

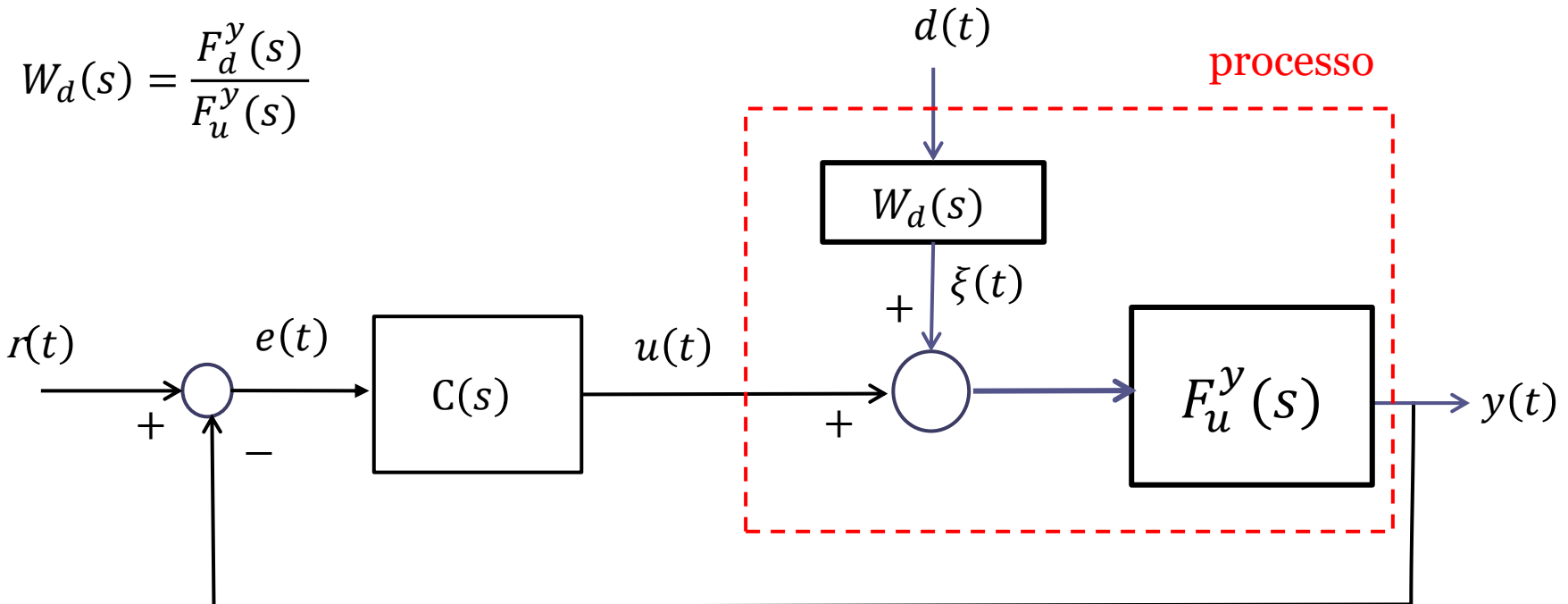
Controlli automatici

Comportamento a regime dei sistemi di controllo – parte 1

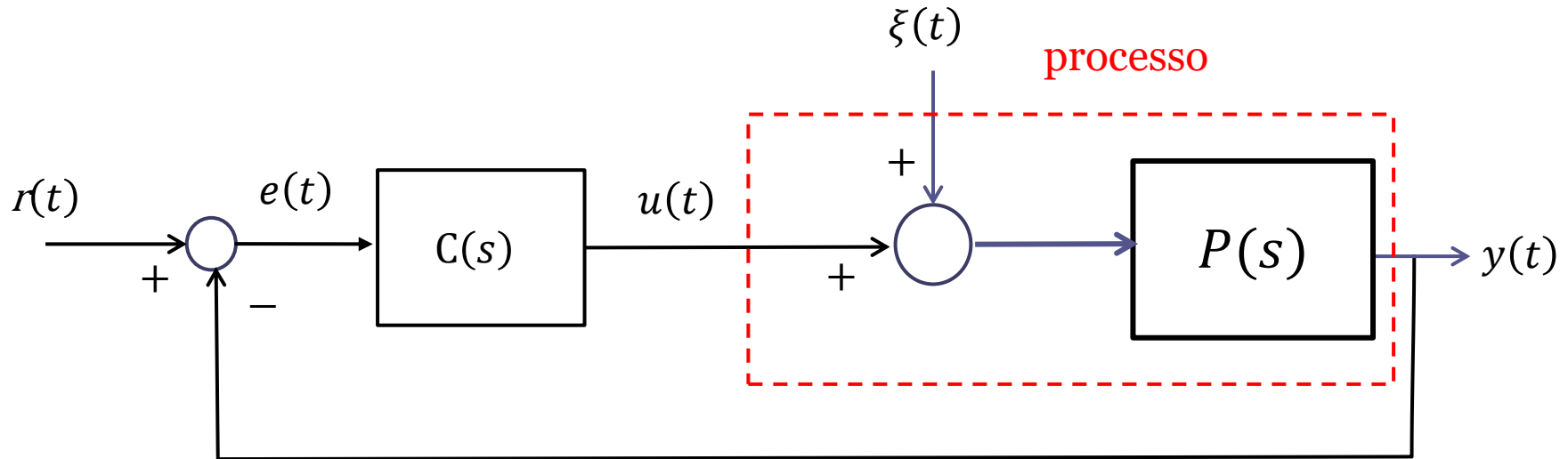
Prof. Alessandro Pisano
`apisano@unica.it`

Il comportamento a regime dei sistemi di controllo si riferisce alla analisi degli effetti **a transitorio esaurito** di **ingressi esterni** (set-point e disturbi) polinomiali (segnali costanti, a rampa, etc., detti anche “**canonici**”) oppure ingressi esterni avente andamento **sinusoidale**.

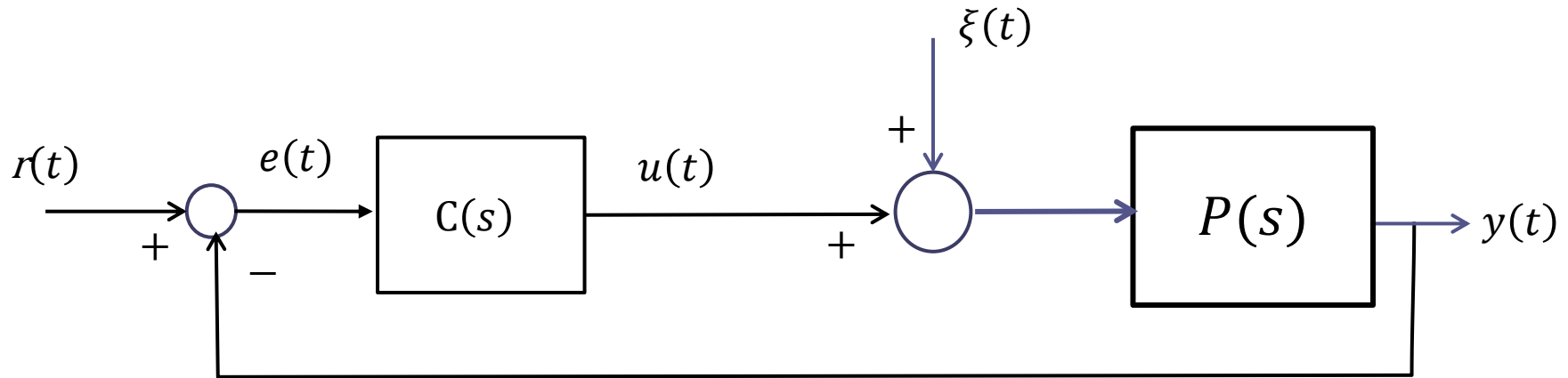
Faremo riferimento a sistemi di controllo a retroazione unitaria



Per semplicità di analisi, consideriamo come segnale disturbante di ingresso al sistema di controllo direttamente il segnale $\xi(t)$ che si somma all'uscita del regolatore $C(s)$

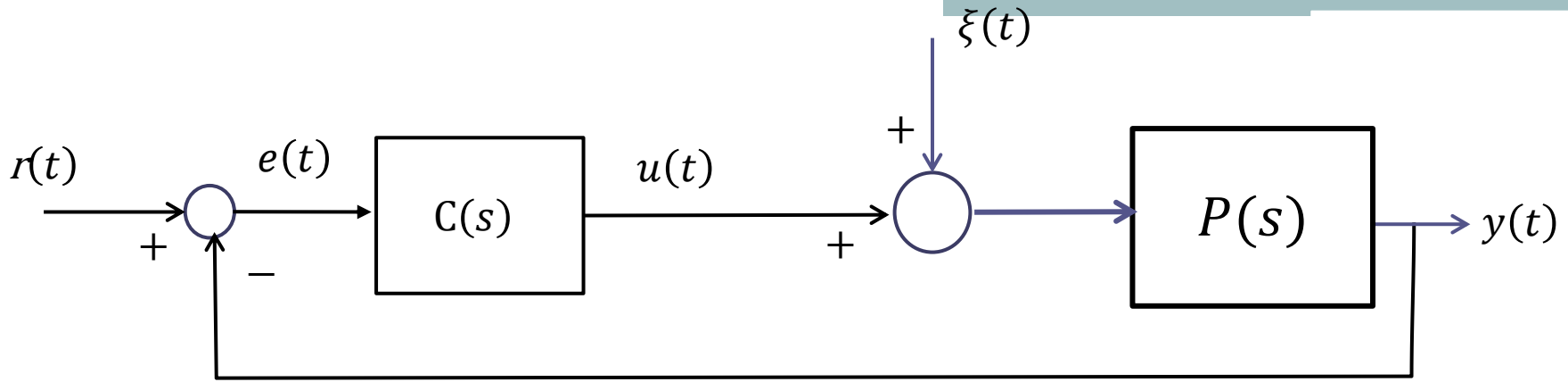


Il **segnale disturbante** $\xi(t)$ influenza il comportamento del sistema di controllo ma la sua evoluzione temporale non è influenzabile dal progettista. Compito del sistema di controllo è pertanto non solo di garantire il comportamento desiderato per l'uscita in condizioni nominali (cioè, senza disturbo) ma anche quello di fare in modo che ove intervengano disturbi appartenenti a determinate classi di segnali (ci riferiremo in prevalenza, ma non esclusivamente, a disturbi costanti di ampiezza sconosciuta) il loro effetto a regime sulla variabile di uscita sia completamente compensato, o almeno **attenuato** in misura sufficiente.



Per quanto concerne il comportamento a regime per ingressi e disturbi canonici risulta di estremo rilievo la presenza di **poli nell'origine** nel controllore e/o nel processo

E' importante sia il numero complessivo di poli nell'origine che la loro "ripartizione" tra controllore e processo



Definiamo o richiamiamo alcune utili Funzioni di Trasferimento (FdT) a ciclo chiuso e relazioni aggiuntive associate al SdC (sistema di controllo) in esame

FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita (**già vista**)

$$W_r^y(s) = \left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{\xi=0} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita (**già vista**)

$$W_\xi^y(s) = \left. \frac{Y(s)}{\Xi(s)} \right|_{r=0} = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

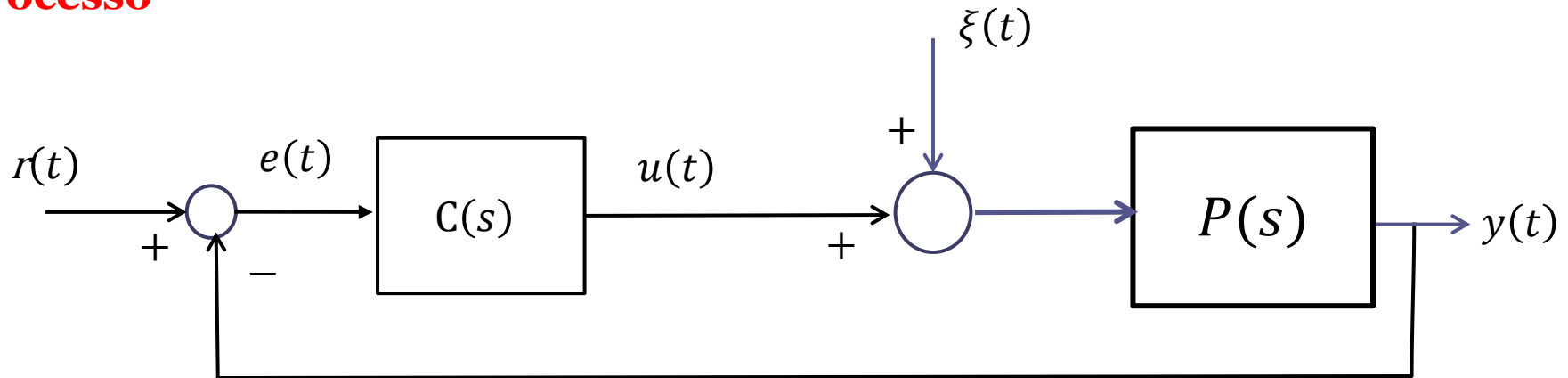
FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'errore

$$W_r^e(s) = \left. \frac{E(s)}{R(s)} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}$$

Tutte le considerazioni che svilupperemo in merito al comportamento a regime hanno come prerequisito essenziale che il sistema di controllo sia **asintoticamente stabile a ciclo chiuso sia esternamente che internamente.**

Definizione 1 - Tipo di un sistema di controllo

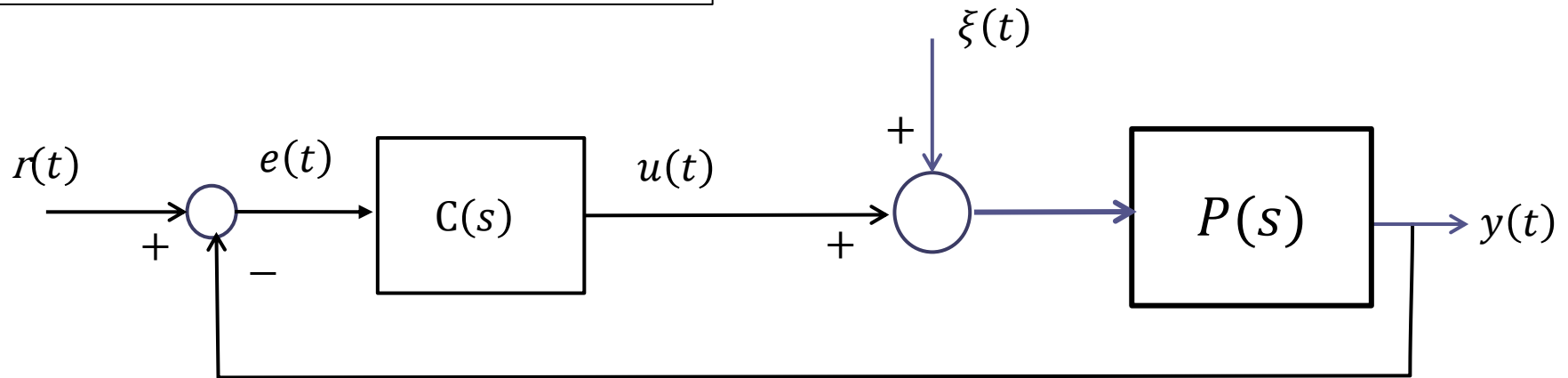
Con riferimento al sistema di controllo in Figura, si definisce **tipo del sistema** il **numero complessivo di poli nell'origine presenti nel controllore e nel processo**



Un sistema di controllo potrà pertanto essere di **tipo zero**, di **tipo uno**, di **tipo due**, etc.

Nella pratica quasi mai si eccede il tipo due (a causa dei problemi di stabilità a ciclo chiuso conseguenti alla presenza di un elevato numero di poli nell'origine in catena diretta), e **i sistemi di controllo di tipo uno sono quelli largamente più diffusi**.

Sistemi di controllo di tipo zero



Né il controllore né il processo possiedono poli nell'origine.

Siano μ_C e μ_P i **guadagni statici** di controllore e processo

$$\mu_C = C(0)$$

$$\mu_P = P(0)$$

Richiamiamo un risultato già fornito in precedenza

Teorema Fondamentale della Risposta al Gradino (T.F.R.G.)

La risposta $y(t)$ di un sistema dinamico $W(s)$ *asintoticamente stabile* al gradino di ingresso $u(t) = U^* \cdot \delta_{-1}(t)$ converge al valore costante di regime

$$Y^* = U^* \cdot W(0)$$

$$W(0) = \textit{guadagno statico della } W(s)$$

Si presti attenzione al fatto che il TFRG si applica unicamente a sistemi dinamici as. stabili.

Sistemi di controllo di tipo zero

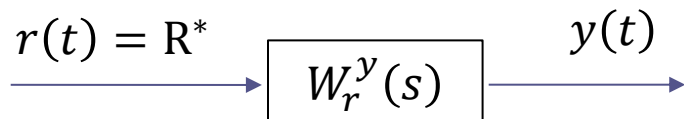
Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **set-point costante** (e disturbo nullo).

$$r(t) = R^* = \text{cost.}$$

$$\xi(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Dimostrazione



$$W_r^y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$W_r^y(0) = \frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)P(0)} = \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Possiamo far riferimento al T.F.R.G. in quanto la FdT a ciclo chiuso $W_r^y(s)$ è per ipotesi asintoticamente stabile e quindi la sua risposta ad un gradino di ampiezza R^* converge a regime al valore costante dato dal prodotto fra il guadagno statico della FdT (che vale $\frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$) e l'ampiezza R^* del gradino in ingresso.

Si ha quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \cdot \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

QED

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Commenti

In un sistema di controllo di tipo zero, l'uscita non converge al valore costante del set-point. E' sempre presente (**anche in assenza di disturbi**) un errore a regime che dipende dai guadagni statici di regolatore e processo (in realtà dipende in maniera aggregata dal loro prodotto).

Incrementando il guadagno statico μ_C del controllore la precisione a regime migliora, nel senso che si riduce la differenza fra il valore di regime dell'uscita ed il valore del set-point (ciò in conseguenza del fatto che il termine $\frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$ tende ad 1 al crescere di μ_C)

Si presti attenzione al fatto che **il guadagno del controllore non può essere aumentato a piacere**, in quanto **deve sempre essere garantita la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo**. Il LdR ci permette di determinare se sussista o meno il rischio che valori eccessivamente elevati del guadagno del controllore possano destabilizzare il sistema a ciclo chiuso.

Sistemi di controllo di tipo zero

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **disturbo costante** (e set point nullo).

$$\xi(t) = \Delta = \text{cost.} \quad r(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Dimostrazione (seguiamo una strada differente dalla applicazione del T.F.R.G. impiegando stavolta il Teorema del valore finale)

Calcoliamo la TdL dell'uscita moltiplicando fra loro la FdT a ciclo chiuso $W_{\xi}^y(s)$ fra il disturbo e l'uscita e la TdL $\Xi(s)$ del disturbo:

$$Y(s) = W_{\xi}^y(s) \Xi(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} \cdot \frac{\Delta}{s}$$

Ora applichiamo il Teorema del valore finale. La condizione di applicabilità del teorema del valore finale è soddisfatta in conseguenza del fatto che il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile e quindi le soluzioni dell'equazione caratteristica $1 + C(s)P(s) = 0$ hanno certamente parte reale negativa.

Quindi, l'uscita converge asintoticamente ad un valore costante, che può essere calcolato nella maniera seguente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \Delta \cdot \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} \quad \text{QED}$$

Commenti

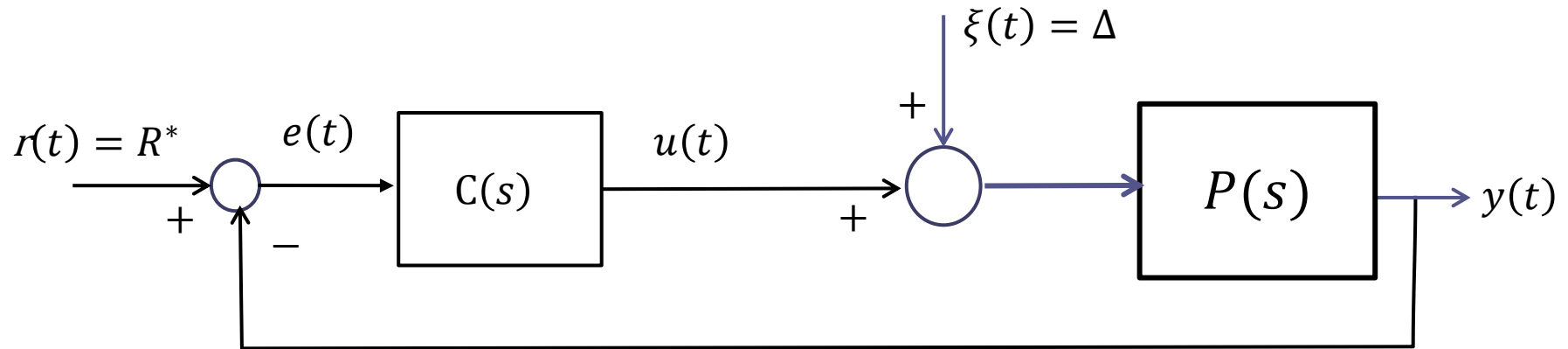
In un sistema di controllo di tipo zero, un disturbo costante altera il valore di regime dell'uscita. L'entità di tale effetto indesiderato dipende dai guadagni di regolatore e processo.

Incrementando il guadagno μ_C del controllore la precisione a regime migliora, nel senso che si attenua l'effetto del disturbo sul valore di regime dell'uscita (ciò in conseguenza del fatto che il termine $\frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$ tende a zero al crescere di μ_C)

L'incremento del guadagno del controllore si rileva lo strumento progettuale utile a garantire determinate specifiche sul comportamento a regime in presenza di disturbi (ad esempio, sulla **attenuazione minima richiesta** per il disturbo sull'uscita)

Sistemi di controllo di tipo zero

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **set-point costante e disturbo costante che intervengono simultaneamente**



Il **principio di sovrapposizione degli effetti** ci consente di affermare che in un sistema di controllo di tipo zero soggetto simultaneamente ad un set point costante di ampiezza R^* e ad un disturbo costante di ampiezza Δ il valore di regime dell'uscita sarà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

μ_C e μ_P sono i guadagni statici del controllore e del processo

La formula sopraripotata vale unicamente nel caso in cui il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Y^* = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

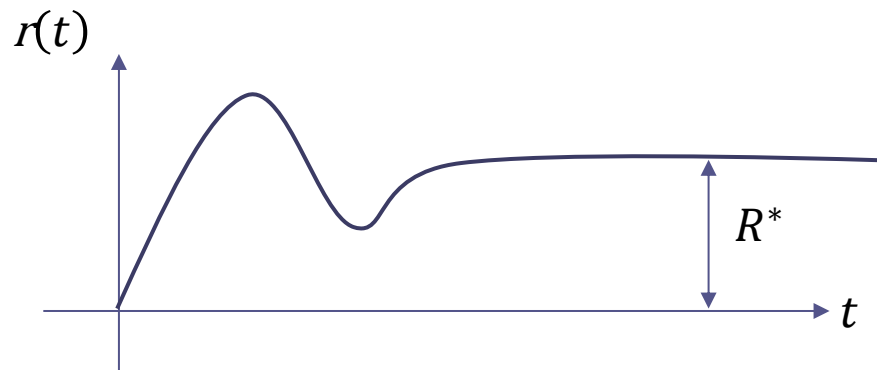
All'aumentare di μ_C si realizza, con precisione progressivamente crescente, la relazione «desiderata»

$$Y^* \approx R^*$$

che in ogni caso in un sistema di controllo di tipo zero non è **mai ottenibile**, nemmeno in assenza di disturbi.

Considerazioni aggiuntive

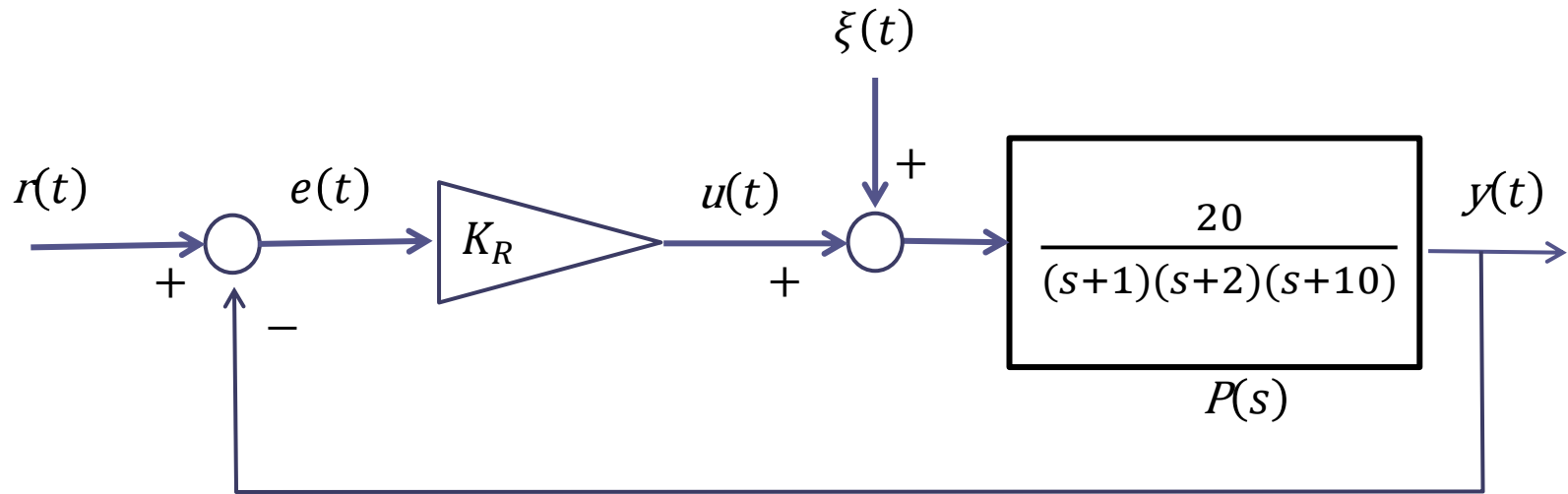
Le considerazioni sviluppate valgono anche in casi più generali in cui il set-point o il disturbo siano tempo varianti ma tendano ad un valore costante per t tendente all'infinito



L'evoluzione transitoria dell'uscita può risultare, naturalmente, completamente differente rispetto all'applicazione di set-point e disturbi costanti, ma il valore di regime è comunque lo stesso

Per sistemi di controllo di **tipo zero** soggetti a set point o disturbi costanti abbiamo visto quindi come **le uniche grandezze che intervengono nella determinazione del valore di regime dell'uscita siano (oltre ovviamente all'ampiezza del set point e del disturbo) il guadagno statico del processo ed il guadagno statico del regolatore**

Esempio



Determinare l'intervallo di valori di K_R in corrispondenza dei quali il sistema di controllo risulta essere asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

Assumendo per il guadagno K_R un valore pari alla metà del massimo guadagno ammissibile (guadagno critico) valutare quindi il comportamento dell'uscita a regime per

$$r(t) = 5$$

$$\xi(t) = 0.5(1 - e^{-2t})$$



$$P_{car}(s) = D_C(s)D_P(s) + N_C(s)N_P(s)$$

Quando non vi sono cancellazioni fra controllore e processo, il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso è la somma dei prodotti fra numeratori ed i denominatori del controllore e del processo

Il polinomio caratteristico risulta pertanto essere il seguente

$$P_{car}(s) = (s + 1)(s + 2)(s + 10) + 20K_R = s^3 + 13s^2 + 32s + 20 + 20K_R$$

Abbiamo visto come un polinomio di **terzo grado** risulti essere un polinomio di Hurwitz (cioè un polinomio avente tutte le radici a parte reale negativa) se e solo se tutti i suoi coefficienti hanno lo stesso segno e in aggiunta il prodotto fra i coefficienti dei termini lineare e quadratico risulta essere strettamente maggiore del prodotto fra il coefficiente del termine cubico ed il termine noto

Si ricava pertanto la seguente disequaglianza che fissa il massimo valore ammissibile per il guadagno del controllore e **ci evita di dover applicare il Criterio di Routh-Hurwitz**

$$13 \cdot 32 > 20 + 20K_R$$



$$K_R < 19.8$$

Consideriamo pertanto nel prosieguo dell'esercizio il valore $K_R = 9.9$

Poiché in corrispondenza di tale valore il sistema di controllo a ciclo chiuso risulta essere asintoticamente stabile possiamo fare riferimento alle formule viste per il comportamento dei sistemi di controllo di tipo zero.

Il controllore ha ovviamente guadagno statico $\mu_C = K_R = 9.9$.

Il processo $P(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ ha guadagno statico $\mu_P = P(0) = 1$

Il disturbo $\xi(t)$ è tempo-variante ma converge verso il valore costante di regime 0.5

Pertanto le analisi inerenti il comportamento a regime possono far riferimento ad un disturbo costante $\xi(t) = \Delta = 0.5$

Nei sistemi di controllo di tipo zero con set-point e disturbo costante si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

$$\mu_C = 9.9$$

$$\mu_P = 1$$

$$R^* = 5$$

$$\Delta = 0.5$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

$$\mu_C = 9.9$$

$$\mu_P = 1$$

$$R^* = 5$$

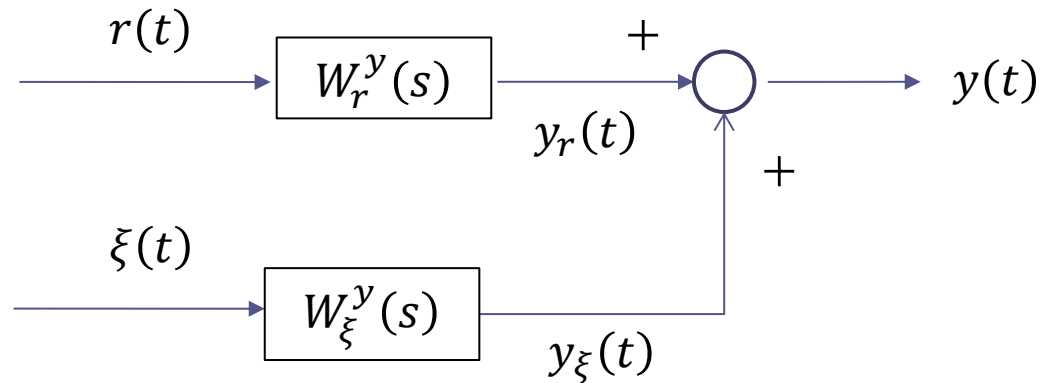
$$\Delta = 0.5$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 4.541 + 0.045 = 4.886$$

↓
Componente dovuta al disturbo

↓
Componente dovuta al set-point

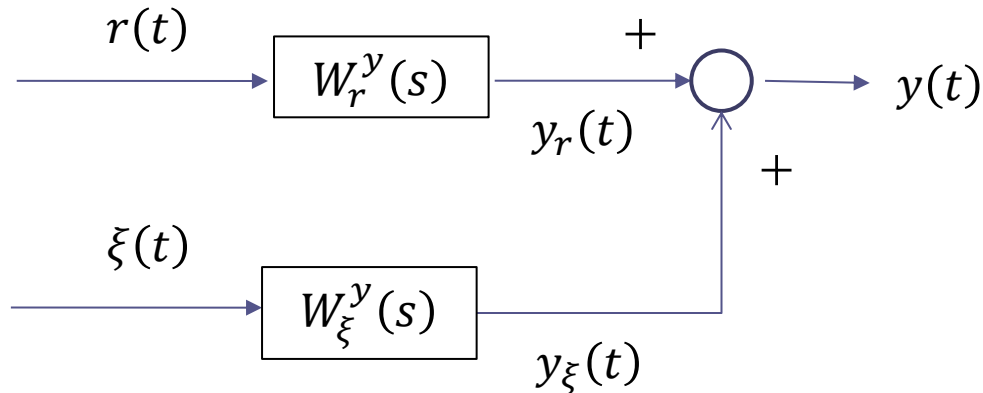
Il principio di sovrapposizione degli effetti stabilisce come la risposta complessiva $y(t)$ sia la somma fra la risposta $y_r(t)$ dovuta al solo set point e la risposta $y_\xi(t)$ dovuta al solo disturbo



$$W_r^y(s) = \frac{\frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10)}}{1 + \frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10)}} = \frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10) + 20K_R}$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)}}{1 + \frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10)}} = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10) + 20K_R}$$

Principio di sovrapposizione degli effetti



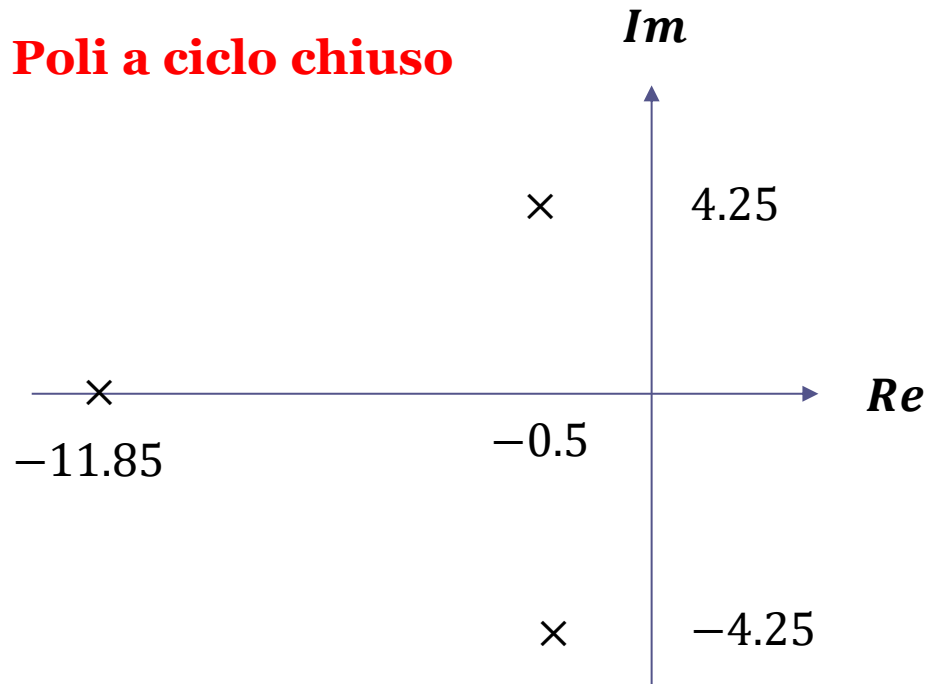
$$W_r^y(s) = \frac{198}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218}$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{20}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218}$$

Coppia di poli dominanti complessi coniugati nelle FdT a ciclo chiuso

E' possibile predire con precisione le caratteristiche transitorie della risposta al gradino a ciclo chiuso (si tracci un grafico approssimato delle risposte $y_r(t)$ e $y_\xi(t)$)

Poli a ciclo chiuso



Ricaviamo per altra via il valore di regime dell'uscita, senza ricorrere alla formula preconfezionata ma basandoci unicamente sul T.F.R.G.

Valutiamo separatamente i contributi al valore di regime dell'uscita introdotti dal set-point e dal disturbo.

Contributo del set-point

Moltiplichiamo il guadagno statico $W_r^y(0)$ della FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita per l'ampiezza $R^* = 5$ del set-point

T.F.R.G.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = 5 \cdot W_r^y(0) = 5 \cdot 0.9083 = 4.541$$

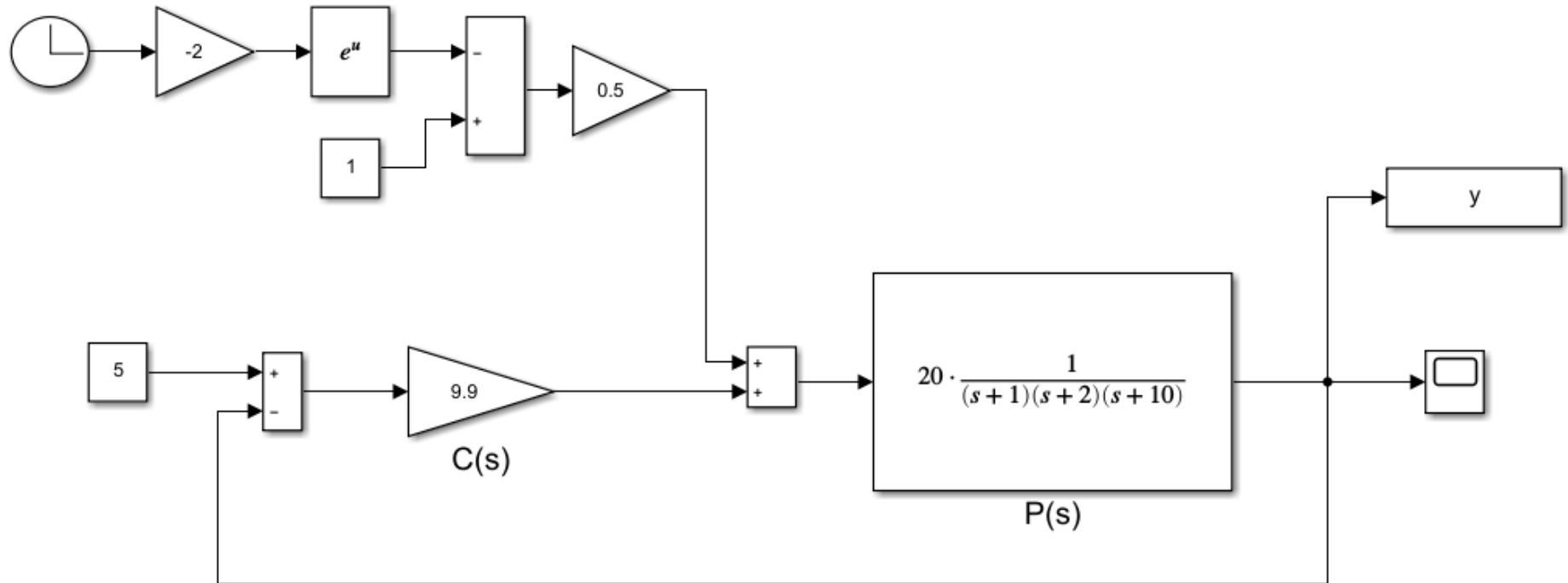
Contributo del disturbo

Moltiplichiamo il guadagno statico $W_\xi^y(0)$ della FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita per l'ampiezza $\Delta = 0.5$ del disturbo:

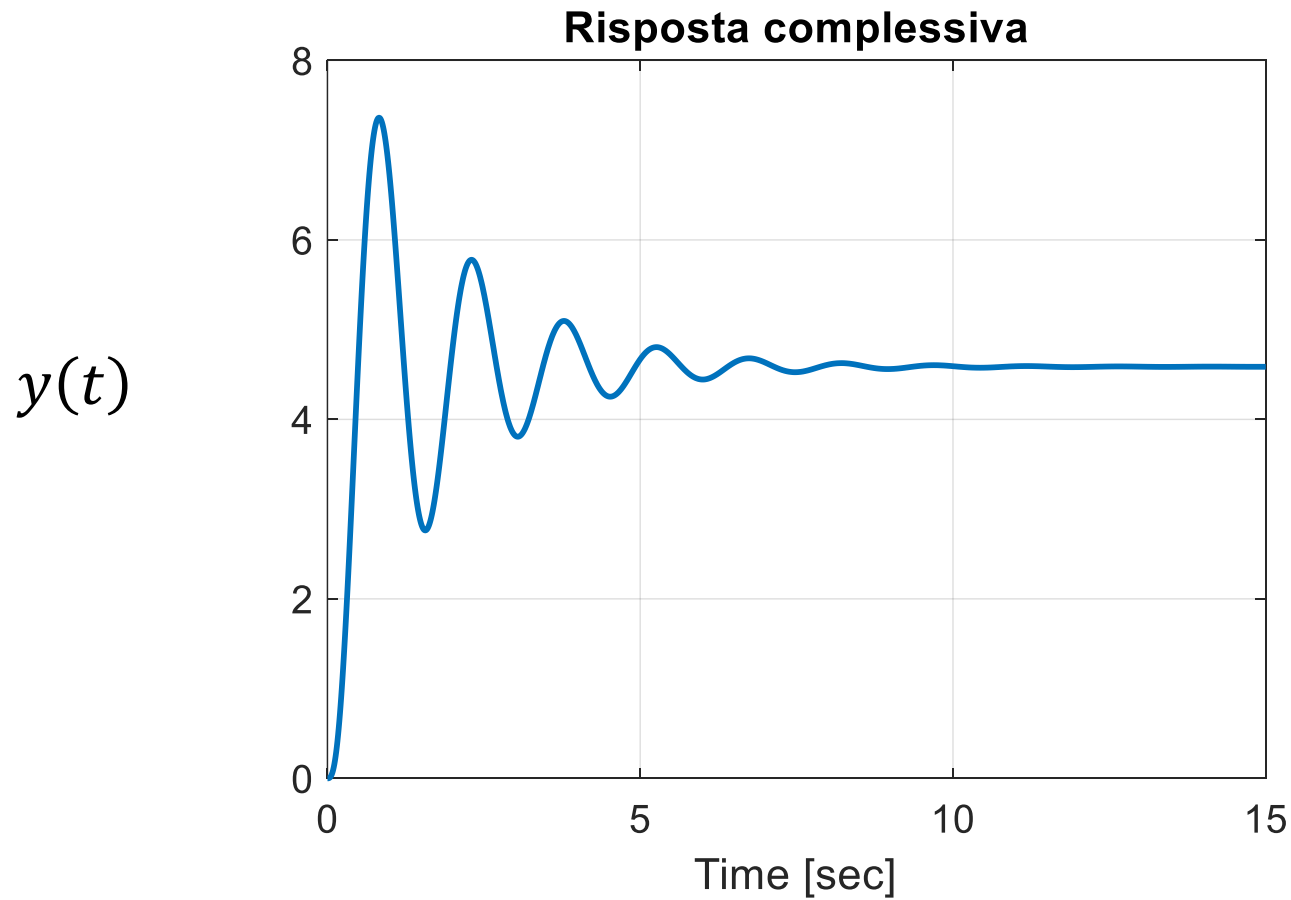
T.F.R.G.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_\xi(t) = 0.5 \cdot W_\xi^y(0) = 0.5 \cdot 0.091 = 0.045$$

Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti

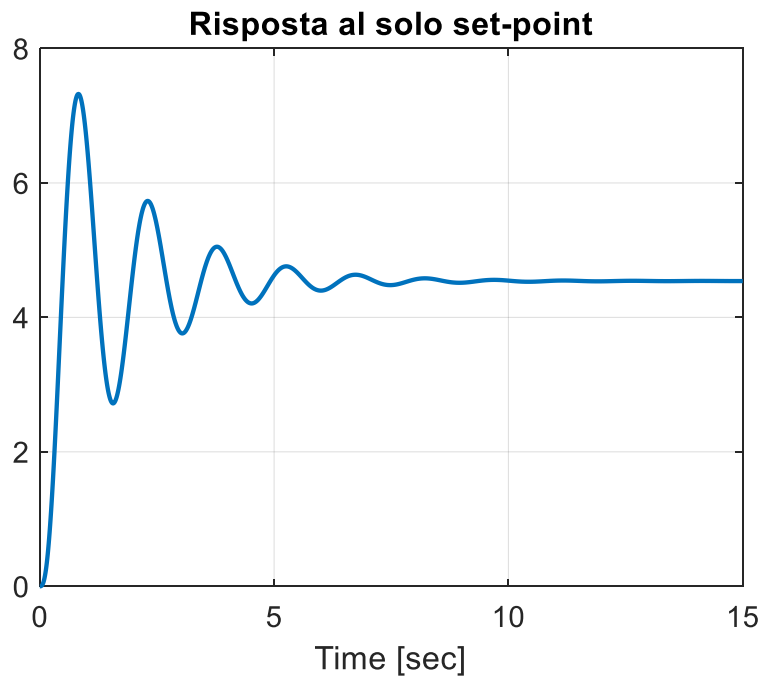


Uscita complessiva (in presenza sia del set-point che del disturbo)

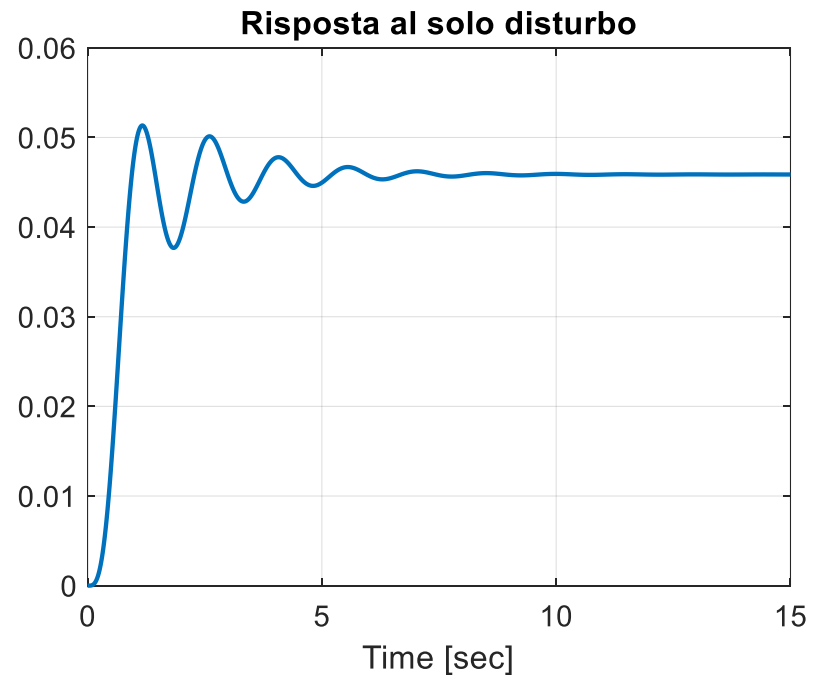


Uscita in presenza del solo disturbo e del solo set-point

$$y_r(t)$$

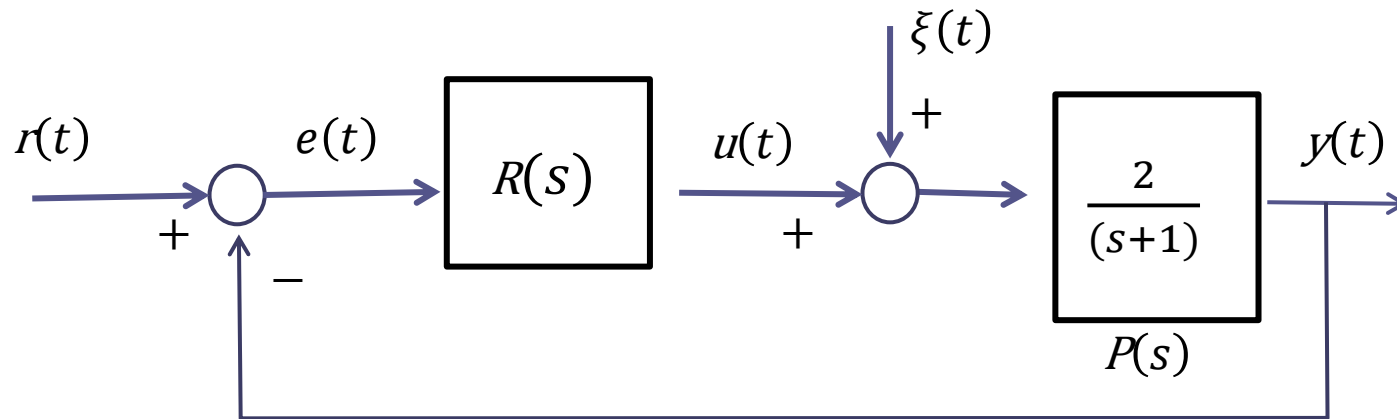


$$y_\xi(t)$$



Esempio

Si consideri il sistema di controllo in retroazione in Figura, con un processo del primo ordine asintoticamente stabile e un regolatore $R(s)$ da progettare



Le specifiche di controllo sono le seguenti

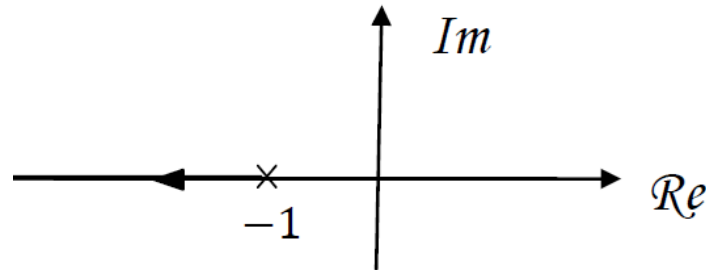
- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un **errore massimo del 2 %**
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al **95%**
- S3. Risposta ad un set point a gradino monotona crescente
- S4. Tempo di assestamento al 5% della risposta al gradino non superiore a **0.04** secondi

Le specifiche sul comportamento a regime sono **compatibili con le prestazioni di un sistema di controllo di tipo zero. Ipotizziamo** quindi l'impiego di un regolatore proporzionale $R(s) = K_R$

Valutiamo le relative proprietà di stabilità a ciclo chiuso.

L'analisi mediante LdR indica come il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile per qualunque valore, anche arbitrariamente grande, del guadagno K_R

$$L(s) = \frac{2}{s+1}$$



Le specifiche S1 ed S2 potranno quindi essere garantite da un valore di guadagno sufficientemente grande opportunamente scelto.

Per soddisfare la specifica S3 si deve fare in modo che i poli a ciclo chiuso siano tutti **reali negativi** e che non sia presente uno zero più in bassa frequenza rispetto a tutti i poli o a parte reale positiva.

Per soddisfare la specifica S4 si deve fare in modo che il polo a ciclo chiuso sia collocato **sufficientemente in alta frequenza** in modo che la costante di tempo associata sia sufficientemente piccola.

Abbiamo ora la **certezza** che un regolatore proporzionale, opportunamente tarato, risolve il problema di controllo.

Il sistema a ciclo chiuso è rappresentato dalle **FdT set-point uscita**

$$W_r^y(s) = \frac{2K_R}{s + 1 + 2K_R} = \frac{\mu_1}{1 + sT_1} \quad \mu_1 = W_r^y(0) = \frac{2K_R}{1 + 2K_R} \quad T_1 = \frac{1}{1 + 2K_R}$$

e **disturbo-uscita**

$$W_\xi^y(s) = \frac{2}{s + 1 + 2K_R} = \frac{\mu_2}{1 + sT_1} \quad \mu_2 = W_\xi^y(0) = \frac{2}{1 + 2K_R} \quad T_2 = T_1 = \frac{1}{1 + 2K_R}$$

Polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso con regolatore proporzionale

$$P_{car}(s) = s + 1 + 2K_R$$

Il polo p_{cc} a ciclo chiuso assume il seguente valore in dipendenza dal guadagno K_R

$$p_{cc} = -(1 + 2K_R)$$

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo dell'2%
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 95%

Le specifica **S1** corrisponde al soddisfacimento della relazione:

$$W_r^y(0) \geq 0.98 \quad \Rightarrow \quad \frac{2K_R}{1 + 2K_R} \geq 0.98 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 24.5$$

Le specifica **S2** corrisponde al soddisfacimento della relazione:

$$W_\xi^y(0) \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1 + 2K_R} \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 19.5$$

Il vincolo più stringente deriva dalla specifica S1

E' consigliabile scegliere un valore incrementato di una certa percentuale per compensare possibili variazioni parametriche sfavorevoli

- S3. Risposta al gradino monotona crescente
- S4. Tempo di assestamento al 5% della risposta al gradino non superiore a **0.04** secondi

La specifica **S3** è soddisfatta da qualunque valore del guadagno K_R perché il polo a ciclo chiuso è sempre reale negativo

La valutazione della specifica **S4** richiede l'impiego della relazione che lega il Tempo di assestamento al 5% della risposta al gradino con la costante di tempo del polo a ciclo chiuso. Poiché con un regolatore proporzionale abbiamo un **unico polo a ciclo chiuso**, la relazione da impiegare è:

$$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} \quad \Rightarrow \quad T_{a5\%} = 3T < 0.04$$

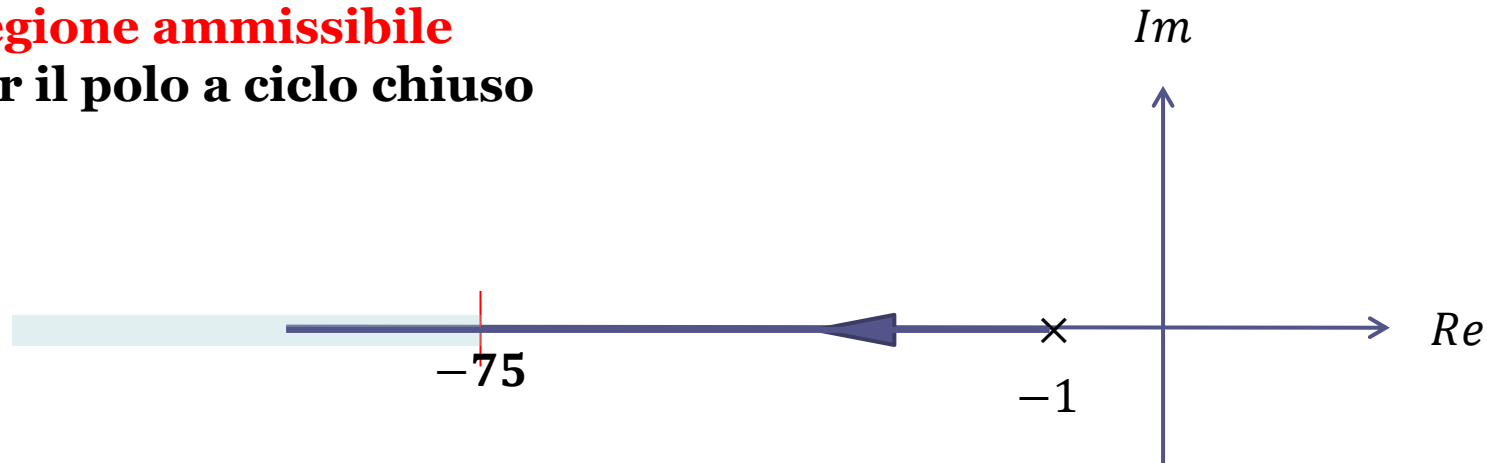
La costante di tempo della FdT $W_r^y(s)$ a ciclo chiuso è $T = T_1 = \frac{1}{1+2K_R}$

$$3T_1 = \frac{3}{1 + 2K_R} \leq 0.04 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 37$$

Il vincolo $3T \leq 0.04$ può essere interpretato in termini di un **vincolo sulla posizione del polo** $p = -\frac{1}{T}$ della FdT a ciclo chiuso

$$3T \leq 0.04 \quad \Rightarrow \quad T \leq 0.0133 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{1}{T} \leq -75$$

Regione ammissibile per il polo a ciclo chiuso



Scegliendo $K_R \geq 37$ si fa in modo che il polo p_{cc} della FdT a ciclo chiuso (che è $p_{cc} = -(1 + 2K_R)$) sia collocato all'interno della regione ammissibile (che è il segmento dell'asse reale che parte dal punto -75 a va verso meno infinito).

L'esercizio è quindi risolto da un regolatore proporzionale con guadagno $K_R \geq 37$