CALCOLO DIFFERENZIALE:

LE DERIVATE

La derivata è uno strumento potente che può essere applicato in svariate discipline come fisica, ingegneria, economia e scienze naturali. Grazie alla derivata possiamo studiare come una funzione varia in un determinato punto, il che ci consente di ottenere informazioni preziose per la risoluzione di problemi in questi ambiti.

Lo studio del calcolo differenziale e della derivata è quindi essenziale per una comprensione approfondita di molti fenomeni e processi che ci circondano. Questa branca della matematica ci fornisce gli strumenti necessari per analizzare, comprendere e prevedere il comportamento di diverse funzioni e sistemi.

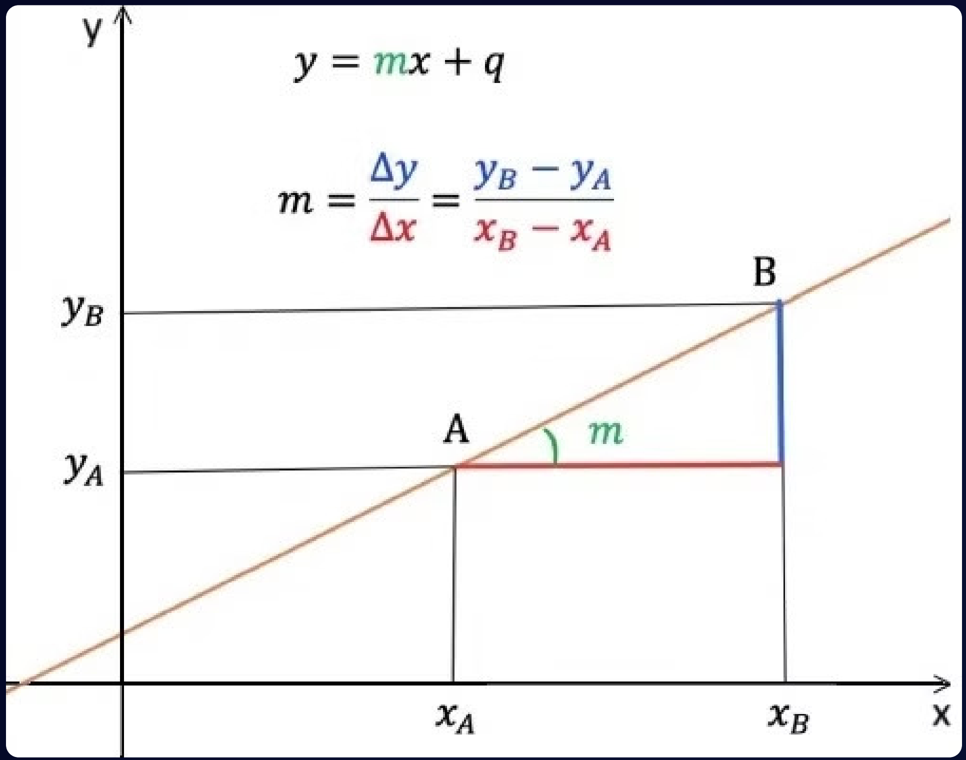
La derivata può anche essere utilizzata per l'ottimizzazione di una funzione. Attraverso l'analisi dei punti critici e dei punti di flesso, possiamo determinare i massimi e minimi di una funzione, fornendo così soluzioni ottimali per problemi di massimizzazione o minimizzazione. L'utilizzo della derivata nella fase di ottimizzazione è fondamentale in molti campi, come ad esempio l'economia nella determinazione dei prezzi di equilibrio o l'ingegneria nella progettazione di sistemi efficienti.

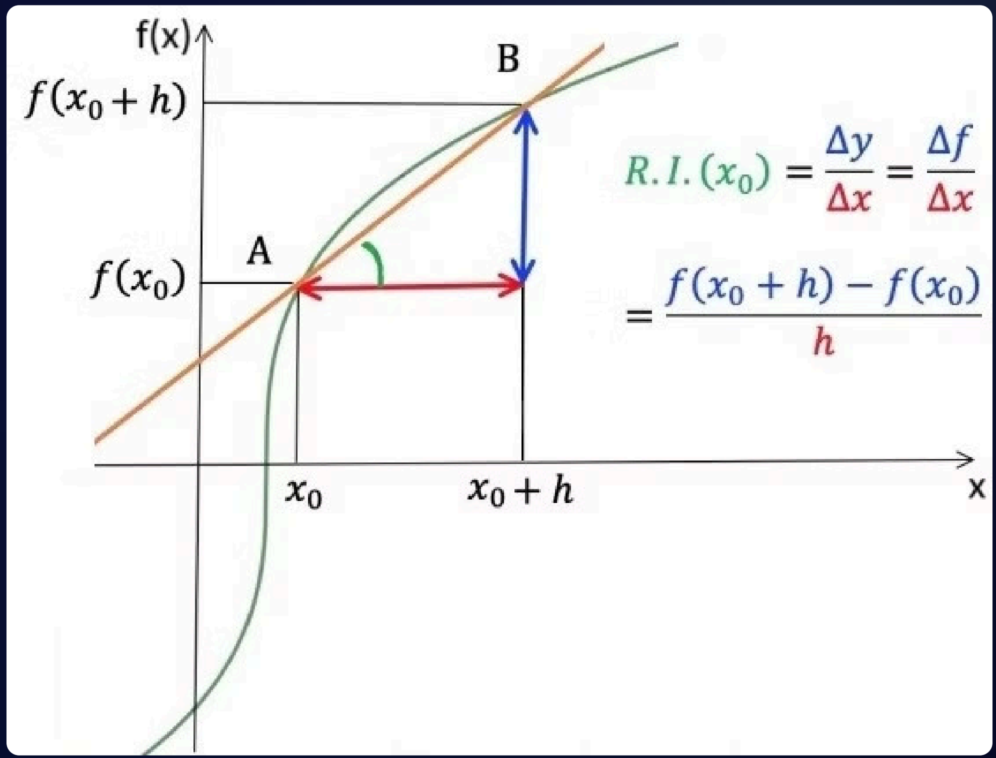
Rapporto incrementale

Il rapporto incrementale è il primo passo per comprendere il concetto di derivata. Esso misura il tasso di variazione media di una funzione in un intervallo finito.

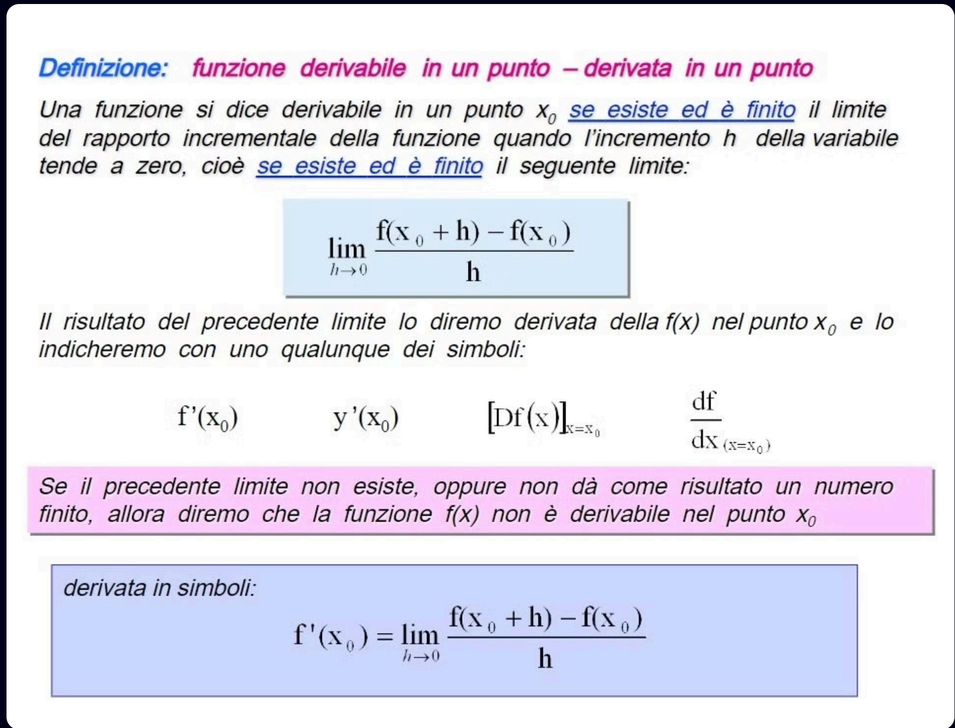
Formalmente, il rapporto incrementale tra due punti x e x+h sulla curva di una funzione f(x) è definito come [f(x+h) - f(x)]/h.

Questo rapporto fornisce una stima del comportamento della funzione nell'intorno del punto x e rappresenta geometricamente il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto x. Più precisamente, se h si avvicina a zero, il rapporto incrementale si avvicina alla pendenza della tangente al punto x, che corrisponde alla derivata di f(x) nel punto x..





Definizione di derivata



Definizione: funzione derivabile in un punto – derivata in un punto

Una funzione si dice derivabile in un punto x_0 se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale della funzione quando l'incremento h della variabile tende a zero, cioè se esiste ed è finito il seguente limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Il risultato del precedente limite lo diremo derivata della f(x) nel punto x_0 e lo indicheremo con uno qualunque dei simboli:

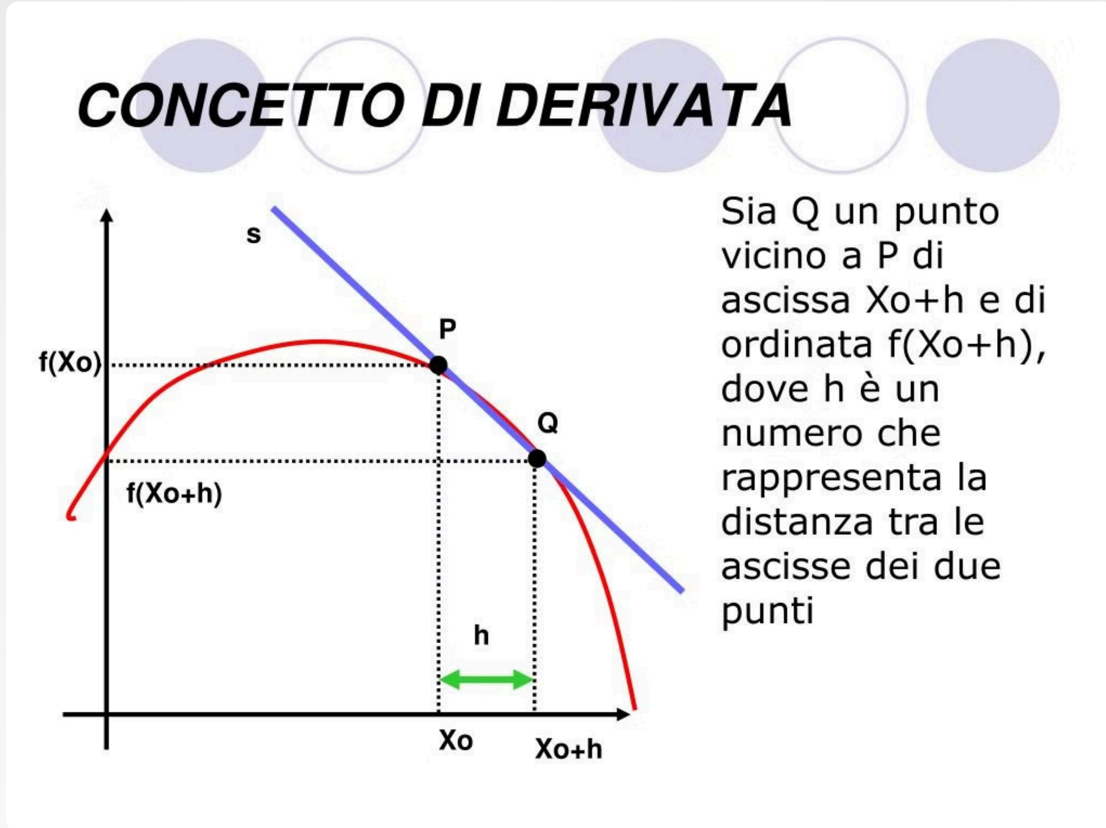
$$f'(x_0) \qquad y'(x_0) \qquad [Df(x)]_{x=x_0} \qquad \frac{df}{dx}_{(x=x_0)}$$

Se il precedente limite non esiste, oppure non dà come risultato un numero finito, allora diremo che la funzione f(x) non è derivabile nel punto x_0

derivata in simboli:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata di una funzione f(x) in un punto x è definita come il limite del rapporto incrementale quando l'intervallo h tende a zero. Questo limite, quando esiste, rappresenta il tasso di variazione istantaneo della funzione nel punto x, ovvero la pendenza della tangente alla curva in quel punto.

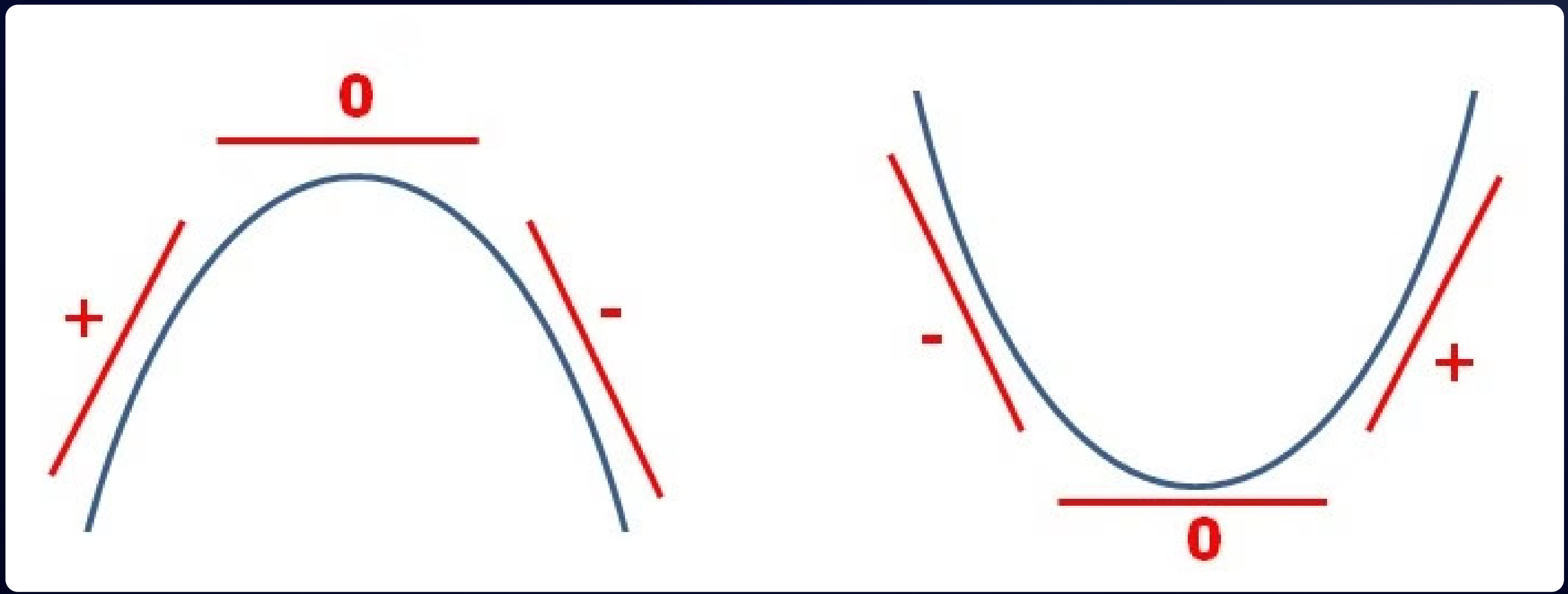


Il segno della derivata prima - Estremi relativi

Il segno della derivata prima determina se la funzione è crescente o decrescente in un intorno di quel punto: infatti, se la derivata è positiva, la funzione sta crescendo, mentre se la derivata è negativa, la funzione sta decrescendo. Se la derivata è nulla, la funzione è costante in quell'intorno.

Gli estremi relativi di una funzione si trovano nel punto in cui la derivata si annulla (tangente orizzontale). Studiando il segno della derivata prima della funzione, è possibile capire se nel punto di annullamento della derivata la funzione ha un MASSIMO (derivata che passa da positiva a negativa) o un MINIMO (derivata che passa da negativa a positiva).

Gli estremi relativi si riferiscono agli estremi di una funzione all'interno di un intervallo specifico di definizione, mentre gli estremi assoluti sono i valori più alti e più bassi dell'intera funzione su tutto il dominio.

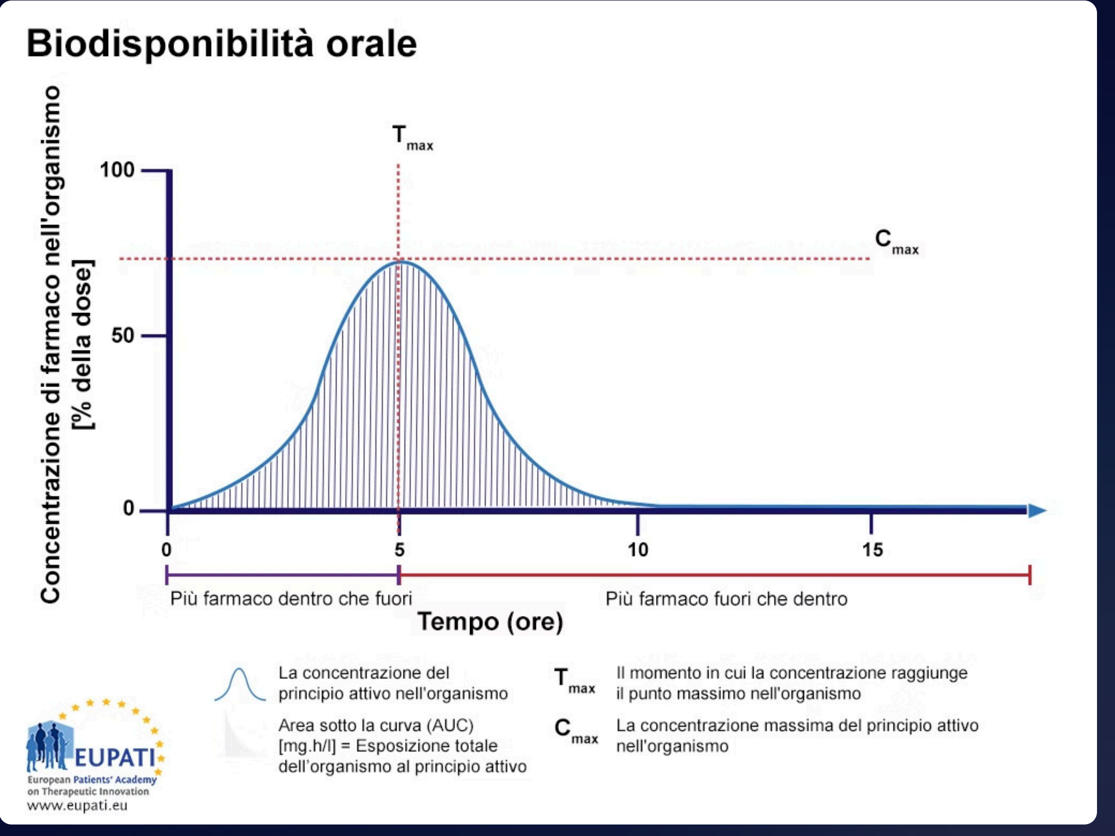


Significato fisico della derivata - Ottimizzazione

Nella fisica, la derivata assume un significato fisico particolarmente importante. Ad esempio, se la funzione f(t) rappresenta la posizione di un oggetto in funzione del tempo t, la sua derivata f'(t) rappresenta la velocità istantanea dell'oggetto in quel momento. Analogamente, se f(t) è la velocità, la sua derivata f'(t) rappresenta l'accelerazione. La derivata quindi quantifica il tasso di variazione di grandezze fisiche fondamentali come posizione, velocità e accelerazione.

Questa proprietà della derivata la rende estremamente utile nell'analisi di fenomeni fisici, permettendo di studiare come le quantità misurabili cambiano nel tempo. Conoscere il valore della derivata in un determinato istante fornisce informazioni cruciali sulla dinamica del sistema in esame.

La derivata prima di una funzione è uno strumento fondamentale del calcolo differenziale. Essa ci permette di determinare come la funzione varia al variare della variabile indipendente. Utilizzando la derivata prima, possiamo identificare i punti in cui la funzione raggiunge massimi e minimi relativi. Questa informazione è essenziale per comprendere la natura del sistema e ottenere il valore ottimale della grandezza desiderata mediante uno studio di OTTIMIZZAZIONE.



Proprietà delle derivate

regole di derivazione	
$D\, k \cdot f(x) = k \cdot f'(x)$	prodotto di una **costante** k per una funzione
$D\, f(x) \pm g(x) \pm h(x) = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$	**somma** di due o più funzioni
$D\, f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	**prodotto** di due funzioni
$D\, \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$	**rapporto** di due funzioni
$Df[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$	funzione **composta**

$$y = (3x^2 + 1)(2x + 5)$$
$$y' = 6x(2x + 5) + 2(3x^2 + 1) = 18x^2 + 30x + 2$$

$$y = 5x^2 \sin x$$
$$y' = 10x \sin x + 5x^2 \cos x$$

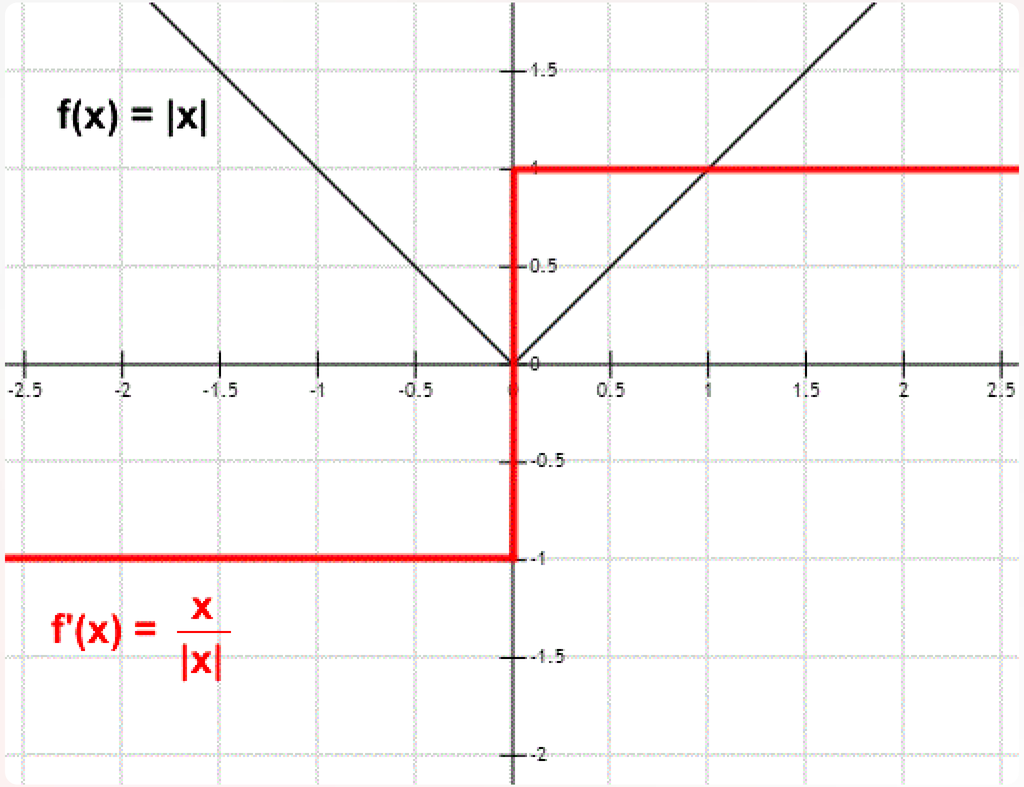
$$y = x \log x$$
$$y' = \log x + \frac{1}{x} \cdot x = \log x + 1$$

Funzione (forma elementare)	Derivata funzione elementare	Funzione (forma composta)	Derivata funzione composta
$k, \quad k \in \mathbb{R}$	0		
$x^n, \quad n \neq -1$	nx^{n-1}	$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln f(x)$	$\dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\log_a f(x)$	$\dfrac{1}{f(x) \ln a} \cdot f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos f(x)$	$-\sin f(x) \cdot f'(x)$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\cot f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin f(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos f(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan f(x)$	$\dfrac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)$
$arc\cot x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$arc\cot f(x)$	$-\dfrac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)$

Continuità e derivabilità

Una fondamentale proprietà delle funzioni derivabili è che esse sono anche continue. Tuttavia, il viceversa non è sempre vero: esistono funzioni continue che non sono derivabili in certi punti. Ciò accade ad esempio in punti di **cuspide**, dove la funzione presenta una discontinuità della derivata. Queste situazioni richiedono un'analisi più approfondita per comprendere il comportamento della funzione.

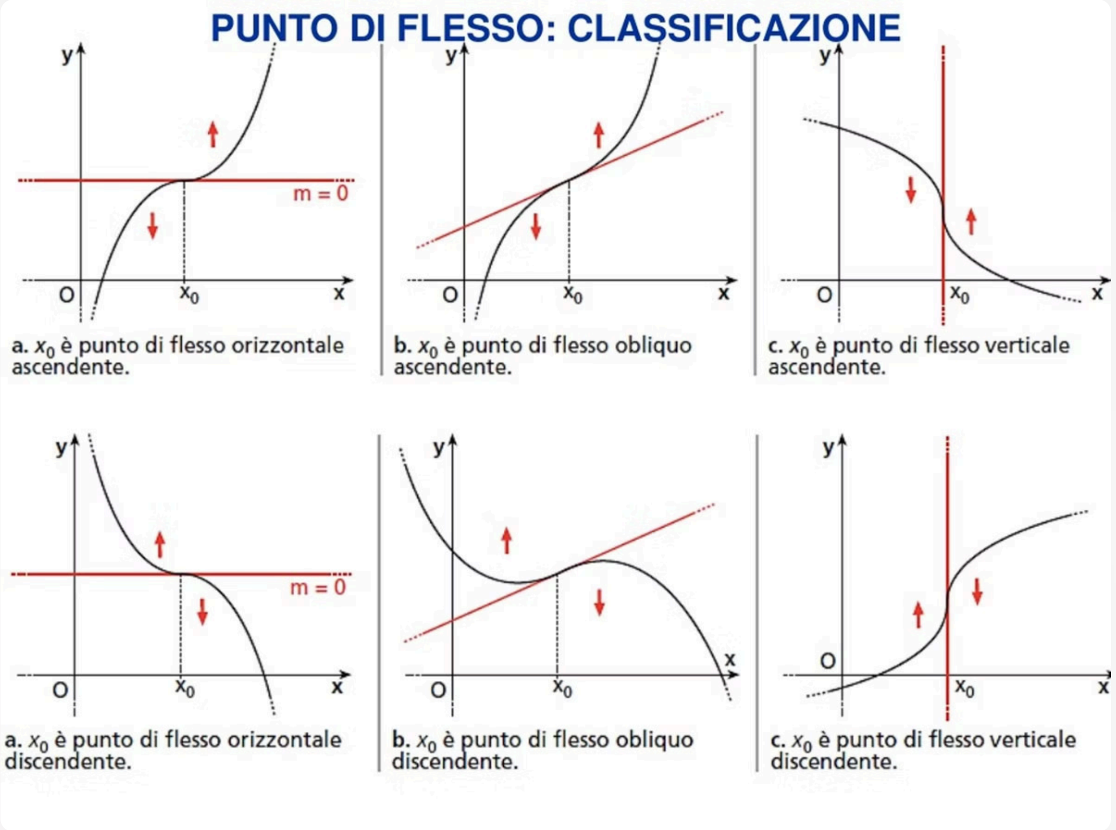
Un esempio tipico è quello della funzione *valore assoluto*, la quale è continua in ogni punto dell'asse reale, ma non è derivabile nel punto angoloso. Infatti, la sua derivata presenta un salto in questo punto, indicando la presenza di una cuspide. Ciò significa che la funzione valore assoluto non ha una tangente definita in questo punto.



Derivata seconda

La derivata seconda di una funzione descrive il tasso di variazione della derivata prima. Essa fornisce informazioni sulla concavità e sull'eventuale presenza di punti di flesso della curva rappresentata dalla funzione. Ad esempio, se la derivata seconda è positiva in un certo intervallo, la funzione è convessa (concavità positiva) in quell'intervallo, mentre se è negativa, la funzione è concava (concavità positiva).

I **punti di flesso** (o **flessi**) sono i punti in cui la concavità della curva cambia. In questi punti, la derivata seconda si annulla. Quindi, se la derivata seconda cambia segno in un punto, allora si ha un punto di flesso.



Teorema di de l'Hôpital

Il **teorema di de l'Hôpital** è un importante risultato nel calcolo differenziale che ci permette di determinare il limite di una forma indeterminata del tipo 0/0 o ∞/∞ utilizzando le derivate delle funzioni coinvolte. Esso afferma che se il rapporto tra le derivate delle due funzioni tende ad una forma indeterminata, allora il limite del rapporto delle funzioni originali sarà uguale al limite del rapporto delle loro derivate. Questo teorema è particolarmente utile nel calcolo di limiti che coinvolgono funzioni complicate o non direttamente valutabili. La regola può essere utilizzata ricorsivamente.

I intorno di x_0, $f(x)$, $g(x)$ derivabili in $I \setminus \{x_0\}$;

$$\left.\begin{array}{l} g'(x) \neq 0 \quad \text{in } I \setminus \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \,|\, \infty \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen}(x)} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - (-e^{-x}) - 2}{1 - \cos(x)}$$

$$\overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - (-e^{-x})}{\cos(x)}$$

$$= \frac{e^0 + e^{-0}}{\cos(0)} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Studio qualitativo di una funzione

Lo studio qualitativo di una funzione è un passaggio fondamentale per comprenderne il comportamento e le principali caratteristiche. Questa analisi ci aiuta a comprendere a fondo il suo andamento e le sue proprietà, ed è un prerequisito essenziale per affrontare analisi più approfondite e applicazioni pratiche.

1. **Determinare il dominio:** L'insieme dei valori della variabile indipendente per cui la funzione è definita.
2. **Individuare punti di discontinuità:** Valori della variabile indipendente per cui la funzione non è definita o presenta un salto.
3. **Intersezioni con gli assi:** Determinare l'esistenza dei punti di intersezione con l'asse x e l'asse y.
4. **Analizzare il segno della funzione:** Determinare in quali intervalli la funzione assume valori positivi o negativi.
5. **Studiare l'andamento asintotico:** Identificare eventuali asintoti verticali, orizzontali o obliqui e descrivere il comportamento della funzione in prossimità di essi.
6. **Analizzare il segno della derivata prima:** Determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente ed i punti di massimo e minimo della funzione.
7. **Analizzare il segno della derivata seconda:** Determinare gli intervalli in cui la funzione è concava verso l'alto o verso il basso e trovare gli eventuali punti di flesso.
8. **Disegnare il grafico probabile della funzione.**

Esempio