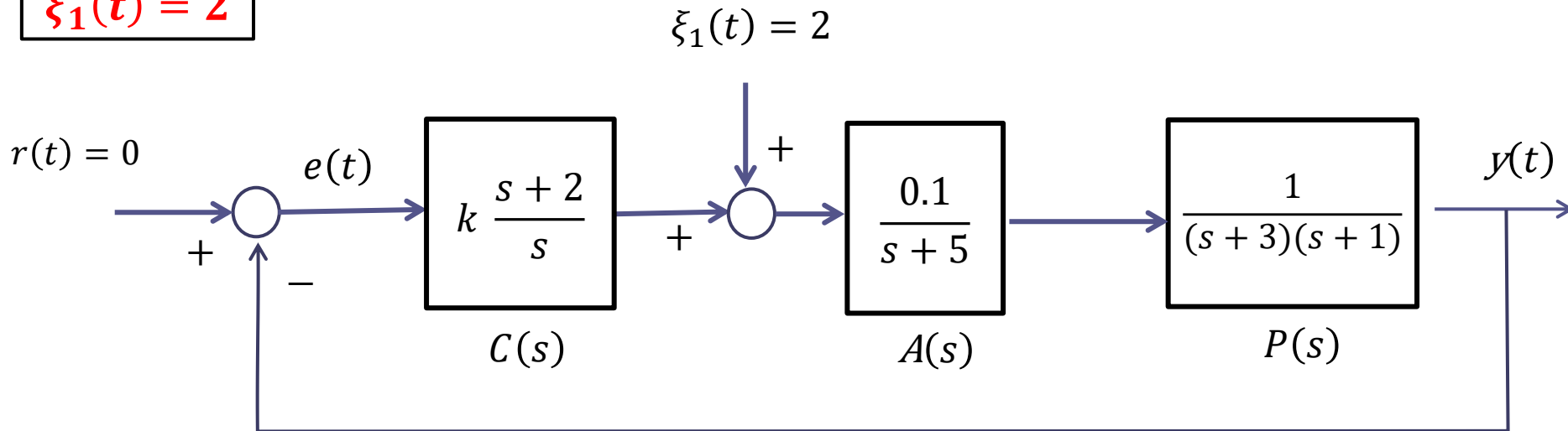
$$0 < k < 616.87 = k_{cr}$$

$$r(t) = 10$$

La FdT a ciclo aperto $A(s) = C(s)A(s)P(s)$ contiene il modello di un set point costante (contiene un polo nell'origine).

$$\text{PMI : } y(t) \rightarrow 10$$

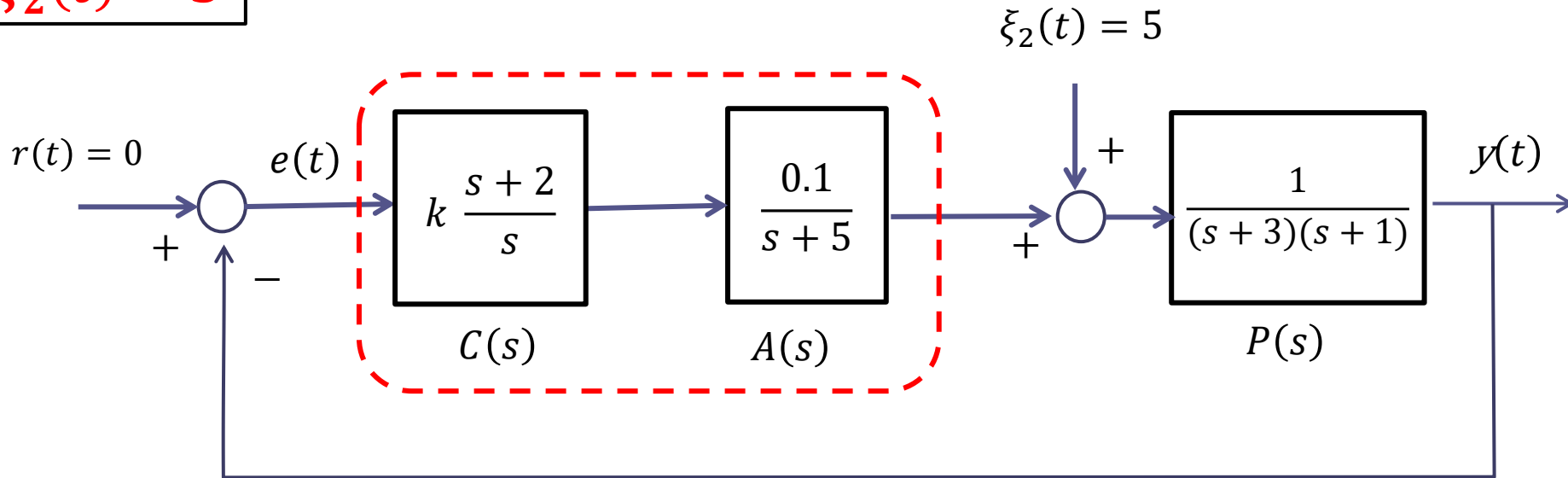
$$\xi_1(t) = 2$$



La FdT $C(s)$ contiene il modello di un disturbo costante (contiene un polo nell'origine).

$$\text{PMI : } y(t) \rightarrow 0$$

$$\xi_2(t) = 5$$



La FdT $C(s)A(s)$ contiene il modello di un disturbo costante (contiene un polo nell'origine).

$$\text{PMI: } y(t) \rightarrow 0$$

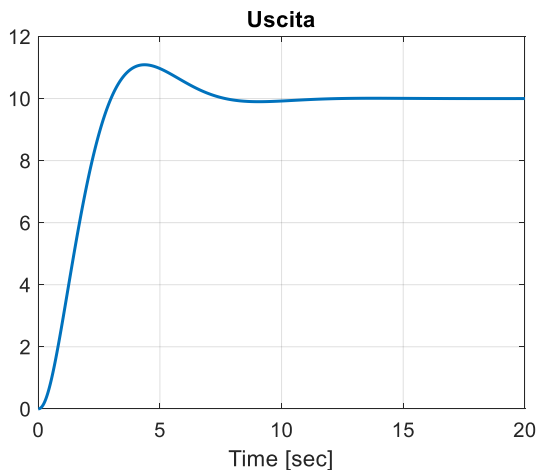
Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti deduciamo che complessivamente il comportamento di regime dell'uscita sarà il seguente:

$$y(t) \rightarrow 10 \quad 0 < k < 616.87$$

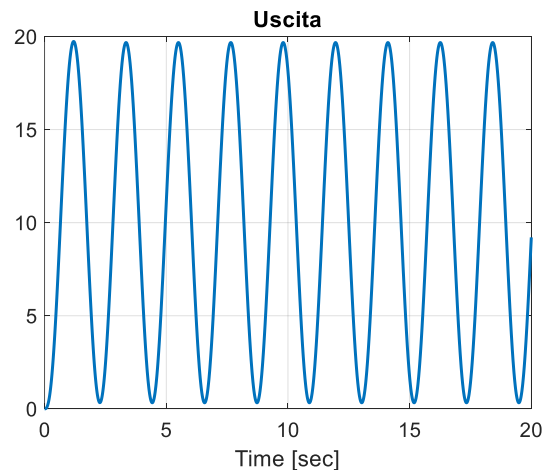
$$y(t) \text{ oscilla} \quad k = 616.87$$

$$y(t) \rightarrow \infty \quad k > 616.87$$

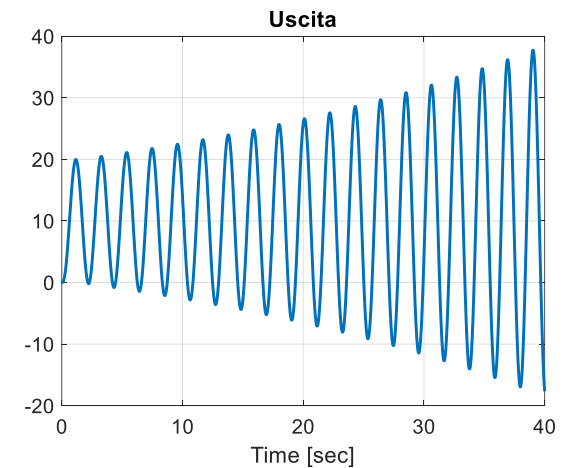
$$k = 50$$



$$k = 616.87$$

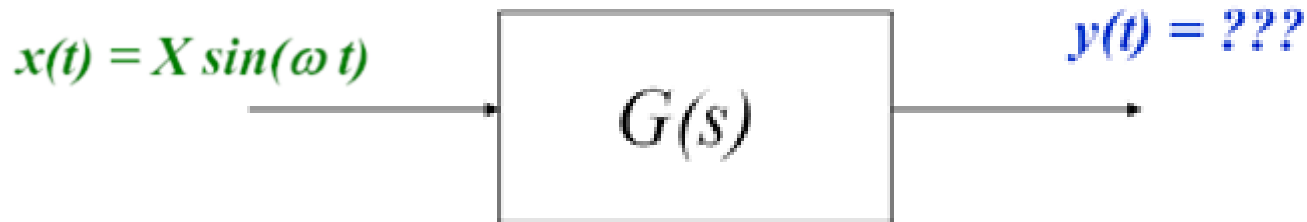


$$k = 650$$



Analisi armonica

L'**analisi armonica** di un sistema dinamico consiste nello studio della risposta a transitorio esaurito quando in ingresso al sistema viene applicata un'onda sinusoidale.



Per sistemi dinamici LTI l'analisi della risposta a regime si basa sulla **funzione di risposta armonica (FRA)**

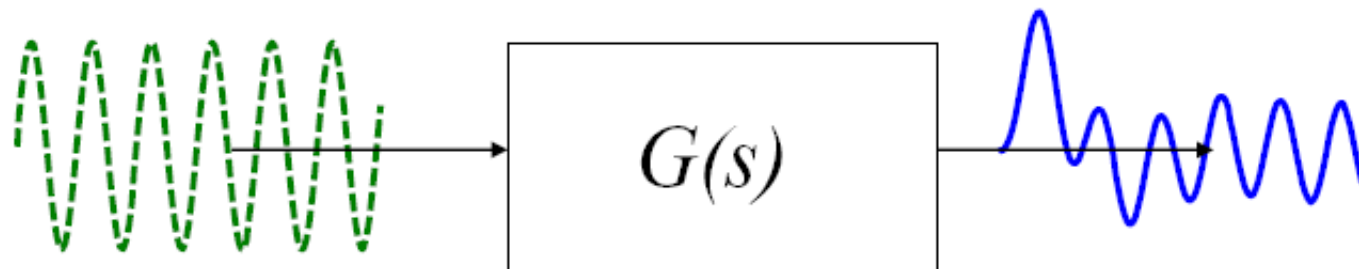
La FRA è una funzione a valori complessi che si calcola a partire dalla $G(s)$ operando la **sostituzione $s=j\omega$**

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

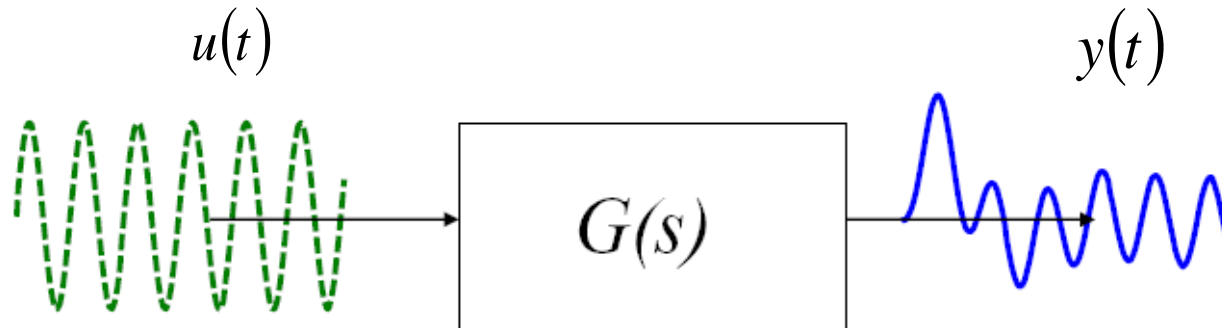
- se si applica a un sistema lineare stazionario **asintoticamente stabile** il segnale di ingresso $x(t) = X \sin(\omega t)$ esaurito il transitorio (in condizione di regime stazionario periodico) l'uscita varia pure con legge sinusoidale caratterizzata dalla stessa pulsazione ω e può pertanto essere espressa con la relazione $y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$

$$x(t) = X \sin \omega t$$

$$y(t) = Y(\omega) \sin (\omega t + \phi(\omega))$$



RISPOSTA ARMONICA



$G(s)$ asintoticamente stabile

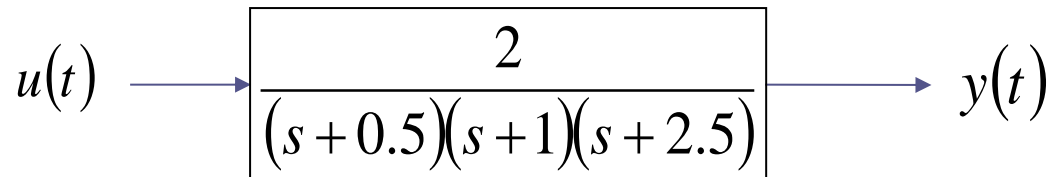
$$u(t) = X \cos(\bar{\omega}t + \phi)$$

$$y_{regime}(t) = X |G(j \bar{\omega})| \cos(\bar{\omega}t + \phi + \angle G(j \bar{\omega}))$$

Stessa frequenza, diversa
ampiezza e diversa fase

Generalizzabile a somme di sinusoidi in ingresso a diversa frequenza applicando il principio di sovrapposizione degli effetti

Esempio



$$G(s) = \frac{2}{(s+0.5)(s+1)(s+2.5)}$$

asintoticamente stabile

$$u(t) = 2 \cos(3t) \quad X = 2 \quad \bar{\omega} = 3 \quad \phi = 0$$

$$y_{regime}(t) = 2 |G(j3)| \cos(3t + \angle G(j3))$$

$$G(j3) = \frac{2}{(j3+0.5)(j3+1)(j3+2.5)}$$

E' un numero complesso del quale si può valutare modulo e fase

Operativamente, leggiamo il modulo $|G(j3)|$ e la fase $\angle G(j3)$ dai **Diagrammi di Bode** della FdT $G(s)$

Rappresentazione grafica di funzioni a valori complessi

$$F(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + j I(\omega)$$

$$M(\omega) = |F(\omega)| \quad \text{Modulo}$$

$$R(\omega)$$

Parte reale

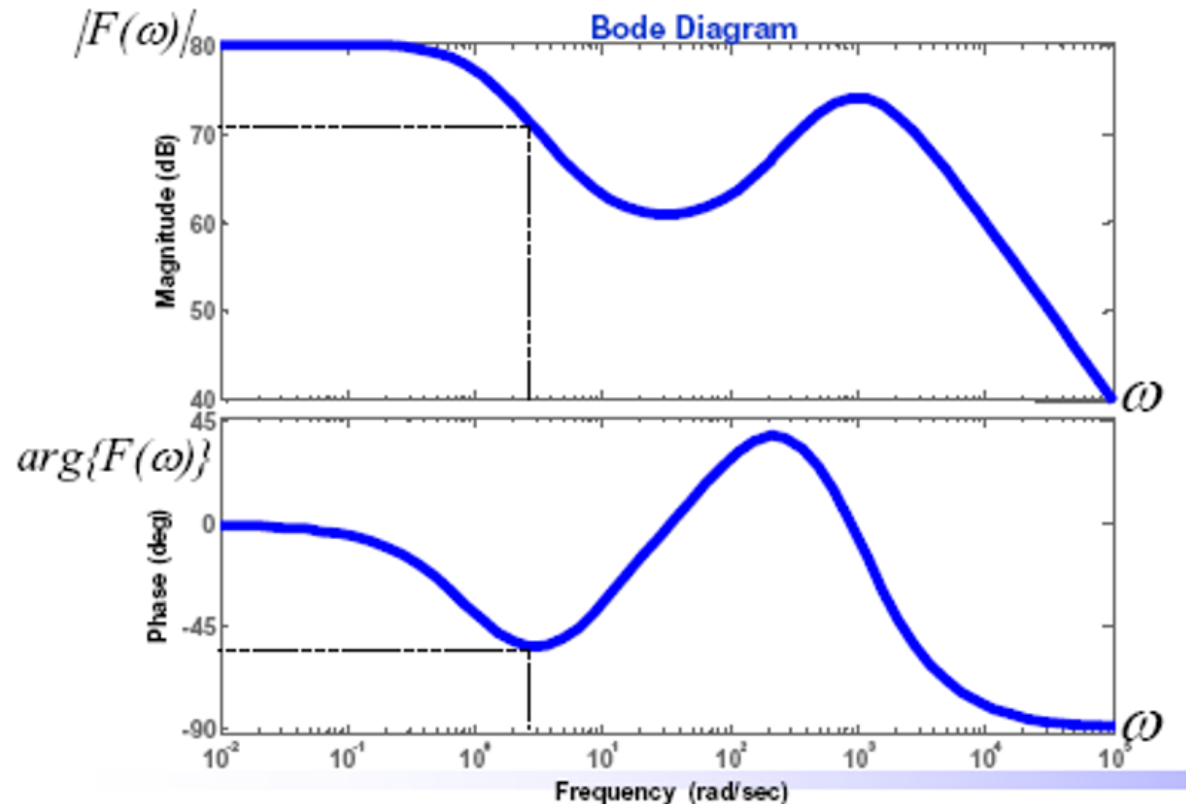
$$\varphi(\omega) = \angle F(\omega) \quad \text{Fase}$$

$$I(\omega)$$

Parte immaginaria

Diagrammi di Bode

Il modulo e la fase sono plottati in funzione della frequenza in due diagrammi distinti (diagramma del modulo e diagramma della fase)



Si presti attenzione al fatto che i diagrammi di Bode dei moduli riportano in ordinata il valore di $M(\omega)$ **espresso in dB**

$$M_{db}(\omega) = 20 \log_{10} M(\omega)$$

$$M(\omega) = 10^{\frac{M_{db}(\omega)}{20}}$$

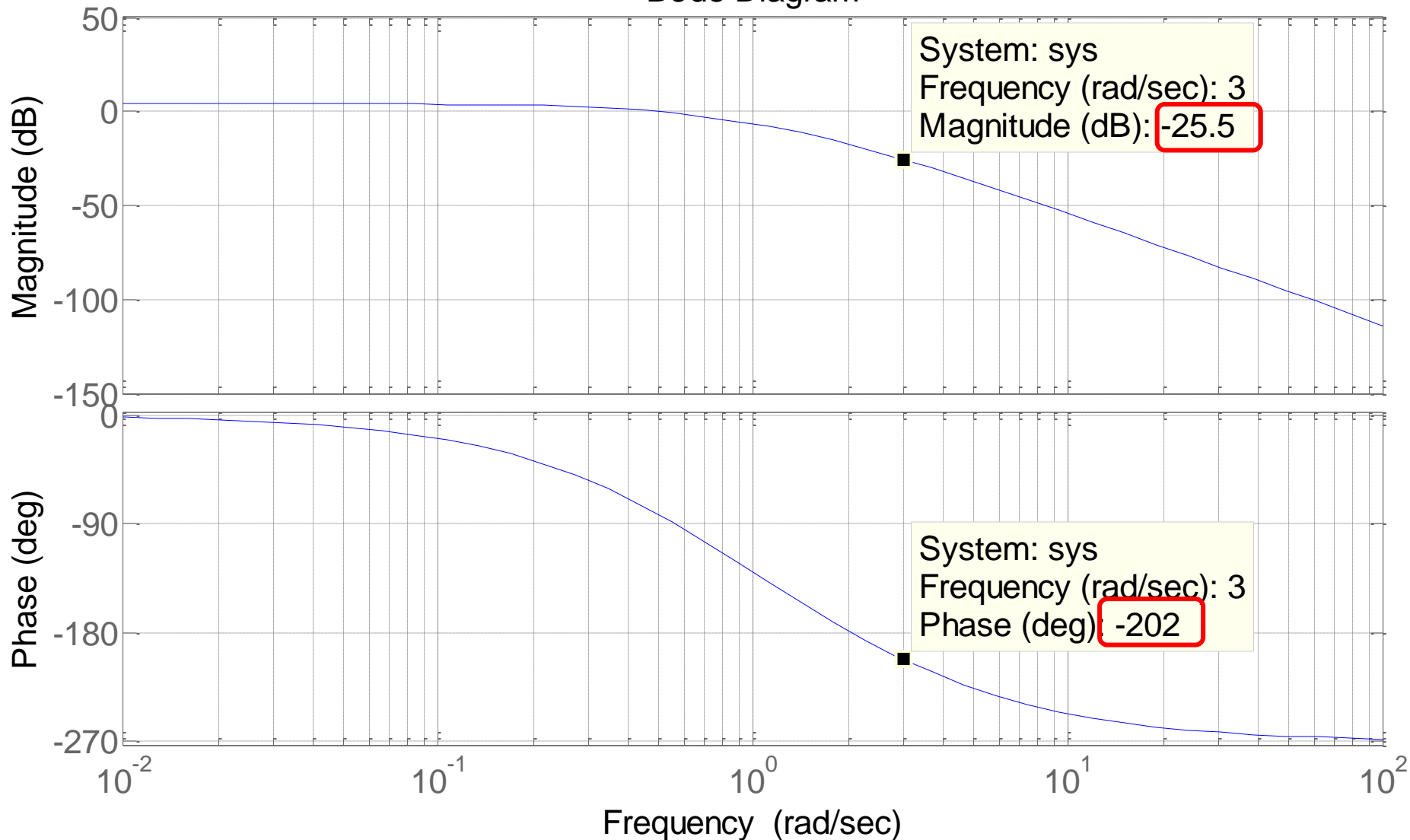
Valore naturale **Valore in dB**

| M | M_{db} |
|------|----------|
| 0.01 | -40 |
| 0.1 | -20 |
| 1 | 0 |
| 10 | 20 |
| 100 | 40 |

```
numF=2;  
denF=poly([-0.5 -1 -2.5]);  
bode(numF,denF),grid
```

$$G(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 0.5)(j\omega + 1)(j\omega + 2.5)}$$

Bode Diagram



Il modulo, espresso in dB nel diagramma, deve essere convertito nel valore naturale

$$M_{db} = 20 \log_{10} M \quad \Rightarrow \quad M = 10^{\frac{M_{db}}{20}}$$

$$|G(j3)|_{db} \cong -25.5db \quad \Rightarrow \quad |G(j3)| = 10^{\frac{|G(j3)|_{db}}{20}} \cong 10^{-\frac{25.5}{20}} \cong 0.053$$

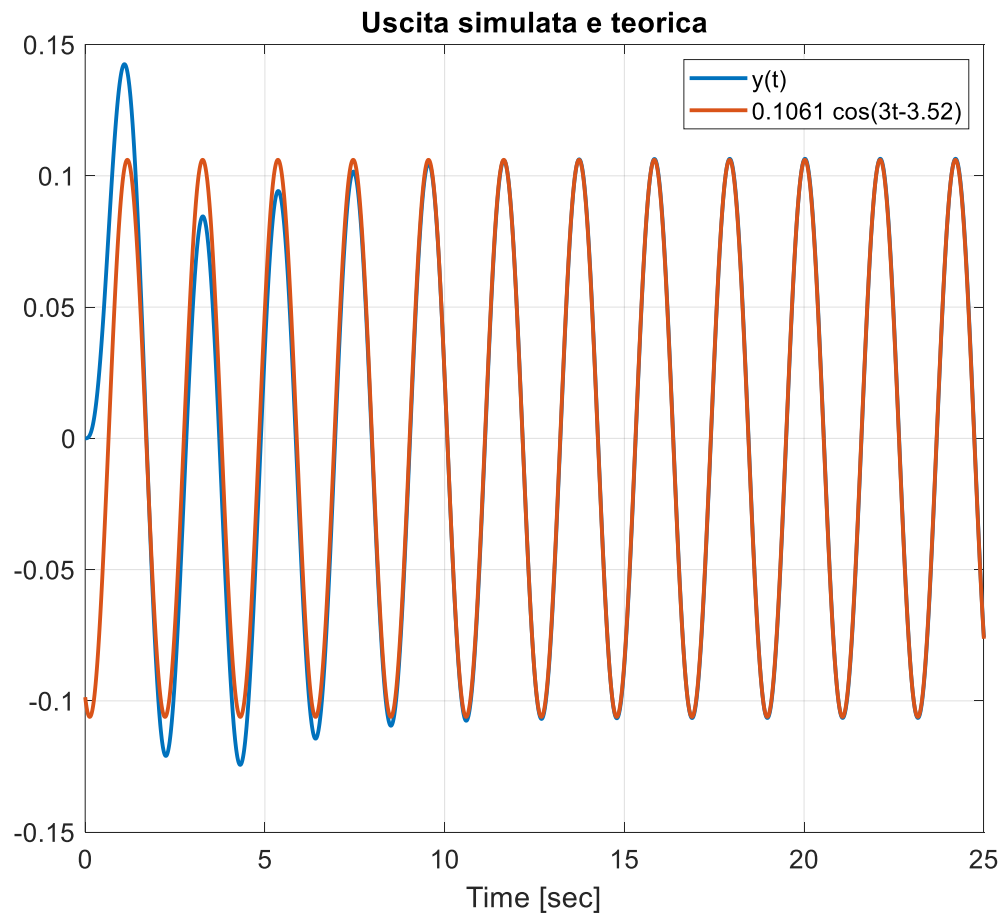
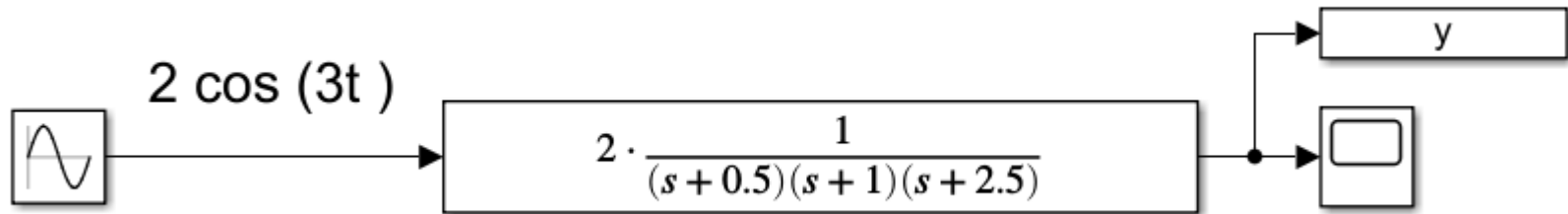
Convertiamo le fasi in radianti

$$\angle G(j3) = -202^\circ = -202^\circ \frac{2\pi}{360^\circ} \cong -3.52rad$$

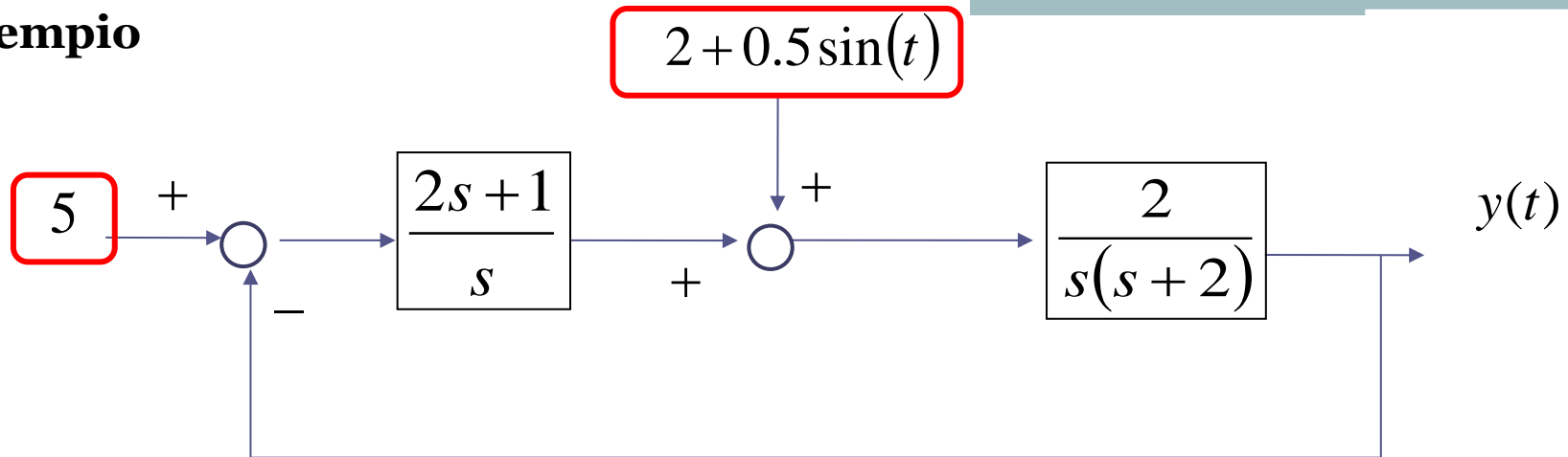
Espressione dell'uscita

$$y_{regime}(t) = 2 |G(j3)| \cos(3t + \angle G(j3))$$

$$y_{regime}(t) = 2 \cdot 0.053 \cdot \cos(3t - 3.52) = 0.1061 \cos(3t - 3.52)$$



Esempio



Il polinomio caratteristico è $P_{car}(s) = s^2(s+2) + 2(2s+1) = s^3 + 2s^2 + 4s + 2$

Il sistema a ciclo chiuso è pertanto asintoticamente stabile [$8 \cdot 4 > 2$].

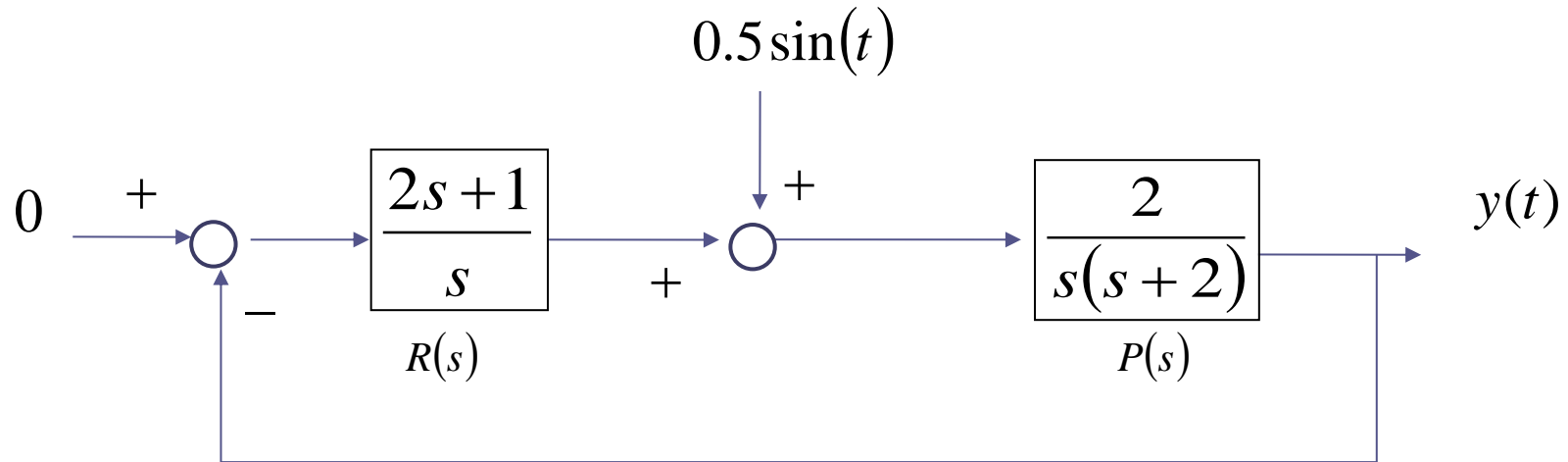
Calcoliamo il valore di regime dell'uscita associata al set point:

$$\text{PMI-1} \quad y(t) \rightarrow 5$$

Calcoliamo il valore di regime dell'uscita associata alla componente costante del disturbo

$$\text{PMI-2} \quad y(t) \rightarrow 0$$

Per quanto riguarda la componente sinusoidale del disturbo, facciamo riferimento al sistema semplificato



equivalente a



$$W_{\zeta}^y(s) = \frac{P(s)}{1+R(s)P(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+2)}}{1+\frac{(2s+1) \cdot 2}{s \cdot s(s+2)}} = \frac{2s}{s^2(s+2)+2(2s+1)} = \frac{2s}{s^3+2s^2+4s+2}$$

$$y_{regime}(t) = 0.5 \left| W_{\zeta}^y(j1) \right| \sin \left(t + \angle W_{\zeta}^y(j1) \right)$$

Ci interessa valutare **la sola ampiezza**

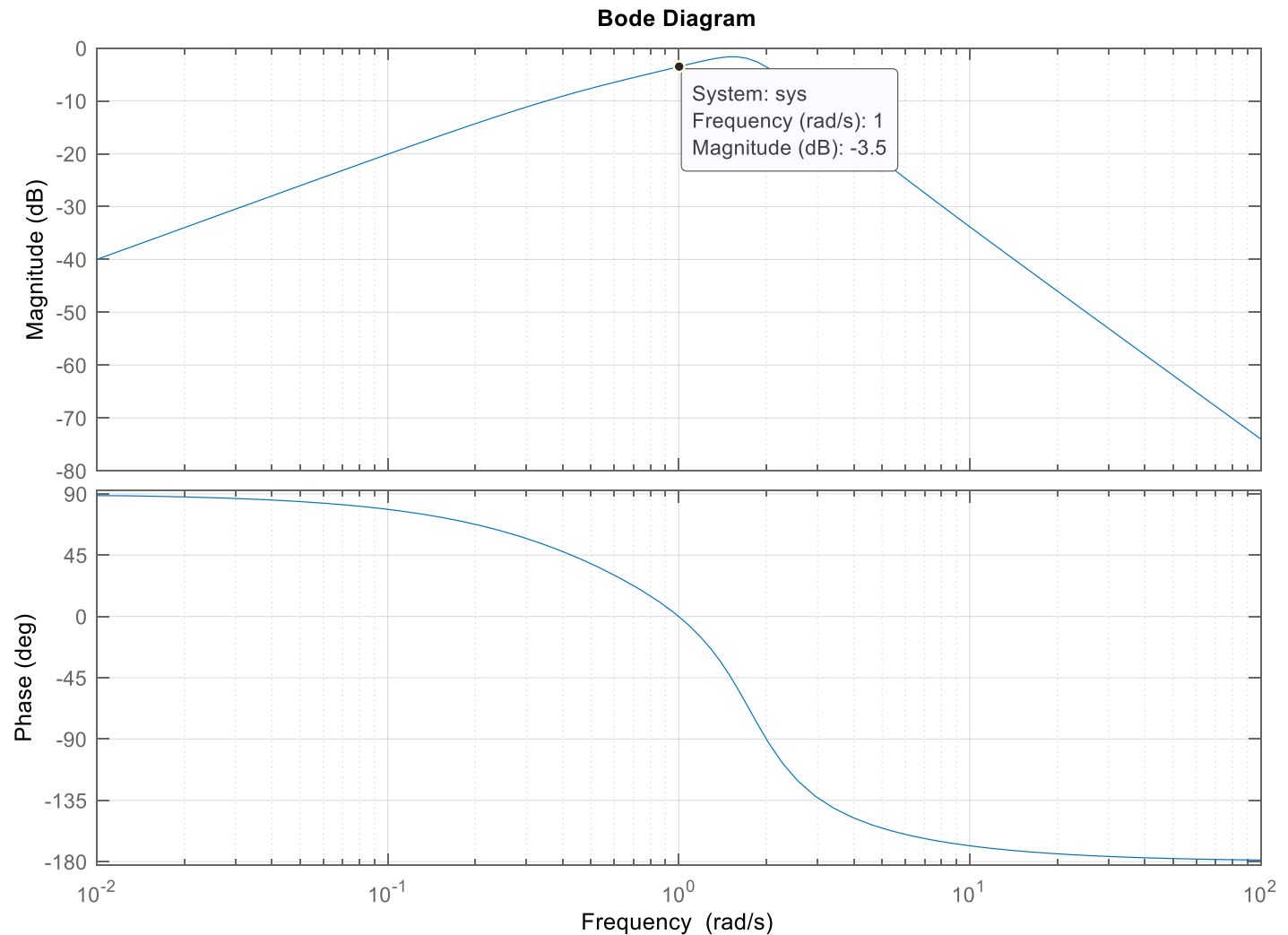
```
numF=[2 0];
denF=[1 2 4 2];
bode(numF,denF),grid
```

Valutiamo il diagramma di Bode del modulo
alla pulsazione $\omega=1$ rad/s del disturbo

$$W_{\zeta}^y(j\omega)$$

$$\left|W_{\zeta}^y(j\omega)\right|_{dB}$$

$$\angle W_{\zeta}^y(j\omega)$$



Il modulo, espresso in dB nel diagramma, deve essere convertito nel valore naturale

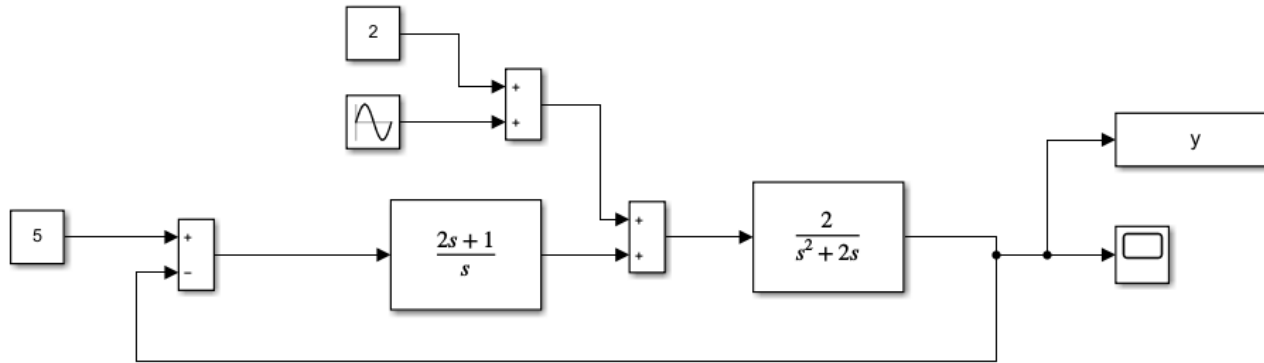
$$\left|W_{\zeta}^y(j1)\right|_{dB} \cong -3.5dB \qquad \left|W_{\zeta}^y(j1)\right| = 10^{\frac{\left|W_{\zeta}^y(j1)\right|_{dB}}{20}} = 10^{-\frac{3.5}{20}} \cong 0.66$$

$$y_{regime}(t) = 0.5 \left|W_{\zeta}^y(j1)\right| \sin\left(t + \angle W_{\zeta}^y(j1)\right)$$

La componente oscillatoria sull'uscita dovuta al disturbo ha ampiezza

$$0.5 \left|W_{\zeta}^y(j1)\right| \cong 0.5 \cdot 0.66 \cong 0.33$$

Sommando le varie componenti calcolate, l'uscita y tenderà complessivamente al valore costante 5 più una oscillazione di ampiezza 0.33 e frequenza 1 rad/s



L'uscita y tenderà al valore costante **5** più una oscillazione di ampiezza **0.33**

