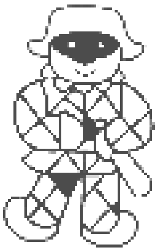
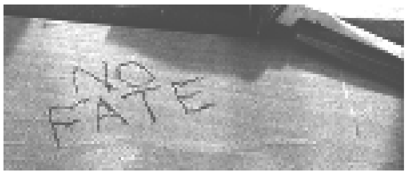




La δ di Dirac, e altre distribuzioni

prof. Antonio Greco
http://people.unica.it/antoniogreco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Cagliari

11-5-2025

Alla memoria del prof. Franco Mandras
(1942 – 2011)

Indice

Indice

Motivazioni

A che serve lo studio della teoria delle distribuzioni

1) A dialogare con gli altri matematici e a comprendere i testi.

Infatti gli elementi della teoria fanno parte delle conoscenze comuni a tutti i matematici.

2) A prepararsi per un eventuale proseguimento degli studi.

Infatti la teoria delle distribuzioni interviene nello studio delle equazioni alle derivate parziali.

3) A sopperire all'inadeguatezza delle funzioni.

Infatti le funzioni di una variabile reale non sono atte, ad esempio, a descrivere la densità materiale di una distribuzione puntiforme di massa.

4) A consolidare la propria preparazione di base.

Infatti lo studio delle distribuzioni è un'occasione per studiare da un punto di vista superiore il concetto di limite.

5) A sviluppare la capacità di affrontare i problemi.

Questo è forse il motivo più valido, che va ben al di là dei contenuti del programma.

Le immagini in copertina

L'immagine di Arlecchino sulla copertina di questa dispensa allude alla famosa commedia intitolata "Il servitore di due padroni": intendo infatti impostare il corso in modo da rendere un servizio ad una platea studentesca diversificata.

Il ritaglio sulla destra, invece, è tratto dal film "Terminator 2" e ne riassume la morale: "No fate" significa "Il destino non esiste", nel senso che il futuro può essere cambiato.

Lo stesso concetto si può rendere in latino con "Est unusquisque faber ipse suae fortunae".

Nascita delle distribuzioni

La teoria delle distribuzioni riprende e sviluppa le idee pionieristiche di Sergej Sobolev (1908-89), Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), e dell'ing. Oliver Heaviside (1850–1925).

La teoria delle distribuzioni permette, fra l'altro, di definire rigorosamente la derivata della funzione $|x|$.

Come è naturale aspettarsi, la derivata di $|x|$ è la funzione segno di x, data da

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Come vedremo nelle prossime lezioni, il valore di $\operatorname{sgn} 0$ è irrilevante ai fini della teoria.

È possibile spingersi ancora più avanti, e, tramite la teoria delle distribuzioni, dire che la derivata della funzione $\operatorname{sgn}(x)$ è 2δ, dove δ denota la famosa distribuzione delta di Dirac.

Si noti, a questo proposito, che il teorema fondamentale del calcolo integrale applicato alla funzione $F(x) = \operatorname{sgn}(x)$ avrebbe bisogno di una funzione $f(x)$ che fosse nulla per $x \neq 0$ e il cui integrale su di un qualunque intervallo contenente l'origine valesse 2.

Tuttavia, una funzione $f(x)$ con le due proprietà anzidette non esiste.

La definizione della distribuzione δ, e delle altre distribuzioni, utilizzata oggi è stata sviluppata nel trattato "Théorie des distributions" di Laurent Schwartz (1950).

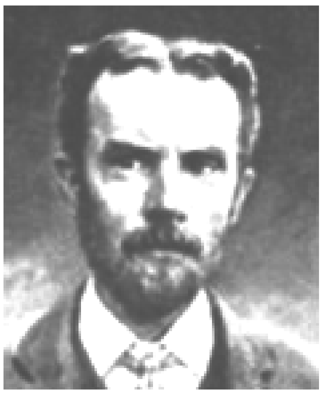
La teoria delle distribuzioni si è diffusa universalmente nella matematica in tempi relativamente recenti.

Ad esempio, il fondamentale trattato di Courant e Hilbert "Methods of mathematical physics", vol. 2, del 1962, si riferisce alle distribuzioni con l'appellativo di "funzioni ideali".

Le distribuzioni sono anche dette "funzioni generalizzate" (*generalized functions*), come ad esempio nei testi di Vladimirov, e nel famoso trattato di Gelfand e Shilov.

Sobolev

Dirac



Heaviside

La densità materiale di una distribuzione puntiforme di massa

Una delle più semplici interpretazioni fisiche della distribuzione δ di Dirac è la seguente.

Consideriamo una massa puntiforme $m_0 > 0$ collocata nell'origine di un sistema di riferimento xyz, e supponiamo che non vi siano altre masse nello spazio.

La densità materiale è la funzione $\mu(x, y, z)$ definita come segue.

Fissato il punto (x, y, z), si considera la sfera $B_r(x, y, z)$ centrata in (x, y, z) e di raggio r.

Indicata con $m(B_r(x, y, z))$ la massa racchiusa all'interno della sfera, si pone

$$\mu(x, y, z) = \lim_{r \to 0^+} \frac{m(B_r(x, y, z))}{|B_r(x, y, z)|}, \qquad (1)$$

dove $|B_r(x, y, z)| = \frac{4}{3}\pi r^3$ denota il volume di $B_r(x, y, z)$.

Applichiamo tale definizione alla distribuzione data.

Distinguiamo due casi: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ e $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Nel primo caso, il numeratore nella (1) si riduce a

$$m(B_r(0, 0, 0)) = m_0.$$

Siccome il denominatore tende a 0^+, si conclude che $\mu(0, 0, 0) = +\infty$.

Se, invece, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, allora il numeratore nella (1) è definitivamente nullo: più precisamente, è nullo per ogni $r > 0$ tale che

$$r < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Per la definizione di limite, si trova dunque $\mu(x, y, z) = 0$. In conclusione, possiamo scrivere

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} +\infty, & (x, y, z) = (0, 0, 0); \\ 0, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0). \end{cases}$$

Interpretando la densità materiale μ come la distribuzione $m_0\,\delta$, anziché come la funzione suddetta, è possibile dar senso alla seguente uguaglianza:

$$m_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

la quale esprime la massa m_0 come l'integrale della densità μ.

Un esempio più sofisticato è quello del dipolo elettrico a pag. D34.

Funzioni test

LA DEFINIZIONE DI LAURENT SCHWARTZ

Le distribuzioni si definiscono come funzioni il cui dominio non è l'insieme dei numeri reali, ma è un opportuno insieme di funzioni: lo spazio $\mathcal{D}$ appresso definito.

LO SPAZIO $C^\infty(\mathbb{R})$

Con $C^\infty(\mathbb{R})$ si denota l'insieme di tutte le funzioni aventi per dominio l'insieme $\mathbb{R}$, e di classe C^∞, cioè dotate delle derivate di tutti gli ordini.

Ad esempio, **SONO** elementi di $C^\infty(\mathbb{R})$ le funzioni:

e^x,

$\operatorname{sen} x$,

$\cos x$,

le costanti,

e tutti i polinomi.

Invece, **NON SONO** elementi di $C^\infty(\mathbb{R})$:

la funzione $1/x$ (perché non è definita per $x = 0$), e

la funzione $|x|$ (perché non è derivabile per $x = 0$).

IL SUPPORTO DI UNA FUNZIONE

Il supporto di una $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si denota con $\operatorname{supp} f$, e si può definire nei seguenti due modi, equivalenti fra loro.

1. La chiusura dell'insieme $\{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \,\}$ di tutti i punti dove f è diversa da zero:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \,\}}$$

2. Il complementare del più grande aperto $A \subset \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in A$.

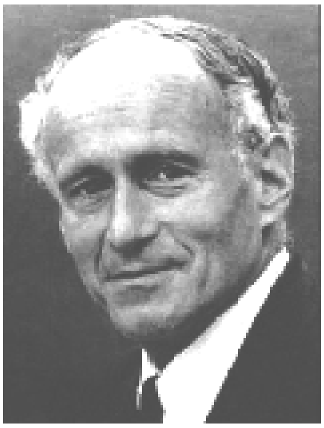
Dalla definizione segue immediatamente che il supporto di una qualunque funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è un insieme chiuso.

ESEMPI

$\operatorname{supp} e^x = \mathbb{R}$

$\operatorname{supp} \operatorname{sen} x = \mathbb{R}$

$\operatorname{supp}(x + |x|) = [0, +\infty)$



Laurent Schwartz

PARTE POSITIVA E PARTE NEGATIVA DI UNA FUNZIONE

Data una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la sua parte positiva è la funzione indicata con f^+ e definita come segue: $f^+(x) = \max\{ f(x), 0 \}$, oppure, equivalentemente:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0; \\ 0, & \text{se } f(x) < 0, \end{cases}$$

o anche

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}.$$

La parte negativa, indicata con f^-, si può definire ponendo $f^-(x) = \max\{ -f(x), 0 \} = -\min\{ f(x), 0 \}$, oppure, equivalentemente:

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) \leq 0; \\ 0, & \text{se } f(x) > 0. \end{cases}$$

o anche

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Dalle definizioni risulta che sia la parte positiva, sia la parte negativa sono funzioni non negative.

Risulta, inoltre, che la funzione f di partenza si può ricostruire a partire da f^+ ed f^-: si ha, infatti,

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Risulta, infine, che il valore assoluto di f si può esprimere come segue:

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

LO SPAZIO $C_c^\infty(\mathbb{R})$

Si denota con $C_c^\infty(\mathbb{R})$ il sottoinsieme di $C^\infty(\mathbb{R})$ costituito dalle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ ed il cui supporto sia limitato.

Poiché $\operatorname{supp} f$ è chiuso, esso è limitato se e solo se è compatto (lemma di Heine-Borel).

Dunque possiamo dire, equivalentemente, che $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è il sottoinsieme di $C^\infty(\mathbb{R})$ costituito dalle funzioni a supporto compatto.

L'indice c nel simbolo $C_c^\infty(\mathbb{R})$ viene dall'iniziale della parola "compatto" (compact, in inglese).

Esempio: il supporto della funzione $f(x) = (1 - x^2)^+$ è l'intervallo $[-1, 1]$, dunque è compatto.

Tuttavia, tale funzione non appartiene allo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ perché non è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$: infatti non è derivabile nei punti $x = -1$ e $x = 1$.

Una tipica funzione appartenente a $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è la seguente, detta "funzione a campana" (*bump function*):

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } x \in (-1, 1); \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \end{cases} \tag{2}$$

La suddetta funzione può servire anche per approssimare altre funzioni, usando la cosiddetta tecnica dei "mollificatori", attribuita a Kurt Otto Friedrichs (1901–1982).

LO SPAZIO $\mathcal{D}$

Lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ diventa lo spazio $\mathcal{D}$ delle cosiddette "funzioni test" quando si considera, in esso, la seguente nozione di convergenza.

Si dice che una successione di funzioni $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ converge ad una funzione $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, e si scrive

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$$

quando sono soddisfatte tutte e tre le seguenti condizioni:

1. Esiste un opportuno intervallo limitato che contiene tutti i supporti $\operatorname{supp}\varphi_n$;

2. Le funzioni φ_n convergono uniformemente a φ, sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$, per $n \to +\infty$;

3. Qualunque sia l'ordine k di derivazione, la derivata k-esima $\varphi_n^{(k)}$ converge uniformemente a $\varphi^{(k)}$, sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$, per $n \to +\infty$.

Volendo, si può includere la seconda condizione nella terza consentendo all'indice k, in quest'ultima, di assumere il valore zero.

$\mathcal{D}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE

Si noti che $C^\infty(\mathbb{R})$ e $\mathcal{D} = C_c^\infty(\mathbb{R})$ sono spazi vettoriali rispetto alle usuali operazioni di: somma di due funzioni, e moltiplicazione di una funzione per un numero reale. Il vettore nullo è la funzione $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

LA TOPOLOGIA DI $\mathcal{D}$

È possibile definire un sistema di intorni (una topologia) dello spazio $\mathcal{D}$ rispetto al quale la nozione convergenza di una successione di $\varphi_n \in \mathcal{D}$ sia proprio quella che abbiamo appena dato.

La definizione si può trovare, ad esempio: nella dispensa di Pratelli, nel libro di Yosida, ed in altri testi citati in bibliografia.

Per procedere, definiamo innanzitutto gli intorni di base $\mathcal{U}_{k,r}(\varphi_0)$ della funzione nulla $\varphi_0 = 0$ ponendo, per ogni funzione $k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ed ogni funzione $r\colon \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}_{k,r}(\varphi_0)\\ &\quad= \{\, \varphi \in \mathcal{D} \mid \forall z \; \|\varphi\|_{C^{k(z)}([z,z+1])} < r(z) \,\}.\end{aligned}$$

Dopodiché rimangono definiti gli intorni di base $\mathcal{U}_{k,r}(\psi)$ di qualunque funzione $\psi \in \mathcal{D}$ ponendo

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{k,r}(\psi) &= \psi + \mathcal{U}_{k,r}(\varphi_0)\\ &= \{\, \varphi \in \mathcal{D} \mid \varphi - \psi \in \mathcal{U}_{k,r}(\varphi_0) \,\}.\end{aligned}$$

Gli intorni di base determinano, come di consueto, la topologia i cui aperti sono le unioni dei suddetti intorni.

La suddetta topologia non ha una base numerabile di aperti: vedere Schwartz, Théorie des distributions, capitolo III, §1.

PROPRIETÀ DELLA BASE DI INTORNI

Verifichiamo che gli intorni definiti alla pagina precedente costituiscono una base per una topologia.

Verifichiamo, cioè, che l'intersezione di due intorni come sopra definiti si può anche ottenere come unione di intorni opportuni.

Consideriamo una funzione test $\psi_1 \in \mathcal{D}$ ed una coppia di funzioni $k_1 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ e $r_1 \colon \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$, che determinano l'intorno $\mathcal{U}_{k_1,r_1}(\psi_1)$.

Similmente, consideriamo una funzione test $\psi_2 \in \mathcal{D}$ ed una coppia di funzioni $k_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ e $r_2 \colon \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$, che determinano l'intorno $\mathcal{U}_{k_2,r_2}(\psi_2)$.

Indicata con ψ una funzione appartenente all'intersezione $\mathcal{U}_{k_1,r_1}(\psi_1) \cap \mathcal{U}_{k_2,r_2}(\psi_2)$, ammesso che ce ne sia una, vogliamo trovare un intorno $\mathcal{U}_{k,r}(\psi)$ incluso in tale intersezione.

Basterà prendere, per ogni $z \in \mathbb{Z}$, $k(z) = \max\{\, k_1(z),\, k_2(z) \,\}$ e $r(z) = \min\{\, \delta_1(z),\, \delta_2(z) \,\}$, dove per $i = 1, 2$

$$\delta_i(z) = r_i(z) - \|\psi - \psi_i\|_{C^{k_i(z)}([z,\, z+1])} > 0.$$

Verifichiamo l'inclusione $\mathcal{U}_{k,r}(\psi) \subset \mathcal{U}_{k_1,r_1}(\psi_1)$. Se $\varphi \in \mathcal{U}_{k,r}(\psi)$, si ha per definizione

$$\begin{aligned} \|\varphi - \psi\|_{C^{k(z)}([z,\, z+1])} &< r(z) \le \delta_1 \\ &= r_1(z) - \|\psi - \psi_1\|_{C^{k_1(z)}([z,\, z+1])}. \end{aligned} \tag{3}$$

Inoltre, essendo $k_1(z) \le k(x)$, si ha ovviamente

$$\|\varphi - \psi\|_{C^{k_1(z)}([z,\, z+1])} \le \|\varphi - \psi\|_{C^{k(z)}([z,\, z+1])}$$

e quindi dalla (3) ricaviamo

$$\begin{aligned} &\|\varphi - \psi\|_{C^{k_1(z)}([z,\, z+1])} \\ &< r_1(z) - \|\psi - \psi_1\|_{C^{k_1(z)}([z,\, z+1])}. \end{aligned}$$

Applicando ora la disuguaglianza triangolare, arriviamo a

$$\|\varphi - \psi_1\|_{C^{k_1(z)}([z,\, z+1])} < r_1(z).$$

Per l'arbitrarietà di z, possiamo concludere che $\varphi \in \mathcal{U}_{k_1,r_1}(\psi_1)$, dunque sussiste l'inclusione $\mathcal{U}_{k,r}(\psi) \subset \mathcal{U}_{k_1,r_1}(\psi_1)$, come affermato.

In modo del tutto analogo si verifica che $\mathcal{U}_{k,r}(\psi) \subset \mathcal{U}_{k_2,r_2}(\psi_2)$, dunque gli intorni definiti alla pagina precedente costituiscono una base per una topologia.

EQUIVALENZA DELLE DEFINIZIONI

Se una successione di funzioni test $\varphi_n \in \mathcal{D}$ converge rispetto alla topologia dianzi costruita, allora sono soddisfatte le tre condizioni date a pagina D12.

Per la dimostrazione, consideriamo una successione di $\varphi_n \in \mathcal{D}$ convergente ad una certa $\psi \in \mathcal{D}$ rispetto alla topologia anzidetta.

Allora, per la definizione degli intorni $\mathcal{U}_{kr}(\psi)$, la successione $(\varphi_n - \psi)$ converge alla funzione nulla.

Senza ledere la generalità, supponiamo direttamente che φ_n converga alla funzione nulla.

Prima parte (condizione 1)

Vogliamo dimostrare che esiste un intervallo limitato che contiene $\operatorname{supp} \varphi_n$ per ogni n.

Supponiamo per assurdo che un tale intervallo non esista. Allora esistono una successione di interi z_i, a due a due disgiunti, una successione di indici n_i ed una successione di punti $x_i \in [z_i,\, z_i + 1]$ tali che $\varphi_{n_i}(x_i) \neq 0$ per ogni $i \in \mathbb{Z}^+$.

Ma allora definiamo $k(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$, e prendiamo $r(z)$ tale che $r(z_i) < |\varphi_{n_i}(x_i)|$ per ogni i.

Per via di quest'ultima disuguaglianza, l'intorno $\mathcal{U}_{kr}$ della funzione nulla non contiene definitivamente le funzioni φ_n, contro l'ipotesi della convergenza.

Seconda parte (condizioni 2 e 3)

Abbiamo dimostrato che esiste un intervallo limitato che contiene $\operatorname{supp} \varphi_n$ per ogni n.

Tale intervallo è a sua volta contenuto in un intervallo $[a,\, b+1]$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a \leq b$.

Poiché gli interi $z \in [a, b]$ sono in numero finito, e poiché i valori di $k(z)$ e di $r(z)$, per l'ipotesi di convergenza, possono essere scelti arbitrariamente, si deduce che anche le condizioni 2 e 3 sono soddisfatte.

Implicazione inversa

Supponiamo che le φ_n soddisfino le condizioni 1, 2 e 3. Senza ledere la generalità, possiamo supporre che la funzione limite φ sia la funzione nulla.

Per la condizione 1, possiamo supporre $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [a, b + 1]$ con a, $b \in \mathbb{Z}$ e $a \leq b$.

Fissate arbitrariamente le funzioni $k(z)$ e $r(z)$, poiché gli $z \in [a, b]$ sono in numero finito, possiamo prendere

$$\overline{k} = \max_{z \in [a,b]} k(z), \qquad \overline{r} = \min_{z \in [a,b]} r(z) > 0.$$

Per le condizioni 2 e 3, avremo definitivamente $\|\varphi_n\|_{C^{\overline{k}}([a,b])} < \overline{r}$, dunque $\varphi_n \in \mathcal{U}_{k,r}$ e la convergenza è dimostrata.

Non metrizzabilità di $\mathcal{D}$

Lo spazio $\mathcal{D}$ dotato della topologia anzidetta non è metrizzabile, e costituisce uno spazio vettoriale topologico.

Tali spazi sono ampiamente trattati nei testi di Köthe e di Treves citati in bibliografia.

Per dimostrare la non metrizzabilità di $\mathcal{D}$ possiamo utilizzare la seguente condizione necessaria affinché uno spazio topologico sia metrizzabile:

se uno spazio topologico è metrizzabile, allora ogni successione di successioni, aventi tutte lo stesso limite ℓ, ammette una successione trasversale convergente ad ℓ.

Cioè, se $\lim_{n\to+\infty} \varphi_{nk} = \ell$ per ogni k, esiste una funzione $n(k)$ tale che

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_{n(k),k} = \ell. \qquad (4)$$

Dimostriamo innanzitutto che la condizione è necessaria. Se la topologia dello spazio considerato discende da una metrica d, allora per ogni k esiste $n(k)$ tale che

$$d(\varphi_{n(k),k},\, \ell) < \frac{1}{k}.$$

e la condizione (4) segue.

Adesso dimostriamo che lo spazio $\mathcal{D}$ non soddisfa la condizione necessaria.

Indicata con ψ la funzione a campana definita nella (2), poniamo $\varphi_{nk}(x) = \frac{1}{n}\,\psi(x/k)$.

Applicando le condizioni 1, 2 e 3 di convergenza in $\mathcal{D}$, si riconosce che

$$\lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n}\,\psi(x/k) = 0$$

per ogni k fissato, essendo $\ell = 0 \in \mathcal{D}$ la funzione identicamente nulla.

Tuttavia, comunque si prenda la funzione $n(k)$, non esiste nessun intervallo limitato che contenga tutti i supporti delle funzioni test $\frac{1}{n(k)}\,\psi(x/k)$, le quali dunque non convergono in $\mathcal{D}$.

Non essendo soddisfatta la condizione necessaria, possiamo concludere che la topologia di $\mathcal{D}$ non è metrizzabile, come affermato.

La dimostrazione si ispira alla dispensa di Freddi citata in bibliografia. Per approfondire l'argomento si possono consultare, ad esempio, le dispense di Hörmann-Steinbauer e di Semmes.

Lo spazio $\mathcal{D}'$

LE DISTRIBUZIONI DI SCHWARTZ

Le distribuzioni di Schwartz sono le funzioni $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ che risultano sia lineari, sia continue rispetto alla topologia dello spazio $\mathcal{D}$.

Si dimostra che un'applicazione lineare $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ è continua rispetto alla topologia di $\mathcal{D}$ se e solo se è sequenzialmente continua.

Deve dunque avvenire che

$$\lim_{n\to+\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$$

per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ e per ogni successione di funzioni test φ_n che sia convergente a φ nel senso dello spazio $\mathcal{D}$.

Lo spazio delle distribuzioni è, pertanto, il duale dello spazio $\mathcal{D}$, e si denota con $\mathcal{D}'$.

La distribuzione più banale è quella data da $T(\varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, la cui linearità e continuità si riconoscono immediatamente.

La distribuzione più semplice, non banale, è probabilmente quella data dall'operazione di integrazione:

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx.$$

La distribuzione più tipica, quella che giustifica la costruzione della teoria, è la delta di Dirac:

$$T(\varphi) = \varphi(0).$$

Quest'ultima distribuzione è ancora più semplice da definire rispetto alla precedente.

Resta da discutere il legame tra tale semplice definizione e l'idea intuitiva della δ di Dirac, cosa che faremo tra poco.

$\mathcal{D}'$ È UNO SPAZIO VETTORIALE

Lo spazio $\mathcal{D}'$ delle distribuzioni di Schwartz è uno spazio vettoriale, dove la distribuzione somma $T_1 + T_2$ di due distribuzioni T_1, T_2 è data da

$$(T_1 + T_2)(\varphi) = T_1(\varphi) + T_2(\varphi),$$

e la distribuzione prodotto λT di una distribuzione data T per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è definita da

$$(\lambda T)(\varphi) = \lambda\,(T(\varphi)).$$

Il ruolo del vettore nullo è giocato dalla distribuzione identicamente nulla $T(\varphi) \equiv 0$.

IL LEGAME FRA LA δ DI DIRAC ED IL δ DI KRONECKER

Il simbolo δ di Kronecker si denota con δ^{ij}, ed assume i seguenti valori:

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Tra le varie proprietà del δ di Kronecker, ci concentriamo sulla seguente, che assomiglia ad un'importante proprietà della δ di Dirac.

Ciascuna componente y_i di un vettore $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ soddisfa l'uguaglianza

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} \delta^{ij}\, y_j. \tag{5}$$

Il vettore y si può vedere come la funzione

$$\begin{aligned} y\colon \{\,1, \dots, N\,\} &\to \mathbb{R} \\ i &\mapsto y_i \end{aligned}$$

Cerchiamo di estendere la (5) ad una funzione $y(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Qui le variabili $x, t \in \mathbb{R}$ giocano il ruolo che nel caso precedente spetta agli indici $i, j = 1, \dots, N$.

Ci serve un'opportuna funzione, che indichiamo con δ, che dipende dalla differenza $x - t$, tale che

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t)\, y(t)\, dt. \tag{6}$$

Cerchiamo di capire come deve essere fatta la funzione $\delta(x-t)$ affinché valga la (6) qualunque sia la funzione $y(x)$ che vi compare.

A. Fissato un valore particolare di x, il primo membro della (6) non cambia se cambiamo i valori di $y(t)$ in ogni $t \neq x$.

Affinché valga l'uguaglianza, anche il secondo membro della (6) non deve cambiare se cambiamo i valori di $y(t)$ in ogni $t \neq x$.

Ma allora dobbiamo prendere $\delta(x-t) = 0$ se $x \neq t$, e cioè, in altri termini,

$$\delta(s) = 0 \text{ per ogni } s \neq 0. \tag{7}$$

B. Se poniamo $y(t) \equiv 1$ nella (6), troviamo

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t)\, dt.$$

Con la sostituzione $s = x - t$, possiamo scrivere

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\, ds. \tag{8}$$

La (7) e la (8) sono incompatibili tra loro. Forse è per questo che, negli anni sessanta, le distribuzioni venivano anche chiamate "funzioni ideali".

Dirac parla di "funzione impropria" nel cap. 3, par. 15, del suo libro "I principi della meccanica quantistica" (1958), edito in italiano dalla Boringhieri.

In particolare, la (6) corrisponde all'uguaglianza [15.3] del libro di Dirac, uguaglianza che egli chiama "la più importante proprietà di $\delta(x)$".

LA DEFINIZIONE RIVISITATA

La via di uscita dalla situazione di stallo descritta alla pagina precedente consiste in quanto segue.

1. Rinunciare alla pretesa che la δ di Dirac sia una funzione di una variabile reale.

2. La δ di Dirac non si usa da sola, cioè non si calcola $\delta(s)$ per qualche s particolare.

3. La δ di Dirac si usa solo sotto il segno di integrale, cioè in espressioni del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t)\, y(t)\, dt.$$

4. Il suddetto integrale è un'applicazione lineare nella variabile $y(t)$, cioè il suo argomento non è un solo numero, ma è tutta la funzione $y(t)$.

5. Il suddetto integrale è un'applicazione continua rispetto alla nozione di convergenza dello spazio $\mathcal{D}$.

6. Le distribuzioni, in generale, si definiscono come le applicazioni lineari e continue aventi per dominio lo spazio $\mathcal{D}$.

7. Con la sostituzione $s = x - t$, l'integrale precedente diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\, y(x-s)\, dt$$

e, per la (6), il suo valore deve essere $y(x)$.

Posto $x = 0$ e $\varphi(s) = y(-s)$, si deve perciò avere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\, \varphi(s)\, dt = \varphi(0).$$

Dunque la δ di Dirac è l'applicazione $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ data da $T(\varphi) = \varphi(0)$.

DISTRIBUZIONI REGOLARI

Consideriamo una qualunque funzione misurabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty$$

qualunqe siano gli estremi a e b di integrazione, purché finiti.

Si dice che f è "localmente sommabile", e si scrive

$$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

Tramite la funzione f si ottiene una distribuzione T ponendo

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx.$$

Si dice, in tal caso, che la distribuzione T è regolare, ed è "rappresentata" dalla funzione f.

DISTRIBUZIONI SINGOLARI

La distribuzione δ di Dirac, data da $T(\varphi) = \varphi(0)$, non è rappresentata da nessuna funzione $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$: è una distribuzione "singolare".

Lo si intuisce dalle considerazioni fatte a pag. D18. Vediamo una semplice dimostrazione ispirata al libro di Amerio (vol. 3 parte II), che a sua volta riprende il trattato di Schwartz.

Prendendo come funzioni test le funzioni $\varphi_n(x) = \psi(nx)$, dove ψ è come nella (2), si ha:

$$\begin{aligned} \delta(\varphi_n) &= \varphi_n(0) \\ &= \tfrac{1}{e}. \end{aligned}$$

Perciò se la δ di Dirac fosse rappresentata da una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, dovrebbe aversi, per ogni n,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \tfrac{1}{e}. \tag{9}$$

Mostriamo invece che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0. \tag{10}$$

A tal fine, applichiamo il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.

Innanzitutto, osserviamo che per ogni $x \neq 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f(x)\,\varphi_n(x) = 0$$

semplicemente perché $\varphi_n(x) = 0$ per $n > \frac{1}{|x|}$.

Inoltre, poiché $\varphi_n(x) \leq \frac{1}{e}$ per ogni x e per ogni n, possiamo scrivere

$$|f(x)\,\varphi_n(x)| \leq \tfrac{1}{e}\,|f(x)|.$$

Ma poiché per ipotesi $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, il secondo membro costituisce una maggiorante sommabile.

Essendo soddisfatte le ipotesi del teorema della converegenza dominata, si verifica la (10).

Poiché la (10) contrasta con la (9), si deduce che la δ di Dirac non è una distribuzione regolare, come volevasi dimostrare.

LA δ DI DIRAC CENTRATA IN x_0

Si chiama δ di Dirac centrata in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ la distribuzione così definita:

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0).$$

Dalla definizione segue immediatamente che $\delta_0 = \delta$.

La distribuzione δ_{x_0} si può anche indicare con $\delta(x-x_0)$, come si farebbe se fosse una funzione di variabile reale.

CONVERGENZA IN $\mathcal{D}'$

LA CONVERGENZA NEL SENSO DELLE DISTRIBUZIONI

Si dice che una successione di distribuzioni T_n converge ad una distribuzione T, e si scrive

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$$

se, per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ fissata, risulta

$$\lim_{n \to +\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi). \qquad (11)$$

Si noti che i valori di $T_n(\varphi)$ e di $T(\varphi)$ sono numeri reali, dunque il limite sopra indicato è il limite di una successione numerica.

Esempio banale: le successioni costanti sono convergenti.

Se, cioè, con T_n denotiamo sempre una stessa distribuzione T, allora la relazione (11) è banalmente verificata qualunque sia $\varphi \in \mathcal{D}$.

Esempio significativo: indichiamo con $\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $(0, \frac{1}{n})$, cioè la funzione

$$\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Le funzioni $f_n(x) = n\,\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$ sono localmente sommabili, dunque rappresentano delle distribuzioni, che indicheremo con T_n.

Verifichiamo che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$, essendo δ la distribuzione delta di Dirac: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

Osserviamo che la distribuzione T_n rappresentata dalla funzione f_n agisce come segue:

$$\begin{aligned} T_n(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx \\ &= n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\,dx. \end{aligned}$$

Per la (11), dobbiamo verificare che $T_n(\varphi) \to \varphi(0)$. A tal fine, applichiamo la definizione di limite.

Fissato $\varepsilon > 0$, per la continuità di $\varphi(x)$ nel punto $x = 0$ esiste un intervallo $(-r, r)$ tale che per ogni $x \in (-r, r)$ risulta

$$\varphi(0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(0) + \varepsilon.$$

Inoltre, quando $n > 1/r$, risulta $(0, \frac{1}{n}) \subset (-r, r)$.

Quindi, per $n > 1/r$, possiamo integrare sull'intervallo $(0, \frac{1}{n})$ i tre termini delle disuguaglianze precedenti, ottenendo

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n}\,(\varphi(0) - \varepsilon) &< \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\,dx \\ &< \tfrac{1}{n}\,(\varphi(0) + \varepsilon) \end{aligned}$$

o, che è lo stesso,

$$\begin{aligned} \varphi(0) - \varepsilon &< T_n(\varphi) \\ &< \varphi(0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dalla definizione di limite segue dunque che $T_n(\varphi) \to \varphi(0)$, come volevasi dimostrare.

LA CONVERGENZA PUNTUALE NON IMPLICA LA CONVERGENZA IN $\mathcal{D}'$

Consideriamo una successione di funzioni $f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ convergente puntualmente ad una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Le funzioni f_n e la funzione f rappresentano delle distribuzioni, che indicheremo con T_n e T.

Possiamo affermare che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$?

La risposta è negativa: per verificarlo, basta costruire almeno un controesempio.

Un controesempio è dato dalle funzioni $f_n(x) = n\,\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$ già considerate a pag. D22.

Sappiamo che le distribuzioni T_n rappresentate da tali funzioni f_n convergono in $\mathcal{D}'$ alla δ di Dirac.

D'altro canto, per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0. \tag{12}$$

Infatti, se $x \leq 0$ la conclusione è banale perché $f_n(x) = 0$ per ogni n.

Se, invece, $x > 0$, allora risulta $f_n(x) = 0$ per ogni $n > 1/x$, e la (12) segue dalla definizione di limite.

Dunque la successione delle funzioni f_n converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$, la quale a sua volta rappresenta la distribuzione $T(\varphi) \equiv 0$ e non la δ di Dirac.

LA CONVERGENZA LOCALMENTE UNIFORME IMPLICA LA CONVERGENZA IN $\mathcal{D}'$

Supponiamo ora che la successione di funzioni $f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ converga ad una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ uniformemente su ogni intervallo limitato $[a, b]$.

Indicate ancora con T_n e T le distribuzioni rappresentate da tali funzioni, verifichiamo che

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T.$$

Fissata una generica funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$, dobbiamo verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi),$$

e cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx. \tag{13}$$

Essendo il supporto $\operatorname{supp}\varphi$ limitato, esiste un intervallo limitato $[a, b]$ che lo contiene, e possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\; |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&= \int_a^b |\varphi(x)|\; |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&\leq \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right) \int_a^b |\varphi(x)|\, dx
\end{aligned}$$

Poiché $f_n \to f$ uniformemente in $[a, b]$, la quantità tra parentesi tonde tende a zero, mentre l'ultimo integrale resta costante: ciò prova la (13).

L'IMMERSIONE $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}'$

Ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi è localmente sommabile e rappresenta, perciò, essa stessa una distribuzione.

Nei testi moderni si suole fare riferimento all'applicazione $i : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ che alla generica funzione test φ associa la distribuzione T rappresentata da φ.

La suddetta applicazione i viene chiamata immersione, e si scrive

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}'.$$

Poiché sugli spazi $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ sono definite due diverse nozioni di convergenza, è naturale chiedersi quanto segue.

Se una successione di funzioni test φ_n converge in $\mathcal{D}$ ad una funzione φ, le distribuzioni T_n rappresentate dalle φ_n convergeranno in $\mathcal{D}'$ alla distribuzione T rappresentata da φ?

La risposta è affermativa, perché la convergenza in $\mathcal{D}$ implica la convergenza uniforme di φ_n a φ, e la convergenza uniforme, a sua volta, implica la convergenza in $\mathcal{D}'$.

Nei testi moderni si suole esprimere tale concetto dicendo che l'immersione $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}'$ è continua, oppure che lo spazio $\mathcal{D}$ si immerge in $\mathcal{D}'$ con continuità.

LA TOPOLOGIA DI $\mathcal{D}'$

La topologia dello spazio $\mathcal{D}'$ è la topologia debole-$*$ (si pronuncia "debole star"): si veda, ad esempio, la dispensa di Semmes citata in bibliografia, oppure Yosida, pagina 124.

Possiamo definire gli aperti della suddetta topologia procedendo come segue.

Per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ ed ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$, il semispazio affine $H_{\varphi,a} \subset \mathcal{D}'$ dato da

$$H_{\varphi,a} = \{\, T \in \mathcal{D}' \mid T(\varphi) < a \,\}$$

è per definizione un aperto. Le intersezioni finite

$$\mathcal{U}(k, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, a_1, \ldots, a_k) = \bigcap_{i=1}^{k} H_{\varphi_i, a_i}$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}^+$, $\varphi_i \in \mathcal{D}$ e $a_i \in \mathbb{R}$, costituiscono una base di intorni. La topologia da essi generata è la topologia dello spazio $\mathcal{D}'$.

EQUIVALENZA DELLE DEFINIZIONI

Se una successione di distribuzioni T_n converge ad una distribuzione T nella topologia debole-$*$, allora è soddisfatta la definizione a pagina D22.

Per vederlo, non è restrittivo supporre che T sia la distribuzione nulla.

Supponiamo, quindi, che comunque si prenda una intersezione finita $\mathcal{U} = \mathcal{U}(k, \varphi_1, \dots, \varphi_k, a_1, \dots, a_k)$ contenente la distribuzione nulla, cioè tale che $a_i > 0$ per ogni i, risulti definitivamente $T_n \in \mathcal{U}$.

Presa arbitrariamente una funzione test φ, vogliamo verificare la (11) con $T = 0$, cioè vogliamo verificare che

$$\lim_{n \to +\infty} T_n(\varphi) = 0. \tag{14}$$

Preso $\varepsilon \in (0, +\infty)$, per l'ipotesi si avrà $T_n \in H_{\varphi,\varepsilon}$ definitivamente, come pure $T_n \in H_{-\varphi,\varepsilon}$. Ciò equivale a

$$-\varepsilon < T_n(\varphi) < \varepsilon$$

e la conclusione segue.

Viceversa, se una successione di distribuzioni T_n soddisfa la definizione a pagina D22, allora converge alla distribuzione T nella topologia debole-$*$.

Per vederlo, non è restrittivo supporre che T sia la distribuzione nulla.

Consideriamo quindi una successione di distribuzioni T_n soddisfacente la (14) per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$.

Prendiamo arbitrariamente un semispazio $H_{\varphi,a} \subset \mathcal{D}'$ contenente la distribuzione nulla, cioè con $a > 0$. Ci chiediamo se risulta definitivamente $T_n \in H_{\varphi,a}$, ovvero se risulta

$$T_n(\varphi) < a$$

definitivamente. Ma questo discende dalla (14) per la definizione di limite di una successione numerica, perciò l'asserto è dimostrato.

Lo spazio $\mathcal{D}$ non ha una base numerabile

Vogliamo creare i presupposti per dimostrare che lo spazio D' delle distribuzioni, dotato della topologia debole-$*$, non è metrizzabile.

Per vederlo, ci serve innanzitutto osservare che, data una qualunque successione di funzioni test φ_n, esiste un'opportuna funzione test $\overline{\varphi}$ che è linearmente indipendente da qualunque sottoinsieme finito di funzioni φ_n.

Linearmente indipendente significa che non esistono numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ e funzioni test $\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}$ della successione data tali che

$$\overline{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \varphi_{n_i}(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si suole dire che "$\mathcal{D}$ non ha una base numerabile".

Vediamo una dimostrazione di quest'ultima affermazione. Cominciamo con il considerare le funzioni test $\psi_{x_0}(x) = \psi(x - x_0)$, dove ψ è la consueta funzione a campana.

È sufficiente prendere x_0 in un intervallo limitato: ad esempio, l'intervallo $(0, 1)$.

Lemma 1. L'insieme delle funzioni ψ_{x_0} per $x_0 \in (0, 1)$ ha la potenza del continuo.

La tesi segue dal fatto che l'intervallo $(0, 1)$ ha la potenza del continuo, e la corrispondenza tra x_0 e ψ_{x_0} è biunivoca.

Lemma 2. Le funzioni ψ_{x_0} sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano k punti $x_1 < \ldots < x_k$ ed altrettanti coefficienti $\lambda_i \neq 0$ tali che

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \psi_{x_i}(x) = 0 \tag{15}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ovviamente la (15) non può sussistere se $k = 1$ perché $\psi_{x_1}(x) > 0$ per $x \in (x_1 - 1, x_1 + 1)$.

Nel caso $k \geq 2$, la (15) non può sussistere nei punti $x \in (x_1 - 1,\, x_2 - 1)$ perché ψ_{x_1} è positiva in tale intervallo, vicino al primo estremo, mentre le ψ_{x_i} vi si annullano per ogni $i \geq 2$. Il lemma segue.

Per proseguire, consideriamo una successione qualunque di funzioni test φ_n, e indichiamo con V il suo inviluppo lineare, cioè l'insieme delle combinazioni lineari

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \varphi_{n_i}(x)$$

al variare di k, λ_i e φ_{n_i} in tutti i modi possibili.

Lemma 3. Se un sottoinsieme $X \subset V$ è costituito da funzioni linearmente indipendenti, allora X è finito o numerabile.

Dimostrazione. L'insieme V si può vedere come l'unione degli spazi vettoriali $F(\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k})$, di dimensione finita, generati dagli insiemi finiti di funzioni $\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}$ tratte dalla successione data.

I suddetti spazi vettoriali costituiscono una famiglia numerabile perché i sottoinsiemi finiti di un insieme numerabile costituiscono una famiglia numerabile.

Inoltre l'intersezione $X \cap F(\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k})$ contiene al massimo k elementi perché lo spazio $F(\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k})$ ha dimensione k, e gli elementi di X sono linearmente indipendenti per ipotesi.

Poiché l'insieme X è l'unione degli insiemi $X \cap F(\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k})$ al variare di k e di $\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}$ in tutti i modi possibili, l'insieme X è finito o numerabile in quanto unione numerabile di insiemi finiti o vuoti.

Conclusione: possiamo dimostrare che $\mathcal{D}$ non ha una base numerabile.

Infatti l'insieme X delle funzioni a campana ψ_{x_0} per $x_0 \in (0, 1)$ non è numerabile per il lemma 1, e le suddette funzioni sono linearmente indipendenti per il lemma 2.

Ma allora, per il lemma 3, il suddetto insieme $X \subset \mathcal{D}$ non può essere generato linearmente da nessuna successione di funzioni test φ_n: tantomeno potrà esserlo l'intero spazio $\mathcal{D}$.

NON METRIZZABILITÀ DI $\mathcal{D}'$

Dimostriamo che lo spazio $\mathcal{D}'$ delle distribuzioni, dotato della topologia debole-$*$, non è metrizzabile.

Supponiamo per assurdo che esista una metrica d sullo spazio $\mathcal{D}'$ che induca la topologia debole-$*$.

Allora possiamo definire l'intorno sferico $B_r(0)$ della distribuzione nulla ponendo

$$B_r(0) = \{ T \in \mathcal{D}' \mid d(T, 0) < r \}$$

per $r \in (0, +\infty)$. Vogliamo arrivare ad una contraddizione costruendo una successione di distribuzioni T_n che per ogni intero $j \geq 1$ soddisfano $T_n \in B_{1/j}(0)$ definitivamente, pur non convergendo alla distribuzione $T = 0$ nella topologia debole-$*$.

Prima parte: una successione di intorni dell'origine

Per ogni intero $j \geq 1$, essendo $B_{1/j}(0)$ un intorno della distribuzione nulla, esiste un intorno di base $\mathcal{U}_j = \mathcal{U}(k, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, a_1, \ldots, a_k)$ che è incluso in $B_{1/j}(0)$ e contiene la distribuzione nulla, cioè è tale che $a_1, \ldots, a_k > 0$.

Ovviamente il valore di k, come pure la scelta di $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ dipendono da j, ma questa dipendenza non è stata indicata esplicitamente per semplificare la notazione.

Potremmo scrivere, più correttamente,

$$\mathcal{U}_j = \mathcal{U}(k_j, \varphi_1^j, \ldots, \varphi_{k_j}^j, a_1^j, \ldots, a_{k_j}^j).$$

Seconda parte: la funzione $\overline{\varphi}$

Osserviamo che l'insieme di tutte le $\varphi_1^j, \ldots, \varphi_{k_j}^j$ al variare di $j \in \mathbb{Z}^+$ è finito o numerabile perché unione numerabile di insiemi finiti (eventualmente coincidenti).

Dunque tale insieme, che indicheremo con S, non può essere una base per lo spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni test, in quanto tale spazio non ammette una base numerabile.

Ma allora esiste una particolare funzione test, che indicheremo con $\overline{\varphi}$, che non appartiene all'inviluppo lineare di S.

In altri termini, $\overline{\varphi}$ non si può ottenere come combinazione lineare di elementi di S.

I lemmi 1 e 2 di pag. D26 mostrano che si può prendere $\overline{\varphi} = \psi_{x_0}$ con un opportuno $x_0 \in (0, 1)$, ma questo non è essenziale per proseguire.

TERZA PARTE: LE DISTRIBUZIONI T_n

PER OGNI $n \geq 1$ INDICHIAMO CON T_n UNA DISTRIBUZIONE TALE CHE $T_n(\overline{\varphi}) = 1$, E $T_n(\varphi_i^j) = 0$ PER OGNI $j \leq n$ E PER OGNI $i = 1, \ldots, k_j$.

PER NON DOVER DEFINIRE T_n PER OGNI ALTRA $\varphi \in \mathcal{D}$, IN MODO TALE CHE T_n RISULTI LINEARE E CONTINUA, DIMOSTRIAMO PER VIA TEORICA LA SOLA ESISTENZA DI UNA SIFFATTA DISTRIBUZIONE.

FISSATO $n \geq 1$, SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE TUTTE LE DISTRIBUZIONI T TALI CHE $T(\varphi_i^j) = 0$ PER OGNI $j \leq n$ E PER OGNI $i = 1, \ldots, k_j$ SODDISFINO ANCHE $T(\overline{\varphi}) = 0$.

VOGLIAMO DEDURRE CHE $\overline{\varphi}$ È UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE φ_i^j, IL CHE È ASSURDO PER QUANTO VISTO NELLA SECONDA PARTE DELLA DIMOSTRAZIONE.

PER PROCEDERE, SEGUIAMO IL LIBRO DI ANALISI FUNZIONALE DI H. BRÉZIS (LEMMA III.2): POSTO $N = 1 + k_1 + \ldots + k_n$, DEFINIAMO $E =$

$$\{ (T(\overline{\varphi}), T(\varphi_1^1), \ldots, T(\varphi_{k_n}^n)) \in \mathbb{R}^N : T \in \mathcal{D}' \}$$

POICHÉ $\mathcal{D}'$ È UNO SPAZIO VETTORIALE, L'INSIEME E È A SUA VOLTA UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^N$, DUNQUE È RAPPRESENTATO DA UN SISTEMA DI EQUAZIONI DEL TIPO

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} c_{\alpha\beta}\, x_\beta = 0 \qquad (16)$$

CON OPPORTUNI COEFFICIENTI $c_{\alpha\beta}$.

PER ASSURDA IPOTESI, LO SPAZIO E NON CONTIENE IL PUNTO $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, E PERCIÒ DEVE ESISTERE ALMENO UN $\overline{\alpha}$ TALE CHE $c_{\overline{\alpha}1} \neq 0$.

L'EQUAZIONE (16) CON $\alpha = \overline{\alpha}$ IMPLICA CHE, PER OGNI $T \in \mathcal{D}'$

$$c_{\overline{\alpha}1}\, T(\overline{\varphi}) + c_{\overline{\alpha}2}\, T(\varphi_1^1) + \ldots + c_{\overline{\alpha}N}\, T(\varphi_{k_n}^n) = 0.$$

PRENDENDO, IN PARTICOLARE, LE DISTRIBUZIONI $T = \delta_t$ (DELTA DI DIRAC CENTRATA IN $t \in \mathbb{R}$), SI RICAVA

$$c_{\overline{\alpha}1}\, \overline{\varphi}(t) + c_{\overline{\alpha}2}\, \varphi_1^1(t) + \ldots + c_{\overline{\alpha}N}\, \varphi_{k_n}^n(t) = 0$$

PER OGNI $t \in \mathbb{R}$. ESSENDO $c_{\overline{\alpha}1} \neq 0$, NE SEGUE CHE $\overline{\varphi}$ È UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE φ_i^j, IL CHE È ASSURDO.

DUNQUE ESISTE, PER OGNI $n \geq 1$, UNA DISTRIBUZIONE T_n TALE CHE $T_n(\overline{\varphi}) = 1$, E $T_n(\varphi_i^j) = 0$ PER OGNI $j \leq n$ E PER OGNI $i = 1, \ldots, k_j$.

CONCLUSIONE

PER COSTRUZIONE, QUALUNQUE SIA $j \geq 1$ RISULTA $T_n \in \mathcal{U}_j \subset B_{1/j}(0)$ PER OGNI $n \geq j$, DUNQUE LE DISTRIBUZIONI T_n DOVREBBERO CONVERGERE ALLA DISTRIBUZIONE NULLA.

TUTTAVIA RISULTA ANCHE $T_n(\overline{\varphi}) = 1$ PER OGNI n, E QUINDI $T_n(\overline{\varphi}) \not\to 0$, IL CHE È ASSURDO.

QUINDI NON ESISTE UNA METRICA d, SULLO SPAZIO $\mathcal{D}'$ DELLE DISTRIBUZIONI, CHE INDUCA LA TOPOLOGIA DEBOLE-$*$.

Derivata in $\mathcal{D}'$

La derivata nel senso delle distribuzioni

In queste dispense si accenna brevemente ad alcune proprietà delle distribuzioni.

Una delle proprietà più importanti è senza dubbio il fatto che tutte le distribuzioni sono derivabili infinite volte.

Definizione: data una distribuzione T, la sua derivata T' si definisce ponendo

$$T'(\varphi) = -T(\varphi'). \tag{17}$$

Tale definizione appare naturale se si pensa alle distribuzioni rappresentate da funzioni derivabili.

Consideriamo, ad esempio, una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$. Essa rappresenta la distribuzione T_f data da

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx.$$

D'altro canto la derivata f' della funzione f è continua per ipotesi, e rappresenta la distribuzione $T_{f'}$ data da

$$T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f'(x)\, dx.$$

Studiamo il legame che sussiste fra T_f e $T_{f'}$.

Indicato con (a, b) un intervallo limitato che contenga $\operatorname{supp}\varphi$, possiamo scrivere

$$T_{f'}(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)\, f'(x)\, dx.$$

Essendo il $\operatorname{supp}\varphi$ un insieme chiuso, la condizione $\operatorname{supp}\varphi \subset (a, b)$ implica

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Perciò, integrando per parti, otteniamo

$$T_{f'}(\varphi) = -\int_a^b \varphi'(x)\, f(x)\, dx.$$

Si constata, quindi, che sussiste la seguente uguaglianza:

$$T_{f'}(\varphi) = -T_f(\varphi').$$

Perciò è naturale definire la derivata $(T_f)'$ della distribuzione T_f ponendo

$$(T_f)'(\varphi) = -T_f(\varphi'),$$

in accordo con la (17).

La definizione (17) consente di dire che la derivata di una distribuzione T_f, rappresentata da una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$, è proprio la distribuzione $T_{f'}$ rappresentata da f'.

In altri termini, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
C^1(\mathbb{R}) & \ni & f & \xrightarrow{\ i\ } & T_f \\
\frac{\partial}{\partial x}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{ derivata distribuzionale} \\
C^0(\mathbb{R}) & \ni & f' & \xrightarrow{\ i\ } & T_{f'}
\end{array}$$

Si badi che la definizione (17) prescinde dal fatto che la distribuzione T sia regolare o meno (cioè sia o meno rappresentata da qualche funzione).

La definizione (17), inoltre, si può applicare quante volte si vuole a qualunque distribuzione.

Ad esempio, qualunque distribuzione T ha la derivata seconda, e risulta

$$T''(\varphi) = T(\varphi'').$$

In generale, la derivata k-esima di una distribuzione T è la distribuzione $T^{(k)}$ data da

$$T^{(k)}(\varphi) = (-1)^k\, T(\varphi^{(k)}).$$

LINEARITÀ DELL'OPERATORE DI DERIVAZIONE

È immediato ricavare, partendo dalle definizioni, le regole di derivazione della somma, della differenza e del prodotto per una costante:

$$(T_1 \pm T_2)' = T_1' \pm T_2';$$
$$(\lambda T)' = \lambda\, T'.$$

CONTINUITÀ DELL'OPERATORE DI DERIVAZIONE

Se una successione di distribuzioni T_n converge ad una distribuzione T, allora la successione delle derivate T_n' converge alla derivata T'. Infatti per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha

$$T_n'(\varphi) = -T_n(\varphi') \xrightarrow{\mathbb{R}} -T_n(\varphi') = T'(\varphi).$$

ESEMPI

Esempio 1: la derivata della distribuzione T rappresentata dalla funzione $H(x)$ di Heaviside è la distribuzione δ di Dirac.

Sappiamo, infatti, che la distribuzione T agisce come segue:

$$T(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx.$$

Applicando a tale distribuzione la definizione (17), troviamo che

$$T'(\varphi) = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx.$$

Tale espressione può essere semplificata ricordando che φ è identicamente nulla al di fuori di un opportuno intervallo limitato (a, b), e quindi possiamo scrivere

$$T'(\varphi) = -\int_0^{b} \varphi'(x)\, dx.$$

Infine, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, troviamo

$$\begin{aligned} T'(\varphi) &= -\varphi(b) + \varphi(0) \\ &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Dunque $T' = \delta$, come volevasi dimostrare.

Esempio 2: il risultato precedente si può estendere considerando, al posto della funzione di Heaviside, una qualunque funzione di classe C^1 a tratti. Vediamo in dettaglio come.

Fissati k punti $x_1 < \ldots < x_k$, con $k \in \mathbb{Z}^+$, consideriamo una funzione $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{ x_1, \ldots, x_k \})$ tale che

$$\lim_{x \to x_i^{\pm}} f'(x) = f'(x_i^{\pm}) \in \mathbb{R}$$

per $i = 1, \ldots, k$. Tale condizione implica

$$\lim_{x \to x_i^{\pm}} f(x) = f(x_i^{\pm}) \in \mathbb{R}$$

per $i = 1, \ldots, k$, dunque $f, f' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e restano definite le distribuzioni regolari $T_f, T_{f'}$. Verifichiamo che

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{k} \Big(f(x_i^+) - f(x_i^-) \Big)\, \delta_{x_i}.$$

Per la definizione della derivata in $\mathcal{D}'$, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha $T_f'(\varphi) =$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f\, \varphi'\, dx = - \int_{-\infty}^{x_1} f\, \varphi'\, dx$$
$$- \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\, \varphi'\, dx - \int_{x_k}^{\infty} f\, \varphi'\, dx.$$

Ora integriamo per parti, e scriviamo per ultimi tutti i valori agli estremi: otteniamo $T_f'(\varphi) =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'\, \varphi\, dx - f(x_1^-)\, \varphi(x_1)$$
$$- \sum_{i=1}^{k-1} \Big(f(x_{i+1}^-)\, \varphi(x_{i+1}) - f(x_i^+)\, \varphi(x_i) \Big)$$
$$+ f(x_k^+)\, \varphi(x_k)$$

e quindi, mettendo $\varphi(x_i)$ in evidenza: $T_f'(\varphi) =$

$$T_{f'}(\varphi) + \sum_{i=1}^{k} \Big(f(x_i^+) - f(x_i^-) \Big)\, \varphi(x_i)$$

da cui l'asserto.

Esempio 3: la derivata della distribuzione δ di Dirac è la distribuzione δ' data da

$$\begin{aligned} \delta'(\varphi) &= -\delta(\varphi') \\ &= -\varphi'(0). \end{aligned} \tag{18}$$

Per la continuità dell'operatore di derivazione, e siccome i mollificatori $\rho_n(x)$ convergono alla δ di Dirac (esercizio (c), serie [003]), la successione delle derivate $\rho_n'(x)$ converge alla distribuzione δ'.

Un'altra successione che sappiamo tendere alla δ di Dirac è data dalle funzioni $f_n(x) = n\, \chi_{(0, \frac{1}{n})}(x)$ (v. pag. D22)

Per la continuità dell'operatore di derivazione, la successione delle derivate $f_n'(x)$ converge alla distribuzione δ'.

Le derivate f_n', a loro volta, sono da intendersi nel senso delle distribuzioni. Per quanto visto nell'esempio 1, si ha

$$\begin{aligned} f_n' &= n\,(\delta - \delta_{\frac{1}{n}}) \\ &= \frac{\delta - \delta_{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{\delta_{\frac{1}{n}} - \delta}{-\frac{1}{n}}, \end{aligned} \tag{19}$$

dove $\delta_{\frac{1}{n}}$ è la δ di Dirac centrata nel punto $x_0 = \frac{1}{n}$.

Poiché, come abbiamo osservato sopra, si ha $f_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta'$, la relazione (19) ci permette di scrivere

$$\frac{\delta_{\frac{1}{n}} - \delta}{-\frac{1}{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta'. \tag{20}$$

Nel prossimo paragrafo esaminiamo più in dettaglio questa relazione.

L'OPERATORE DI TRASLAZIONE τ_h

La relazione (20) si può ricondurre alla ben nota definizione della derivata di una funzione regolare, a patto di introdurre l'operatore di traslazione τ_h.

Sappiamo infatti che la derivata di una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$ è la funzione f' data da

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Introduciamo allora la funzione $\tau_h f$, traslata di f, ponendo

$$(\tau_h f)(x) = f(x+h). \tag{21}$$

Ad esempio, se $f(x) = \operatorname{sen} x$, allora $(\tau_{\frac{\pi}{2}} f)(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$. Con la notazione (21) possiamo scrivere

$$f' = \lim_{h\to 0} \frac{\tau_h f - f}{h}.$$

In particolare, posto $h = -1/n$, si ha

$$f' = \lim_{n\to+\infty} \frac{\tau_{-\frac{1}{n}} f - f}{-\frac{1}{n}}. \tag{22}$$

D'altro canto, visto che

$$\tau_{-\frac{1}{n}} \delta = \delta_{\frac{1}{n}},$$

la (20) si può riscrivere come

$$\frac{\tau_{-\frac{1}{n}} \delta - \delta}{-\frac{1}{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta'$$

che rende evidente l'analogia con la (22). Il ragionamento si estende ad ogni distribuzione T introducendo la distribuzione traslata $\tau_h T \colon \varphi \mapsto T(\tau_{-h}\varphi)$.

IL DIPOLO ELETTRICO

Fra le molteplici motivazioni dell'interesse della teoria delle distribuzioni vi è anche la possibilità di modellizzare il dipolo elettrico.

Collocando una carica elettrica $q = +n$ nell'origine, ed una $-n$ nel punto $x_0 = \frac{1}{n}$, la densità di carica è rappresentata dalla distribuzione (19).

Tale distribuzione modellizza dunque il dipolo elettrico di momento $\boldsymbol{p}$ dato da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= q\,(-\tfrac{1}{n}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\ &= -\hat{\boldsymbol{\imath}}, \end{aligned}$$

essendo $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ il versore dell'asse x. Quando $n \to +\infty$ il momento $\boldsymbol{p}$ non cambia, mentre la distribuzione f_n' tende a δ'.

Si conclude che la derivata δ' rappresenta la densità di carica del dipolo elettrico puntiforme di momento $\boldsymbol{p} = -\hat{\boldsymbol{\imath}}$.

Questo esempio si può ritrovare nella dispensa "Elementi di Teoria delle Distribuzioni" di G. Vergara Caffarelli con P. Loreti (paragrafo 7).

Esempio 4: consideriamo la funzione $f(x) = |x|$, e la funzione segno di x, data da

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Essendo localmente sommabili, tali funzioni rappresentano due distribuzioni, che indicheremo con $T_{|x|}$ e con $T_{\mathrm{sgn}(x)}$. Verifichiamo che si ha

$$(T_{|x|})' = T_{\mathrm{sgn}(x)}.$$

Cominciamo con il richiamare il legame che sussiste tra $T_{|x|}$ e $f(x)$:

$$T_{|x|}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, |x|\, dx$$

per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$.

Dunque, per la definizione (17), si ha

$$(T_{|x|})'(\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\, |x|\, dx.$$

Poiché φ è identicamente nulla al di fuori di un opportuno intervallo limitato (a, b), possiamo scrivere

$$(T_{|x|})'(\varphi) = -\int_{a}^{b} \varphi'(x)\, |x|\, dx.$$

Indicando ancora con (a, b) un intervallo eventualmente più grande del precedente, e contenente l'origine, per la proprietà additiva dell'integrale si ha

$$\begin{aligned}(T_{|x|})'(\varphi) = & -\int_{a}^{0} \varphi'(x)\, |x|\, dx \\ & -\int_{0}^{b} \varphi'(x)\, |x|\, dx.\end{aligned}$$

Si badi che la proprietà additiva si può applicare indipendentemente dal fatto che a e b siano positivi o negativi.

Avendo però supposto $a < 0 < b$, l'espressione precedente si semplifica:

$$\begin{aligned}(T_{|x|})'(\varphi) = & \int_{a}^{0} \varphi'(x)\, x\, dx \\ & -\int_{0}^{b} \varphi'(x)\, x\, dx. \end{aligned} \tag{23}$$

Osservando che il prodotto $\varphi(x)\, x$ si annulla negli estremi, possiamo integrare per parti e ottenere

$$\int_{a}^{0} \varphi'(x)\, x\, dx = -\int_{a}^{0} \varphi(x)\, dx$$

$$-\int_{0}^{b} \varphi'(x)\, x\, dx = \int_{0}^{b} \varphi(x)\, dx.$$

Sostituendo tali espressioni nella (23), si ottiene finalmente

$$\begin{aligned}(T_{|x|})'(\varphi) &= \int_{a}^{b} \varphi(x)\, \mathrm{sgn}(x)\, dx \\ &= T_{\mathrm{sgn}(x)}(\varphi)\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

Allo stesso risultato si perviene anche scrivendo $|x| = x^+ + x^-$, e sfruttando la linearità dell'operatore di derivazione ed il fatto che $(x^+)' = H(x)$ (esercizio 1, serie [004]).

L'IMMERSIONE $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}'$

Il fatto, già noto, che ogni funzione localmente sommabile $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ rappresenta una distribuzione, e precisamente la distribuzione T_f data da

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx$$

è alla base della definizione dell'immersione canonica $i\colon L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'$, che è la seguente:

$$i(f) = T_f.$$

L'immersione canonica i gode delle seguenti importanti proprietà:

- A funzioni diverse (su un insieme di misura positiva) corrispondono distribuzioni diverse: l'applicazione i è iniettiva;
- Alla funzione $f = f_1 + f_2$, somma di due funzioni date f_1, f_2, corrisponde la distribuzione $T_{f_1} + T_{f_2}$,
- e alla funzione prodotto λf corrisponde la distribuzione λT_f, dunque l'applicazione i è lineare.

Si può dire che l'immagine $i(L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ dello spazio $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tramite l'applicazione i è un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathcal{D}'$ avente la stessa struttura dello spazio $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

È per questo motivo che lo spazio delle distribuzioni, pur avendo natura diversa dallo spazio delle funzioni localmente sommabili, si considera come un ampliamento di quest'ultimo.

Inoltre l'applicazione i è continua, nel senso che se una successione di funzioni $f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ converge ad una certa funzione $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ rispetto alla norma di $L^1((a,b))$, qualunque sia l'intervallo limitato (a,b), allora

$$T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} T_f.$$

A tal proposito ricordiamo che si indica con $L^1((a,b))$ lo spazio delle funzioni $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ che sono sommabili, e cioè misurabili e tali che

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty.$$

Poiché due funzioni f_1, f_2 che differiscono su di un insieme di misura nulla hanno lo stesso integrale di Lebesgue, le si identificano fra loro, e si scrive $f_1 \sim f_2$.

Più esattamente, dunque, lo spazio $L^1((a,b))$ è uno spazio quoziente: è il quoziente dello spazio delle funzioni sommabili sull'intervallo (a,b) rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ sopra descritta.

La norma di una funzione $f \in L^1((a,b))$ è la quantità

$$\|f\|_{L^1((a,b))} = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Si dice che una successione di funzioni $f_n \in L^1((a,b))$ converge ad una funzione $f \in L^1((a,b))$ nella norma di $L^1((a,b))$, o "fortemente", se la successione delle norme

$$\|f_n - f\|_{L^1((a,b))}$$

che è una successione numerica, tende a zero in $\mathbb{R}$.

PERCHÉ SI STUDIANO DIVERSI TIPI DI CONVERGENZA

Lo studio dei diversi tipi di convergenza, ed il confronto tra di essi, può benissimo essere svolto per pura curiosità intellettuale.

Tale studio ha importanza fondamentale quando si tratta di dimostrare l'esistenza della soluzione di un dato problema.

Spesso, infatti, la soluzione è una funzione f difficile da ottenere, e risulta più agevole costruire una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni approssimanti.

In tal caso, risulta cruciale sapere se f_n tende ad f, ed in che senso vi tende.

Questo capita, ad esempio, con il metodo diretto del calcolo delle variazioni, che prenderemo in considerazione più avanti.

La necessità di fare ricorso ad approssimazioni della soluzione cercata è tipica della matematica moderna.

Tuttavia la stessa necessità si è presentata già nell'antichità con il problema del calcolo dell'area del cerchio, che fu affrontato da Archimede di Siracusa, nel terzo secolo a.C., facendo ricorso ad opportuni poligoni approssimanti.

TERMINOLOGIA DI USO CORRENTE

Quando due funzioni localmente sommabili $f, f_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ rappresentano due distribuzioni T, T_1 tali che

$$T_1 = T'$$

si suole dire che f_1 è la derivata di f nel senso delle distribuzioni, ovvero che $f_1 = f'$ nel senso delle distribuzioni.

Esempio: la funzione $f_1(x) = \text{sgn}(x)$ è la derivata della funzione $f(x) = |x|$ nel senso delle distribuzioni.

Osservazione: due funzioni che differiscono su di un insieme di misura nulla rappresentano la stessa distribuzione, perciò è corretto dire che la derivata di $f(x) = |x|$ nel senso delle distribuzioni è la seguente funzione:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, +\infty); \\ -1, & \text{se } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

È corretto anche dire che la derivata di $f(x) = |x|$ nel senso delle distribuzioni è la seguente funzione:

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (0, +\infty); \\ -1, & \text{se } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

lasciando non definito il valore di $\tilde{f}_1(0)$.

PRODOTTO DI UNA DISTRIBUZIONE PER UNA FUNZIONE DI CLASSE C^∞

Il prodotto di due applicazioni lineari non è, in generale, un'applicazione lineare.

Dunque il prodotto di due distribuzioni non è definito, in generale.

Si può, tuttavia, definire il prodotto gT di una distribuzione T per una funzione $g(x)$ di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, ponendo

$$(gT)\,(\varphi) = T(g\varphi) \tag{24}$$

dove $g\varphi$ denota la funzione test $g(x)\,\varphi(x)$.

Esempio: posto $g(x) = x$ e $T = \delta$, la (24) diventa

$$\begin{aligned}(x\delta)\,(\varphi) &= \delta(x\varphi)\\ &= 0,\end{aligned} \tag{25}$$

dunque la distribuzione $x\delta$ è la distribuzione identicamente nulla.

La definizione (24) si giustifica facilmente pensando al caso in cui la distribuzione T è regolare, cioè è rappresentata da una funzione localmente sommabile $f(x)$.

In tal caso, infatti, il prodotto $g(x)\,f(x)$ è ancora localmente sommabile, e rappresenta la distribuzione data da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,g(x)\,f(x)\,dx = T(g\varphi),$$

in accordo con la (24).

LA DERIVATA DEL PRODOTTO

Date $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $T \in \mathcal{D}'$, la derivata della distribuzione prodotto gT si può esprimere come segue:

$$(gT)' = g'\,T + g\,T'. \tag{26}$$

La consueta regola di derivazione del prodotto si estende, dunque, al caso in cui uno dei due fattori è una distribuzione, a patto che l'altro fattore sia di classe C^∞.

La verifica della (26) è un esercizio di routine: presa una $\varphi \in \mathcal{D}$, la definizione (17) della derivata porge

$$(gT)'\,(\varphi) = -(gT)\,(\varphi'),$$

dunque la (26) diventa

$$-(gT)\,(\varphi') = (g'\,T)\,(\varphi) + (g\,T')\,(\varphi). \tag{27}$$

D'altro canto, la definizione (24) del prodotto implica che

$$\begin{aligned}(gT)\,(\varphi') &= T(g\,\varphi')\\ (g'\,T)\,(\varphi) &= T(g'\varphi)\\ (g\,T')\,(\varphi) &= T'(g\varphi).\end{aligned}$$

Con queste sostituzioni, la (27) si riduce a

$$-T(g\,\varphi') = T(g'\,\varphi) + T'(g\varphi). \tag{28}$$

Infine, derivando il prodotto $g\varphi$ delle due funzioni derivabili g e φ, si ottiene

$$\begin{aligned}T'(g\varphi) &= -T((g\varphi)')\\ &= -T(g'\,\varphi + g\,\varphi')\\ &= -T(g'\,\varphi) - T(g\,\varphi'),\end{aligned}$$

il che dimostra la (28).

Esempio: applicando la regola (26) alla distribuzione $x\delta$ si trova

$$(x\delta)' = \delta + x\delta'. \tag{29}$$

Dal fatto che $x\delta = 0$, come stabilito nella (25), segue $(x\delta)' = 0$. Sostituendo nella (29) si ricava

$$x\delta' = -\delta. \tag{30}$$

Alla stessa conclusione si perviene direttamente applicando la (24) e la (18).

Osservazione: la (30) ci mostra che, nonostante il fattore $g(x) = x$ sia nullo nel punto $x = 0$, la distribuzione prodotto $x\delta'$ non è nulla.

Ciò è in legato al fatto che la distribuzione δ', data dalla (18), dipende dal valore di $\varphi'(0)$.

A sua volta, il valore di $\varphi'(0)$ dipende non soltanto dal valore di φ per $x = 0$, ma dai valori di φ in tutto un intorno di $x = 0$.

Serie di distribuzioni

SERIE DI DISTRIBUZIONI

Data una successione di distribuzioni T_k, si dice che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} T_k \tag{31}$$

converge alla distribuzione T se la distribuzione somma ridotta S_n, data da

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} T_k \tag{32}$$

converge a T in $\mathcal{D}'$.

Condizione necessaria affinché la serie (31) sia convergente è che la distribuzione T_k converga in $\mathcal{D}'$ alla distribuzione identicamente nulla.

Supponiamo, infatti, che la serie (31) converga in $\mathcal{D}'$ ad una distribuzione T. Allora, per definizione, risulta

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$$

e, banalmente, risulta anche

$$S_{n-1} \xrightarrow{\mathcal{D}'} T.$$

Dalla definizione (32) della somma ridotta segue immediatamente che

$$T_k = S_k - S_{k-1}.$$

Poiché S_k e S_{k-1} tendono entrambe a T in $\mathcal{D}'$, si deduce che

$$T_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$$

come volevasi dimostrare.

Esempio: indichiamo con δ_k la distribuzione δ di Dirac centrata nel punto $x = k$. Allora la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k \tag{33}$$

è convergente in $\mathcal{D}'$.

La somma della suddetta serie è la distribuzione T data da

$$T(\varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k).$$

La distribuzione δ_k, che figura come termine generale della serie (33), tende alla distribuzione nulla.

Infatti per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha, per definizione,

$$\delta_k(\varphi) = \varphi(k).$$

Inoltre il supporto di φ è contenuto in un opportuno intervallo limitato (a, b).

Quindi per ogni $k > b$ il secondo membro dell'uguaglianza precedente è nullo, dunque tende banalmente a zero.

Esempio: indicata ancora con δ_k la distribuzione δ di Dirac centrata nel punto $x = k$, e con $\delta_k^{(k)}$ la sua derivata k-esima, la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k^{(k)} \tag{34}$$

è convergente in $\mathcal{D}'$. La sua somma è la distribuzione T data da

$$T(\varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varphi^{(k)}(k).$$

La distribuzione $\delta_k^{(k)}$, che figura come termine generale della serie (34), tende alla distribuzione nulla: lo si vede come nell'esempio precedente.

Esempio: indicata con $\delta_{\frac{1}{n}}$ la distribuzione δ di Dirac centrata nel punto $x = \frac{1}{n}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{\frac{1}{n}} \tag{35}$$

non converge in $\mathcal{D}'$ in quanto il termine generale $\delta_{\frac{1}{n}}$ non converge alla distribuzione nulla, ma alla consueta distribuzione δ di Dirac centrata nel punto $x = 0$.

Infatti per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$, per la continuità di φ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \delta_{\frac{1}{n}}(\varphi) &= \lim_{n\to+\infty} \varphi(\tfrac{1}{n}) \\ &= \varphi(0) = \delta(\varphi), \end{aligned}$$

dunque $\delta_{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta \neq 0$ e non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie.

Applicazioni

L'EQUAZIONE $T' = 0$

Le cosiddette funzioni ideali, che oggi si inquadrano nella teoria delle distribuzioni, sono state concepite per descrivere fenomeni discontinui o impulsivi le cui leggi, ciò non ostante, sono espresse da equazioni differenziali.

In questa sede ci concentriamo sull'equazione differenziale più semplice:

$$T' = 0.$$

Si intende che il simbolo 0 al secondo membro denota la distribuzione nulla.

Vogliamo cioè trovare tutte le distribuzioni T tali che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, risulti

$$T(\varphi') = 0 \qquad (36)$$

ove il simbolo 0 denota come di consueto lo zero.

Si verifica immediatamente che le distribuzioni regolari T_m rappresentate da funzioni costanti $f(x) \equiv m \in \mathbb{R}$ sono soluzioni della (36): vogliamo sapere se vi sono altre soluzioni.

FUNZIONI TEST A INTEGRALE NULLO

La derivata φ' di una funzione test φ è ancora una funzione test, ma esistono funzioni test ψ che non sono la derivata di alcuna funzione test: è questo il caso, ad esempio, della funzione ψ a pag. D11.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione test φ sia la derivata di una funzione test è che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 0.$$

Se tale condizione è soddisfatta, allora φ è la derivata della funzione test $\Phi \in \mathcal{D}$ data da

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$$

Alla luce di queste considerazioni, l'equazione (36) dice che la distribuzione T si annulla sul sottospazio di $\mathcal{D}$ delle funzioni a integrale nullo.

SOLUZIONE DELLA (36)

Presa una distribuzione T soddisfacente la (36), definiamo $m = T(\psi/c)$, essendo ψ come nella (2) e

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, dt. \qquad (37)$$

Allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, posto

$$I_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx, \qquad (38)$$

la funzione $\varphi(x) - \frac{I_\varphi}{c}\psi(x)$ ha integrale nullo, e perciò, per la (36),

$$\begin{aligned} 0 &= T\big(\varphi - \tfrac{I_\varphi}{c}\,\psi\big) \\ &= T(\varphi) - m\, I_\varphi. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di φ, si conclude che la distribuzione incognita T è la distribuzione regolare rappresentata dalla costante $f(x) \equiv m$.

Un punto di vista superiore

Le considerazioni appena svolte mostrano che una qualunque distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ soddisfacente l'equazione $T' = 0$ è un multiplo della distribuzione T_1 data da

$$T_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Alla stessa conclusione si giunge osservando che lo spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni test si decompone nella somma diretta

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \oplus r,$$

dove $\mathcal{D}_0 = \{\,\varphi \in \mathcal{D} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi = 0\,\}$ è il sottospazio delle funzioni test a integrale nullo, e $r = \{\,\varphi \mid \varphi = \lambda\psi,\ \lambda \in \mathbb{R}\,\}$ è la retta delle funzioni multiple di ψ.

In altri termini, ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si può porre nella forma

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{I_\varphi}{c}\,\psi \tag{39}$$

con $\varphi_0 = \varphi - \frac{I_\varphi}{c}\,\psi \in \mathcal{D}_0,\ I_\varphi = T_1(\varphi)$.

Essendo T lineare, e annullandosi su $\mathcal{D}_0$, ne segue che

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= T(\tfrac{I_\varphi}{c}\,\psi) \\ &= T(\psi/c)\,I_\varphi = m\,T_1(\varphi), \end{aligned}$$

dove si è posto $m = T(\psi/c)$ come prima. Dunque T è un multiplo di T_1, come volevasi dimostrare.

Un teorema di regolarità

Le considerazioni precedenti mostrano, in particolare, che una qualunque distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ soddisfacente l'equazione $T' = 0$ è una distribuzione regolare.

Ciò può vedersi come un teorema di regolarità: sapendo che una distribuzione incognita T soddisfa una certa equazione differenziale, si dimostra che in realtà T è regolare.

I teoremi di regolarità per le equazioni differenziali, in particolare quelle alle derivate parziali, costituiscono un vasto settore della matematica all'interno del quale si sono distinti, ad esempio:

- Luis Caffarelli: v. Notices of the AMS, vol. 56(4), 2009, pag. 490.
- Ennio De Giorgi: v. Bollettino UMI, Serie 8, vol. 2-B (1999), pagg. 3–31.

Primitive di una distribuzione

Abbiamo visto che le distribuzioni T tali che $T' = 0$ sono le distribuzioni regolari rappresentate da una costante m.

Ne segue che se due distribuzioni T_1, T_2 hanno la stessa derivata, allora la differenza $T = T_1 - T_2$ è una distribuzione regolare rappresentata da una costante m.

Vale ovviamente il viceversa: data una qualunque distribuzione T, e indicata con T_m la distribuzione regolare rappresentata da una costante m, si ha $(T+T_m)' = T'$.

Ora ci poniamo il problema di stabilire se, data una distribuzione S, esiste almeno una distribuzione T tale che

$$T' = S,$$

cioè tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ risulti

$$T(\varphi') = -S(\varphi). \qquad (40)$$

Questa condizione non determina tutti i valori di T, ma solo quelli che T assume sul sottospazio $\mathcal{D}_0$ delle funzioni test a integrale nullo.

Infatti, se $\varphi_0 \in \mathcal{D}_0$, allora la funzione

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(x)\, dx$$

è ancora una funzione test, e dalla (40) segue

$$T(\varphi_0) = -S(\Phi_0).$$

Ma allora, fissata una funzione test $\psi \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$, come ad esempio la tipica funzione a campana (2), si può scrivere ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ nella forma (39) e definire

$$T(\varphi) = -S(\Phi_0) + \frac{I_\varphi}{c}\, m \qquad (41)$$

dove I_φ e c sono dati dalla (38) e dalla (37), e m è una costante arbitraria il cui significato si ricava scegliendo $\varphi = \psi$:

$$T(\psi) = m.$$

La (41) si può riscrivere

$$T(\varphi) = -S(\Phi_0) + \frac{m}{c}\, T_1(\varphi)$$

e rappresenta tutte le primitive di una distribuzione data S.

Se poi denotiamo con $C(\varphi) = \frac{m}{c} T_1(\varphi)$ la distribuzione regolare rappresentata dalla costante $\frac{m}{c}$, otteniamo l'espressione più familiare

$$T(\varphi) = -S(\Phi_0) + C(\varphi). \qquad (42)$$

Urto elastico istantaneo

Vediamo come le distribuzioni intervengono nella descrizione di un semplice fenomeno fisico.

Consideriamo un corpo puntiforme di massa m soggetto alla forza peso. Se all'istante $t = 0$ il corpo si trova a quota $z = z_0$ con velocità nulla, le legge oraria del moto è

$$z(t) = z_0 - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2,$$

dove g è l'accelerazione di gravità.

Supponiamo che, raggiunta la quota $z = 0$, il corpo subisca un urto elastico e istantaneo con un piano orizzontale. L'istante t_0 in cui il primo urto si verifica è dato da

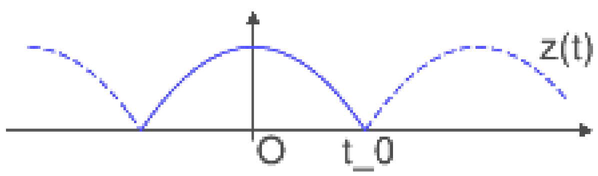
$$t_0 = \sqrt{\frac{2\, z_0}{g}}$$

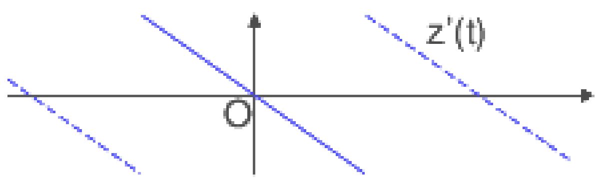
e la legge oraria del moto diventa

$$z(t) = z_0 - \tfrac{1}{2}\, g\, (t - 2kt_0)^2 \text{ per } t \in I_k \quad (43)$$

essendo I_k l'intervallo temporale dato da

$$I_k = \big[(2k-1)\, t_0,\, (2k+1)\, t_0\big), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$





La funzione $z(t)$ data dalla (43) non soddisfa l'equazione della caduta dei gravi

$$z'' = -g \qquad (44)$$

perché $z(t)$ non è nemmeno derivabile per $t = (2k+1)\, t_0$, $k \in \mathbb{Z}$ (punti angolosi). Esprimiamo dunque z'' nel senso delle distribuzioni.

Sappiamo già che $|x|' = \operatorname{sgn} x$ (pagina D35). Con un procedimento analogo si trova che la derivata distribuzionale di $z(t)$ è rappresentata dalla funzione $z'(t)$ data da

$$z'(t) = g\, (2kt_0 - t) \text{ per } t \in I_k.$$

Per trovare z'' conviene innanzitutto osservare che

$$z'(t) = g\, (2kt_0 - t)\, \chi_{I_k}(t) \text{ per } t \in I_k,$$

essendo $\chi_{I_k}(t)$ la funzione caratteristica dell'intervallo I_k. Poiché risulta $\chi_{I_k}(t) = 0$ per $t \notin I_k$, si può scrivere

$$z'(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g\, (2kt_0 - t)\, \chi_{I_k}(t) \qquad (45)$$

e l'uguaglianza vale per ogni $t \in \mathbb{R}$. A questo proposito si noti che per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste uno ed un solo $k \in \mathbb{Z}$ tale che $t \in I_k$, e tutti i termini della serie corrispondenti a valori diversi di k sono nulli, perché nullo è il fattore $\chi_{I_k}(t)$. Per la stessa ragione si ha

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_{I_k}(t)$$

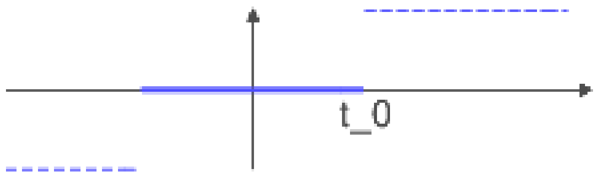
per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ma allora la (45) può essere riscritta come segue

$$z'(t) = -gt + 2gt_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}} k\, \chi_{I_k}(t).$$

Prima di procedere ad un'ulteriore derivazione, osserviamo che la funzione

$$\left[\frac{t+t_0}{2t_0}\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\,\chi_{I_k}(t), \tag{46}$$

dove le parentesi quadre denotano la parte intera, è una funzione costante a tratti ed ha un salto di altezza unitaria ogniqualvolta $t = (2k+1)\,t_0$.



Ragionando allora come nell'esercizio 2 della serie [004] si trova che la derivata della (46) è la distribuzione

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\,t_0}$$

(vedere anche a pagina D54). Si conclude dunque che

$$z'' = -g + 2gt_0 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\,t_0}.$$

È evidente la differenza tra questa equazione, che tiene conto degli urti negli istanti $t = (2k+1)\,t_0$, e la (44) che descrive la caduta dei gravi.

TEOREMI DI APPROSSIMAZIONE

Fra le tante notevoli applicazioni della distribuzione δ di Dirac consideriamo alcuni teoremi di approssimazione, detti anche teoremi di densità.

1. Densità di $C_c^\infty(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$: ogni funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ si può approssimare bene quanto si vuole, nella norma di $L^1(\mathbb{R})$, con una funzione di $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

2. Teorema di approssimazione di Weierstrass: ogni funzione $u \in C^0([a,b])$ si può approssimare uniformemente, bene quanto si vuole, con un polinomio.

3. Convergenza delle serie di Fourier: se una funzione u appartiene ad $L^1((-\pi,\pi))$ ed è derivabile in un punto $x_0 \in (-\pi,\pi)$, allora

$$u(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx_0 + b_k \operatorname{sen} kx_0)$$

essendo a_k, b_k i coefficienti di Fourier della funzione u.

4. Densità di $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$: ogni distribuzione è il limite di un'opportuna successione di funzioni di $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

IL PROBLEMA DELL'APPROSSIMAZIONE

Gli enunciati anzidetti hanno in comune lo stesso problema, e cioè:

A. Sono interessato ad una data funzione u, che spesso è incognita, oppure ad una distribuzione T.

B. Posso gestire con più facilità altre funzioni, come ad esempio funzioni di $C_c^\infty((a,b))$, polinomi, polinomi trigonometrici.

C. Anziché lavorare direttamente con la funzione u o con la distribuzione T, la approssimo con le funzioni che mi riescono più comode.

La possibilità di fare simili approssimazioni si suole esprimere elegantemente ricorrendo al concetto topologico di densità.

Schema di dimostrazione

La dimostrazione degli enunciati precedenti si può svolgere seguendo uno stesso schema:

Per dimostrare i teoremi 1 e 4, uso una particolare successione di funzioni $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ che tende alla distribuzione δ (esercizio (c) della serie [003]);

Per dimostrare il teorema 2, uso una particolare successione di polinomi che tende alla distribuzione δ;

Per dimostrare il teorema 3, uso una particolare successione di polinomi trigonometrici che tende alla distribuzione δ.

In tutti e quattro i casi, una volta approssimata la distribuzione δ, si riescono ad approssimare tutte le funzioni cui si è interessati.

Ciò è possibile grazie alle seguenti proprietà dell'operazione indicata con il simbolo $*$ e chiamata convoluzione (v. pag. D55):

• La distribuzione δ di Dirac è l'elemento neutro per la convoluzione:

$$\delta * u = u;$$

• La convoluzione ha un potere regolarizzante, cioè se u non è regolare ma ρ_n lo è, allora $\rho_n * u$ è regolare;

• La convoluzione è un'operazione continua nel senso che da $\rho_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$ segue $\rho_n * u \to \delta * u = u$ in vari spazi di funzioni regolari.

Densità di $C_c^\infty(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$

Vediamo l'idea della dimostrazione del teorema 1 di pag. D49.

Nel libro [12] di Pucci (pubblicato postumo) la dimostrazione si basa sulla continuità in L^p dell'operatore di traslazione.

Invece, diversi trattati di riferimento a livello internazionale [2, 4, 10] dimostrano la densità di C_c^∞ in L^p, per $p \in [1, +\infty)$, facendo appello alla densità di C_c^0, da dimostrare preliminarmente.

Tale risultato preliminare si dimostra a sua volta senza usare la convoluzione. In questa sede, per semplicità, partiremo dal seguente caso particolare.

Ogni funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ si può approssimare bene quanto si vuole, nella norma di $L^1(\mathbb{R})$, con una funzione $\tilde{u} \in C_c^0(\mathbb{R})$.

L'enunciato si può trovare, ad esempio, in [2, teorema 4.12]. La dimostrazione rientra nella teoria degli spazi L^p e dell'integrazione secondo Lebesgue.

Qui verifichiamo in dettaglio due proprietà della convoluzione che permettono di giungere al teorema 1.

Notiamo innanzitutto che se $\operatorname{supp} \tilde{u} \subset [a, b]$, e se $x \notin [a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$, allora $\tilde{u}_n(x) = 0$ per la definizione (48). Essendo $\tilde{u}_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ per la (53), si ha quindi $\tilde{u}_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Verifichiamo che se $\tilde{u} \in C_c^0(\mathbb{R})$, allora le funzioni $\tilde{u}_n = \rho_n * u$ convergono ad u uniformemente in $\mathbb{R}$.

Preso $\varepsilon \in (0, +\infty)$, per l'uniforme continuità di $\tilde{u}$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ ed ogni coppia $(x, x-t) \in \mathbb{R}^2$ con $t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ risulta

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x-t)| < \varepsilon.$$

Per la definizione (48) si ha

$$\tilde{u}_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\, \tilde{u}(x-t)\, dt$$

e si ha inoltre, banalmente,

$$\tilde{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\, \tilde{u}(x)\, dt$$

quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $n \geq n_0$ risulta che $|\tilde{u}(x) - \tilde{u}_n(x)|$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\, |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x-t)|\, dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho_n(t)\, |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x-t)|\, dt < \varepsilon,$$

dunque $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ uniformemente.

Questa tecnica si può estendere ad un'arbitraria funzione $w \in L^1(\mathbb{R})$ in luogo di $\tilde{u}$, utilizzando la continuità dell'operatore di traslazione [12, paragrafo 5.5].

In alternativa, per le funzioni di L^1 possiamo ottenere facilmente un risultato debole in apparenza, ma essenziale per concludere.

Verifichiamo che se $w \in L^1(\mathbb{R})$ allora la funzione $w_n = \rho_n * w$, che è di classe C^∞ per la (53), appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ e soddisfa la disuguaglianza

$$\|w_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|w\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{47}$$

Infatti dalla definizione di w_n segue che

$$|w_n(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)|\, \rho_n(x-t)\, dt.$$

Integrando ambo i membri in dx, per il teorema di Tonelli possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |w_n(x)|\, dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |w_n(t)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x-t)\, dx \right) dt$$

e tale disuguaglianza sussiste anche nel caso in cui qualche integrale abbia il valore $+\infty$.

L'integrale fra parentesi però ha il valore 1, dunque rimane dimostrata la (47).

Dimostrazione del teorema 1. Fissata $u \in L^1(\mathbb{R})$, e preso $\varepsilon \in (0, +\infty)$, esiste $\tilde{u} \in C_c^0(\mathbb{R})$ tale che

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Posto $w = \tilde{u} - u$, si ha $w_n = \tilde{u}_n - u_n$ per la linearità della convoluzione. Per la (47) risulta: $\|u - u_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$

$$\leq \|u - \tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\tilde{u} - \tilde{u}_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$+ \|w_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$< 2\varepsilon + \|\tilde{u} - \tilde{u}_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

e perciò per n grande deve aversi

$$\|u - u_n\|_{L^1(\mathbb{R})} < 3\varepsilon$$

da cui segue il teorema 1.

CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER

Vediamo i dettagli della dimostrazione del teorema 3. Avremo bisogno dei seguenti lemmi.

Lemma 1: per ogni $t \neq 2k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ si ha

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\, t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}}$$

Dimostrazione. Per le formule di addizione si ha

$$2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta).$$

Posto $\alpha = kt$ e $\beta = t/2$, sommando su k si ottiene l'identità

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \cos kt \operatorname{sen} \tfrac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{sen} \tfrac{2k+1}{2}\, t - \operatorname{sen} \tfrac{2k-1}{2}\, t \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \tfrac{2n+1}{2}\, t - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} \tfrac{t}{2}.
\end{aligned}$$

La tesi si ricava dividendo per il fattore $\operatorname{sen} \frac{t}{2}$, che non dipende dall'indice di somma k.

Lemma 2: per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\, t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} = 1.$$

Dimostrazione. Per $n = 0$ la conclusione è immediata, mentre per $n > 0$ basta applicare il lemma 1 e integrare.

Lemma 3 (lemma, o teorema di Riemann-Lebesgue): per ogni funzione $f \in L^1((-\pi, \pi))$ risulta

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt = 0,$$

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\, dt = 0.$$

Dimostriamo il teorema nel caso particolare in cui $f \in L^2((-\pi, \pi))$. Il caso generale segue dalla densità di $L^2((-\pi, \pi))$ in $L^1((-\pi, \pi))$. Poniamo

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt \big)$$

dove gli a_k, b_k sono i coefficienti di Fourier, dati da

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\, dt.$$

Usando le definizioni dei coefficienti di Fourier sopra richiamate, si trova

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(t) - S_n(t) \Big)^2 dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(t)\, dt,
\end{aligned}$$

L'ultimo integrale si può svolgere sfruttando le relazioni di ortogonalità in $L^2((-\pi, \pi))$ delle funzioni $\cos kt$ e $\operatorname{sen} kt$. Così facendo, si ottiene

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt.$$

L'ultima disuguaglianza, detta di Bessel, implica che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

è convergente. Richiamando la condizione necessaria per la convergenza di una serie, si ricava la tesi del teorema di Riemann-Lebesgue.

Lemma 4: per ogni funzione f nello spazio $L^1((-\pi,\pi))$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\operatorname{sen}\left(\tfrac{2n+1}{2}\,t\right)dt=0.$$

Dimostrazione. Per le formule di addizione si ha

$$\operatorname{sen}\tfrac{2n+1}{2}\,t=\operatorname{sen} nt\,\cos\tfrac{t}{2}+\cos nt\,\operatorname{sen}\tfrac{t}{2}$$

dunque l'integrale al primo membro si può scrivere come la somma

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\,\cos\tfrac{t}{2}\right)\operatorname{sen} nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\,\operatorname{sen}\tfrac{t}{2}\right)\cos nt\,dt.$$

Poiché per ipotesi $f\in L^1((-\pi,\pi))$, anche i prodotti $f(t)\cos\frac{t}{2}$ e $f(t)\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ appartengono ad $L^1((-\pi,\pi))$, e la conclusione segue dal teorema di Riemann-Lebesgue.

Dimostrazione del teorema 3 (pag. D49). Per semplicità poniamo $x_0=0$. Sostituendo al posto di a_k e b_k le loro espressioni, la somma ridotta $S_n(0)$ diventa

$$\begin{aligned} S_n(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,dt \\ &+ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,\cos kt\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)u(t)\,dt. \end{aligned}$$

Grazie al lemma 1, possiamo scrivere

$$S_n(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\,t}{2\,\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,u(t)\,dt.$$

D'altro canto per il lemma 2 si ha, banalmente,

$$u(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\,t}{2\,\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,u(0)\,dt.$$

Sottraendo l'ultima uguaglianza dalla precedente si trova

$$\begin{aligned} &S_n(0)-u(0)\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(t)-u(0)}{2\,\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,\operatorname{sen}\left(\tfrac{2n+1}{2}\,t\right)dt. \end{aligned}$$

Verifichiamo che il secondo membro tende a zero. Innanzitutto, posto

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{u(t)-u(0)}{2\,\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \\ &= \frac{u(t)-u(0)}{t}\,\frac{t/2}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}, \end{aligned}$$

e siccome $u(t)$ è derivabile per ipotesi nel punto $t=0$, risulta che $f(t)$ è limitata in un opportuno intorno dell'origine.

Tenendo conto anche del fatto che $u \in L^1((-\pi, \pi))$, segue che $f \in L^1((-\pi, \pi))$. Perciò, scrivendo

$$S_n(0) - u(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}\left(\tfrac{2n+1}{2}\, t\right) dt$$

ed applicando il lemma 4 si ottiene

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(0) = u(0)$$

come volevasi dimostrare.

Si attribuisce a Pierre Lejeune-Dirichlet il merito di aver dimostrato, successivamente alla pubblicazione del libro di Fourier, il teorema di convergenza formulando opportune ipotesi aggiuntive rispetto alla sola periodicità della funzione generatrice.

INTERPRETAZIONE DISTRIBUZIONALE

Oggi possiamo leggere la dimostrazione appena svolta alla luce della teoria delle distribuzioni. Infatti, posto

$$f_n(t) = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\, t}{2\pi \operatorname{sen} \frac{t}{2}}$$

possiamo verificare che

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$$

Presa una generica funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$, dobbiamo verificare che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, \varphi(t)\, dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2k\pi).$$

Ragioniamo su ciascuno degli intervalli $I_k = (2k\pi - \pi,\, 2k\pi + \pi)$ per $k \in \mathbb{Z}$. Basta considerare un numero finito di tali intervalli, al di fuori dei quali φ è nulla.

Essendo f_n periodica di periodo 2π, basta considerare l'intervallo I_0 e verificare che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(0).$$

Ma questo è vero perché $\varphi \in \mathcal{D} \subset L^1((-\pi, \pi))$, dunque possiamo applicare il teorema 3 appena dimostrato.

La convoluzione e la sua utilità

Convoluzione tra due funzioni

La convoluzione, che si denota con il simbolo $*$, è un'operazione tra due funzioni, il cui risultato è ancora una funzione.

Ad esempio, presa una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ed una $\varphi \in \mathcal{D}$, si può definire la funzione $f * \varphi$ ponendo

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(x-t)\,dt. \quad (48)$$

Si noti che la variabile di integrazione t è una variabile muta, mentre la lettera x denota un parametro dal quale il valore numerico dell'integrale viene a dipendere.

Dunque l'integrale nella (48) definisce una funzione di x, che si denota con $(f * \varphi)(x)$.

L'integrale converge banalmente perché esiste per ipotesi un intervallo limitato (a, b) tale che $\operatorname{supp}\varphi \subset (a, b)$, e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(x-t)\,dt = \int_{x-b}^{x-a} f(t)\,\varphi(x-t)\,dt.$$

Quest'ultimo integrale converge perché φ è limitata ed f è localmente sommabile.

Simmetria

Si ha $f * \varphi = \varphi * f$. Infatti, con il cambiamento di variabile $y = x - t$ nella (48), si trova

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Essendo y una variabile muta, la si può ridenominare t:

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,f(x-t)\,dt,$$

e da qui discende l'asserto.

Convoluzione con una distribuzione

Indicata con T_f la distribuzione rappresentata dalla funzione f, la definizione (48) si può riscrivere come

$$(f * \varphi)(x) = T_f\,(\varphi(x-t)). \quad (49)$$

Si badi che, essendo la x presente in entrambi i membri, essa va intesa come un parametro, e di conseguenza la distribuzione T_f agisce su $\varphi(x-t)$ intesa come funzione della variabile t.

La relazione (49) suggerisce la seguente definizione: per ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ ed ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ si pone

$$(T * \varphi)(x) = T_{[t]}(\varphi(x-t)), \quad (50)$$

dove l'indice $_{[t]}$ sta a rimarcare che $\varphi(x-t)$ si intende come funzione della variabile t, essendo x un parametro fissato.

VARIE NOTAZIONI

Per sottolineare la differenza tra i parametri e le variabili, vengono adottate varie notazioni.

Ad esempio, nel classico testo di Yosida, Functional analysis, si pone

$$\check{\varphi}(t) = \varphi(-t).$$

Il soprassegno $\check{}$ si legge "check".

Invece il prof. Aldo Pratelli dell'Università di Pavia (oggi a Pisa), adottava nella sua dispensa la notazione

$$\overline{\varphi}(t) = \varphi(-t).$$

Nella stessa dispensa si utilizzava l'operatore di traslazione τ_x, dove x è un parametro. La funzione $\tau_x \varphi$ è definita da

$$(\tau_x \varphi)(t) = \varphi(t - x).$$

Con questa notazione, la definizione (50) della convoluzione diventa

$$(T * \varphi)(x) = T(\tau_x \check{\varphi}).$$

ELEMENTO NEUTRO: δ

Applicando la definizione (50) alla distribuzione δ di Dirac, si trova

$$\begin{aligned} (\delta * \varphi)(x) &= \delta_{[t]}(\varphi(x - t)) \\ &= \varphi(x). \end{aligned} \tag{51}$$

Dunque la δ di Dirac è l'elemento neutro per la convoluzione.

DERIVATA DELLA CONVOLUZIONE

Derivando ambo i membri della (48) rispetto alla x, si trova

$$(f * \varphi)'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \varphi'(x - t)\, dt. \tag{52}$$

Per giustificare la derivata sotto il segno di integrale si può fare appello alla teoria di Lebesgue.

Infatti la derivata φ' ammette massimo e minimo per il teorema di Weierstrass, e quindi si può scrivere

$$|f(t)\, \varphi'(x - t)| \leq M\, |f(t)|.$$

A sua volta il secondo membro, detto "funzione maggiorante" è localmente sommabile per ipotesi.

Poiché l'intervallo di integrazione nella (52) è in realtà l'intervallo limitato $(x - b,\, x - a)$, la funzione integranda ammette una maggiorante sommabile.

L'esistenza di una maggiorante sommabile della derivata è la tipica condizione della teoria di Lebesgue per giustificare la derivazione sotto il segno di integrale.

Osservando la (52) si constata che

$$(f * \varphi)' = f * \varphi'.$$

Iterando il ragionamento, si ottiene

$$(f * \varphi)^{(k)} = f * \varphi^{(k)} \tag{53}$$

dunque la funzione $f * \varphi$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Si noti, inoltre, che per la convoluzione non vale la regola di Leibniz.

MOTIVAZIONI: POTERE REGOLARIZZANTE

Le motivazioni alla base dell'uso della convoluzione stanno nelle sue proprietà formali e nel suo potere regolarizzante.

Quest'ultimo consiste nel fatto che, sebbene f possa non essere derivabile, la convoluzione $f * \varphi$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Anche la funzione $T * \varphi$ definita nella (50) è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Ciò è notevole perché il primo fattore può non essere nemmeno rappresentato da una funzione di una variabile reale.

Verifichiamo, innanzitutto, che la funzione $T_{[t]}(\varphi(x-t))$ dipende con continuità dal parametro x.

Usiamo la definizione successionale di limite: fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, verifichiamo che, per ogni successione $x_n \to x_0$, la successione numerica

$$T_{[t]}(\varphi(x_n - t))$$

converge a $T_{[t]}(\varphi(x_0 - t))$ nel senso dei numeri reali.

Ciò discende dal fatto che $T_{[t]}$ è continua per definizione, mentre la successione di funzioni $\varphi(x_n - t)$, nella variabile t, converge alla funzione $\varphi(x_0 - t)$ nel senso delle funzioni test.

Quest'ultima proprietà segue dall'uniforme continuità di φ e delle sue derivate.

Verifichiamo ora che la funzione $T_{[t]}(\varphi(x-t))$ è derivabile rispetto al parametro x.

Trattandosi di una funzione a valori reali, applichiamo la definizione della derivata.

Per la linearità dell'applicazione $T_{[t]}$, si ha

$$\frac{T_{[t]}(\varphi(x-t)) - T_{[t]}(\varphi(x_0-t))}{x - x_0} = T_{[t]}\Big(\frac{\varphi(x-t) - \varphi(x_0-t)}{x-x_0}\Big)$$

Per calcolare il limite per $x \to x_0$, usiamo ancora la definizione successionale. Consideriamo una successione $x_n \to x_0$.

Senza ledere la generalità, possiamo supporre che $x_n \neq x_0$ per ogni $n > 0$.

Usando il teorema di Lagrange, e l'uniforme continuità delle $\varphi^{(k)}$, si deduce che la successione dei rapporti incrementali

$$\frac{\varphi(x_n - t) - \varphi(x_0 - t)}{x_n - x_0},$$

che sono funzioni di t, converge alla funzione $\varphi'(x_0 - t)$ nel senso delle funzioni test.

Essendo $T_{[t]}$ continua, si conclude che

$$\frac{d}{dx} T_{[t]}(\varphi(x-t)) = T_{[t]}(\varphi'(x-t)).$$

Il risultato appena stabilito si può riformulare scrivendo

$$(T * \varphi)'(x) = (T * \varphi')(x).$$

Iterando il ragionamento, si conclude che

$$(T * \varphi)^{(k)}(x) = (T * \varphi^{(k)})(x).$$

Dunque la convoluzione $T * \varphi$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, e la formula (53) si estende alle distribuzioni.

Uso della definizione alla rovescia

Ponendo $x = 0$ nella definizione (50) si ricava

$$T(\varphi) = (T * \check{\varphi})(0).$$

Questa relazione esprime il valore numerico di $T(\varphi)$ facendo intervenire la convoluzione.

In particolare, se T è la distribuzione T_f associata ad una funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, la suddetta relazione diventa

$$T_f(\varphi) = (f * \check{\varphi})(0). \tag{54}$$

Questo artificio permette di sfruttare le notevoli proprietà della convoluzione, ad esempio per dimostrare la densità di $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$.

Continuità della convoluzione (cenni)

Come è noto, la convergenza $\rho_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$ significa che per ogni funzione test $\psi \in \mathcal{D}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\, \psi(t)\, dt = \psi(0).$$

Fissati arbitrariamente una funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ ed un punto $x \in \mathbb{R}$, possiamo porre $\psi(t) = \varphi(x - t)$ e ricavare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\, \varphi(x - t)\, dt = \varphi(x).$$

A sua volta quest'ultima relazione si può riformulare scrivendo

$$\lim_{n\to+\infty} (\rho_n * \varphi)(x) = \varphi(x).$$

Dunque $\rho_n * \varphi \to \varphi$ puntualmente. Anzi, si verifica che

$$(\rho_n * \varphi) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi. \tag{55}$$

Poiché, per la (51), si ha $\delta * \varphi = \varphi$, la relazione (55) si può vedere come una proprietà di continuità della convoluzione $T * \varphi$, rispetto al primo fattore, nel punto $T = \delta$.

Densità di $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$

INTRODUZIONE

Sono note diverse successioni di funzioni più o meno regolari che tendono alla distribuzione δ di Dirac nel senso delle distribuzioni.

Un tipico esempio è dato dalla successione dei mollificatori ρ_n (esercizio (c) della serie [003]).

Ciò è notevole perché i mollificatori sono funzioni molto regolari, mentre la δ di Dirac è una distribuzione singolare.

In generale, qualunque distribuzione T è il limite, nel senso delle distribuzioni, di una opportuna successione di funzioni test.

Questo fatto si esprime dicendo che lo spazio $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{D}'$. Accenniamo alla dimostrazione nei prossimi paragrafi.

DENSITÀ DI $C^\infty(\mathbb{R})$ IN $\mathcal{D}'$ (CENNI)

Fissata arbitrariamente una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$, verifichiamo che le funzioni $f_n = T * \rho_n$, che sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, convergono a T nel senso delle distribuzioni.

A tal fine, fissata arbitrariamente una funzione test φ, dobbiamo verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} T_{T*\rho_n}(\varphi) = T(\varphi), \qquad (56)$$

essendo $T_{T*\rho_n}$ la distribuzione regolare rappresentata dalla funzione $T * \rho_n$.

Sruttando alla rovescia la definizione della convoluzione, come nella (54), possiamo scrivere

$$T_{T*\rho_n}(\varphi) = ((T * \rho_n) * \check{\varphi})(0).$$

Ma la convoluzione è associativa (la dimostrazione si può trovare, ad esempio, a pag. 157 dello Yosida). Dunque

$$T_{T*\rho_n}(\varphi) = (T * (\rho_n * \check{\varphi}))(0).$$

Per la definizione (50) della convoluzione, si ha

$$(T * (\rho_n * \check{\varphi}))(0) = T((\rho_n * \check{\varphi})\check{})$$

Ma essendo T continua, e poiché $(\rho_n * \check{\varphi}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \check{\varphi}$ per la (55), risulta

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} T((\rho_n * \check{\varphi})\check{}) &= T(\check{\check{\varphi}}) \\ &= T(\varphi).\end{aligned}$$

Dunque vale la (56), come volevasi dimostrare.

DENSITÀ DELLO SPAZIO $\mathcal{D}$ IN $C^\infty(\mathbb{R})$

Ogni funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ è il limite, nel senso delle distribuzioni, di un'opportuna successione di funzioni test φ_n.

Anzi, le funzioni test φ_n possono essere scelte in modo tale da convergere ad f localmente uniformemente (v. pag. D23).

Prima di vedere la dimostrazione, osserviamo che il prodotto di convoluzione $f_n = f * \rho_n$, che è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, tende ad f in $\mathcal{D}'$ per quanto visto nel paragrafo precedente.

Tuttavia, il suddetto prodotto non ha, in generale, supporto compatto. Lo si può constatare, ad esempio, prendendo $f(x) \equiv 1$. In tal caso si ha, per definizione,

$$\begin{aligned}(1 * \rho_n)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x-t)\,dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

Dunque il supporto $\operatorname{supp}(1 * \rho_n) = \mathbb{R}$ non è limitato.

Per costruire una successione di funzioni test φ_n convergente ad f in $\mathcal{D}'$ si sfrutta una successione di funzioni ausiliarie ζ_n, dette "troncanti" (cutoff functions).

FUNZIONI TRONCANTI

Per definire opportune funzioni troncanti $\zeta_n(x)$ si può iniziare ponendo

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(t)\,dt,$$

dove $\psi(t)$ è come nella (2). Osservato che $\Psi(x) = -\frac{c}{2}$ per $x \le -1$, e $\Psi(x) = \frac{c}{2}$ per $x \ge 1$, si definisce

$$\zeta_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le n; \\ \frac{1}{2} + \frac{\Psi(1+n-|x|)}{c}, & n < |x| \le n+2; \\ 0, & |x| > n+2. \end{cases}$$

SCELTA DELLE FUNZIONI φ_n

La funzione prodotto $\varphi_n(x) = \zeta_n(x)\, f_n(x)$ è ancora di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, ed in più il suo supporto è incluso nell'intervallo $[-n-2,\, n+2]$, dunque $\varphi_n \in \mathcal{D}$.

Verifichiamo che φ_n tende ad f localmente uniformemente.

Fissato arbitrariamente un intervallo limitato $[a, b]$, osserviamo che per ogni $n > \max\{|a|,\, |b|\}$ si ha $[a, b] \subset [-n, n]$, e quindi

$$\varphi_n(x) = f(x)$$

per ogni $x \in [a, b]$. Dunque φ_n converge (banalmente) ad f uniformemente in $[a, b]$, come volevasi dimostrare.

Poiché la convergenza localmente uniforme implica la convergenza in $\mathcal{D}'$ (v. pag. D23), si ha a maggior ragione

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f.$$

DIMOSTRAZIONE DELLA DENSITÀ DI $\mathcal{D}$ IN $\mathcal{D}'$

Presa arbitrariamente una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$, consideriamo il prodotto di convoluzione $f_n(x) = (T * \rho_n)(x)$, dove ρ_n denota, come di consueto, un mollificatore.

Verifichiamo che la funzione test $\varphi_n(x) = \zeta_n(x)\, f_n(x)$, dove ζ_n è la funzione troncante definita nel paragrafo precedente, converge a T nel senso delle distribuzioni.

Fissata arbitrariamente una funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$, dobbiamo verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_n(x)\, f_n(x)\, \varphi(x)\, dx = T(\varphi).$$

Fissato un intervallo limitato (a, b) che contiene $\operatorname{supp}\varphi$, possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_n(x)\, f_n(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_a^b \zeta_n(x)\, f_n(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Ma poiché $(a, b) \subset [-n, n]$ per $n > \max\{|a|, |b|\}$, ed essendo ivi $\zeta_n(x) = 1$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_n(x)\, f_n(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_a^b f_n(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Quest'ultimo integrale non è altro che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, \varphi(x)\, dx$$

che tende a $T(\varphi)$ per la (56). La verifica è conclusa.

Complementi

LO SPAZIO TOPOLOGICO $C^0(\mathbb{R})$

Si può dotare lo spazio $C^0(\mathbb{R})$ di una topologia nella quale le successioni convergenti sono quelle che convergono localmente uniformemente.

La convergenza localmente uniforme, a sua volta, è stata considerata a pag. D23.

Può essere utile vedere diversi modi di costruire la stessa topologia.

UNA COSTRUZIONE ELEMENTARE

Per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ e per ogni $r \in (0, +\infty)$ definiamo l'intorno $\mathcal{U}_{nr}$ della funzione nulla ponendo:

$$\mathcal{U}_{nr} = \{ f \in C^0(\mathbb{R}) : \|f\|_{C^0([-n,n])} < r \}.$$

A partire dagli intorni $\mathcal{U}_{nr}$ della funzione nulla, si definiscono gli intorni di una qualunque funzione $f_0 \in C^0(\mathbb{R})$ ponendo

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{nr}(f_0) &= f_0 + \mathcal{U}_{nr} \\ &= \{ f \in C^0(\mathbb{R}) : f - f_0 \in \mathcal{U}_{nr} \}. \end{aligned}$$

Ragionando come a pag. D13, si dimostra che l'insieme di tutti gli intorni come sopra definiti costituisce una base per una topologia, che possiamo chiamare informalmente la topologia delle strisce centrali.

Verifichiamo che una successione di funzioni $f_k \in C^0(\mathbb{R})$ converge ad una funzione $f \in C^0(\mathbb{R})$ nella topologia anzidetta se e solo se $f_k \to f$ localmente uniformemente.

Consideriamo una successione di funzioni $f_k \in C^0(\mathbb{R})$ convergente alla funzione nulla nella topologia dianzi introdotta, e sia K un qualunque compatto di $\mathbb{R}$.

Verifichiamo che $f_n \to 0$ uniformemente in K.

Fissiamo innanzitutto $n \in \mathbb{Z}^+$ in modo tale che

$$K \subset [-n, n]. \tag{57}$$

Poi, per ogni $\varepsilon \in (0, +\infty)$ prendiamo $r = \varepsilon$ e sappiamo per ipotesi che $f_k \in \mathcal{U}_{nr}$ definitivamente.

Per la definizione di $\mathcal{U}_{nr}$, ciò mostra che le f_k convergono uniformemente, alla funzione nulla, sull'insieme al secondo membro della (57) e a maggior ragione sull'insieme K.

Viceversa: supponiamo che le f_k convergano alla funzione nulla localmente uniformemente, e prendiamo un intorno arbitrario $\mathcal{U}_{nr}$ della funzione nulla.

L'insieme $K = [-n, n]$ è compatto, dunque le f_k convergono uniformemente in K per ipotesi alla funzione nulla.

Applicando la definizione della convergenza uniforme con $\varepsilon = r$, si ricava che $f_k \in \mathcal{U}_{nr}$ definitivamente, dunque $f_k \to 0$ nella topologia delle strisce centrali.

UNA COSTRUZIONE ASTRATTA

Descriviamo un procedimento più astratto per costruire la stessa topologia sullo spazio $C^0(\mathbb{R})$.

Per ogni sottoinsieme compatto $K \subset \mathbb{R}$ ed ogni $\rho \in (0, +\infty)$ definiamo l'intorno $\mathcal{V}_{K\rho}$ della funzione nulla ponendo:

$$\mathcal{V}_{K\rho} = \{ f \in C^0(\mathbb{R}) : \max_K |f| < \rho \}.$$

A partire dagli intorni $\mathcal{V}_{K\rho}$ della funzione nulla, si definiscono gli intorni di una qualunque funzione $f_0 \in C^0(\mathbb{R})$ ponendo

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{K\rho}(f_0) &= f_0 + \mathcal{V}_{K\rho} \\ &= \{ f \in C^0(\mathbb{R}) : f - f_0 \in \mathcal{V}_{K\rho} \}. \end{aligned}$$

Ragionando come a pag. D13, si dimostra che l'insieme di tutti gli intorni come sopra definiti costituisce una base per una topologia.

Verifichiamo che essa coincide con quella delle strisce centrali.

Prima parte: ogni intorno $\mathcal{U}_{nr}$ è un $\mathcal{V}_{K\rho}$ con K e ρ opportuni. Ciò segue immediatamente dalle definizioni: basta prendere $K = [-n, n]$ e $\rho = r$.

Seconda parte: ogni intorno $\mathcal{V}_{K\rho}$, pur non essendo necessariamente un $\mathcal{U}_{nr}$, è tuttavia aperto nella topologia delle strisce centrali.

Per vederlo, presa una qualunque funzione $f_0 \in \mathcal{V}_{K\rho}$ dobbiamo dimostrare che esiste un suo intorno $f_0 + \mathcal{U}_{nr}$ tale che

$$f_0 + \mathcal{U}_{nr} \subset \mathcal{V}_{K\rho}. \tag{58}$$

A tal fine prendiamo innanzitutto n tale che $K \subset [-n, n]$, e poi, visto che $\rho - \max_K |f_0| > 0$, scegliamo

$$r \in (0,\ \rho - \max_K |f_0|).$$

Se adesso prendiamo una qualunque funzione $f \in f_0 + \mathcal{U}_{nr}$, avremo per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x)|$$

quindi

$$\begin{aligned} \max_K |f| &\leq \max_K |f(x) - f_0(x)| + \max_K |f_0| \\ &< r + \max_K |f_0| < \rho \end{aligned}$$

e perciò $f \in \mathcal{V}_{K\rho}$. Dunque vale la (58), come volevasi dimostrare.

UNA COSTRUZIONE PIÙ ELABORATA

UNA BASE DI INTORNI $\mathcal{U}^k_{ZR} \subset C^0(\mathbb{R})$ DELLA FUNZIONE NULLA SI PUÒ ANCHE DEFINIRE COME SEGUE: PER OGNI $n \in \mathbb{Z}^+$, PER OGNI INSIEME

$$Z = \{\, z_1 < \ldots < z_k \,\} \subset \mathbb{Z}$$

E PER OGNI k-UPLA

$$R = (r_1, \ldots, r_k) \in (0, +\infty)^k$$

PONIAMO:

$$\mathcal{U}^k_{ZR} = \{\, f \in C^0(\mathbb{R}) : \\ \|f\|_{C^0([z_i,\, z_i+1])} < r_i \text{ PER } i = 1, \ldots, k \,\}.$$

A PARTIRE DAGLI INTORNI $\mathcal{U}^k_{ZR}$ DELLA FUNZIONE NULLA, SI DEFINISCONO GLI INTORNI DI UNA QUALUNQUE FUNZIONE $f_0 \in C^0(\mathbb{R})$ PONENDO

$$\mathcal{U}^k_{ZR}(f_0) = f_0 + \mathcal{U}^k_{ZR} \\ = \{\, f \in C^0(\mathbb{R}) : f - f_0 \in \mathcal{U}^k_{ZR} \,\}.$$

RAGIONANDO COME A PAG. D13, SI DIMOSTRA CHE L'INSIEME DI TUTTI GLI INTORNI COME SOPRA DEFINITI COSTITUISCE UNA BASE PER UNA TOPOLOGIA.

VERIFICHIAMO CHE QUESTA TOPOLOGIA È LA STESSA CHE SI OTTIENE A PARTIRE DAGLI INTORNI $\mathcal{V}_{K\rho}$ DI PAGINA D66.

PRIMA PARTE: OGNI $\mathcal{U}^k_{RZ}$ È INTERSEZIONE DI UN NUMERO FINITO DI OPPORTUNI $\mathcal{V}_{K\rho}$. INFATTI, POSTO $K_i = [z_i, z_i + 1]$ E $\rho_i = r_i$ SI HA

$$\mathcal{U}^k_{RZ} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{V}_{K_i \rho_i}.$$

DUNQUE $\mathcal{U}^k_{RZ}$ È APERTO NELLA TOPOLOGIA DETERMINATA DAI $\mathcal{V}_{K\rho}$.

SECONDA PARTE: OGNI $\mathcal{V}_{K\rho}$ È APERTO NELLA TOPOLOGIA DETERMINATA DAGLI $\mathcal{U}^k_{RZ}$.

PER VEDERLO, PROCEDIAMO COME A PAG. D66: PRENDIAMO $f_0 \in \mathcal{V}_{K\rho}$ E DETERMINIAMO $\mathcal{U}^k_{RZ}$ TALE CHE

$$f_0 + \mathcal{U}^k_{RZ} \subset \mathcal{V}_{K\rho}. \tag{59}$$

AVENDO GIÀ DETERMINATO UN $\mathcal{U}_{nr}$ SODDISFACENTE LA (58), BASTERÀ VERIFICARE CHE OGNI $\mathcal{U}_{nr}$ È, IN EFFETTI, UNO DEGLI $\mathcal{U}^k_{ZR}$.

PRESO ARBITRARIAMENTE UN INTORNO DELLA FAMIGLIA $\mathcal{U}_{nr}$, POSSIAMO DETERMINARE $\mathcal{U}^k_{ZR} = \mathcal{U}_{nr}$ PONENDO $k = 2n$ E $z_i = i - n - 1$, $r_i = r$ PER $i = 1, \ldots, k$.

ALLORA SEGUE DALLE DEFINIZIONI CHE $\mathcal{U}^k_{ZR} = \mathcal{U}_{nr}$, E LA (59) SEGUE DALLA (58).

IN CONCLUSIONE, TUTTE E TRE LE COSTRUZIONI SIN QUI ESAMINATE CONDUCONO ALLA MEDESIMA TOPOLOGIA SULLO SPAZIO $C^0(\mathbb{R})$.

LA CONOSCENZA DI DIVERSE BASI DI INTORNI È UTILE NELLA PROSSIMA DISCUSSIONE DI UNA METRICA SULLO SPAZIO $C^0(\mathbb{R})$.

LO SPAZIO METRICO $C^0(\mathbb{R})$

Si può dotare lo spazio $C^0(\mathbb{R})$ di una metrica nella quale le successioni convergenti sono quelle che convergono localmente uniformemente.

Una delle diverse metriche atte allo scopo si può definire come segue: per ogni funzione $f \in C^0(\mathbb{R})$ poniamo

$$d(f, 0) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|h|}} \frac{s_h(f)}{1 + s_h(f)}$$

dove il simbolo 0 denota la funzione identicamente nulla, e $s_h(f)$ è dato da

$$s_h(f) = \|f\|_{C^0([h,\,h+1])}. \tag{60}$$

La serie, che è a termini non negativi, converge in quanto il rapporto $s_h(f)/(1 + s_h(f))$ sta nell'intervallo $[0, 1)$ qualunque sia il valore di $s_h(f) \in [0, +\infty)$.

Intendiamo che la somma della serie suddetta sia definita da

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{|h|}} \frac{s_h(f)}{1 + s_h(f)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{-k}} \frac{s_{-k}(f)}{1 + s_{-k}(f)}$$

dove adesso le due serie sono del tipo consueto.

Più in generale, si pone $d(f, g) = d(f - g, 0)$. Per dimostrare la disuguaglianza triangolare si sfrutta il fatto che la funzione $\rho(s) = s/(1 + s)$ è subadditiva, cioè

$$\rho(s + t) \leq \rho(s) + \rho(t) \tag{61}$$

per ogni $s, t \in [0, +\infty)$. Questo si può dimostrare fissando $t \in [0, +\infty)$ ed osservando che la (61) vale evidentemente per $s = 0$. Si ha, inoltre,

$$\rho'(s + t) \leq \rho'(s)$$

per concavità, dunque la (61) vale per ogni $s \in [0, +\infty)$.

CHI CI HA PENSATO?

L'idea di definire una metrica procedendo in questo modo è attribuita a M. Fréchet (1906) da B. Simon nelle note storiche nel volume 1 di Real Analysis (paragrafo 6.1).

QUAL È LA NORMA DI $C^0(\mathbb{R})$?

Osserviamo che la palla di raggio 3 rispetto alla metrica anzidetta, centrata nella funzione nulla, coincide con l'intero spazio $C^0(\mathbb{R})$ in quanto

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|h|}} = 3.$$

Ne segue che tale metrica non discende da una norma: altrimenti, presa una $f \in C^0(\mathbb{R})$ non identicamente nulla, si avrebbe $d(kf, 0) = \|kf\| = k\,\|f\| \to +\infty$ per $k \to +\infty$.

Confrontiamo la metrica di $C^0(\mathbb{R})$ con la topologia

Le palle $B_s(f)$ nella metrica appena definita su $C^0(\mathbb{R})$ costituiscono una base di intorni per una topologia: vogliamo verificare che si tratta della stessa topologia che avevamo già introdotto prima.

Ciò è interessante anche perché la distanza $d(f, 0)$ tiene conto dei valori di $f(x)$ per ogni x, mentre la relazione $f \in \mathcal{U}_{nr}$, $\mathcal{V}_{K\rho}$, $\mathcal{U}^k_{ZR}$ dipende solo dai valori di f in un compatto opportuno.

Prima parte: verifichiamo che la palla $B_s(0)$ è unione di opportuni intorni $\mathcal{U}^k_{ZR}$: per vederlo, prendiamo $f \in B_s(0)$ e procediamo a determinare $\mathcal{U}^k_{ZR} \subset B_s(0)$ in modo tale che $f \in \mathcal{U}^k_{ZR}$.

Se $s \geq 3$ si ha $B_s(0) = C^0(\mathbb{R})$, quindi basta prendere un $\mathcal{U}^k_{ZR}$ qualunque.

Consideriamo allora un $s \in (0, 3)$ e fissiamo una $f \in B_s(0)$. Costruiremo $\mathcal{U}^k_{ZR}$ procedendo in due passi: taglio delle code, e piccolo superamento delle $s_h(f)$.

Primo passo: osserviamo che la somma

$$\sum_{h=-\infty}^{-h_0-1} \frac{1}{2^{|h|}} + \sum_{h=-h_0}^{h_0-1} \frac{1}{2^{|h|}} \frac{s_h(f)}{1+s_h(f)} + \sum_{h=h_0}^{+\infty} \frac{1}{2^h}$$

tende a $d(f, 0) < r$ quando $h_0 \to +\infty$. Perciò, per il teorema della permanenza del segno, esiste $h_0 \in \mathbb{Z}^+$ tale che

$$\sum_{h=-\infty}^{-h_0-1} \frac{1}{2^{|h|}} + \sum_{h=-h_0}^{h_0-1} \frac{1}{2^{|h|}} \frac{s_h(f)}{1+s_h(f)} + \sum_{h=h_0}^{+\infty} \frac{1}{2^h} < r.$$

Secondo passo: ferme restando le code, e cioè la prima e la terza sommatoria, andiamo a prendere $n = 2h_0$, $Z = \{-h_0, \ldots, h_0 - 1\}$ e i raggi $r_1, \ldots, r_n$ tali che, da un lato, si abbia

$$r_{h+h_0+1} > s_h(f) \tag{62}$$

per $h = -h_0, \ldots, h_0 - 1$, e tali da avere, d'altro lato,

$$\sum_{h=-\infty}^{-h_0-1} \frac{1}{2^{|h|}} + \sum_{h=-h_0}^{h_0-1} \frac{1}{2^{|h|}} \frac{r_{h+h_0+1}}{1+r_{h+h_0+1}} + \sum_{h=h_0}^{+\infty} \frac{1}{2^h} < r.$$

Il numero n, l'insieme Z e la ennupla $R = (r_1, \ldots, r_n)$ individuano un intorno $\mathcal{U}^k_{ZR}$ che: è incluso in $B_s(0)$ per la disuguaglianza precedente, e contiene f perché i raggi $r_1, \ldots, r_n$ soddisfano le (62).

Dunque le palle $B_s(0)$ sono aperte nella topologia che avevamo introdotto inizialmente.

Viceversa: verifichiamo che per ogni aperto $\mathcal{U}$ di tale topologia, e per ogni $f \in \mathcal{U}$, esiste una palla $B_s(f) \subset \mathcal{U}$.

Essendo $B_s(f) = f + B_s(0)$, ciò equivale a trovare

$$B_s(0) \subset \mathcal{U} - f.$$

Per come è stata costruita la topologia di $C^0(\mathbb{R})$, l'insieme $\mathcal{U} - f$ è ancora un aperto. Inoltre, poiché $f \in \mathcal{U}$, esso contiene la funzione identicamente nulla.

E allora è sufficiente dimostrare che ogni intorno $\mathcal{U}_{nr}$ contiene una palla $B_s(0)$ con s opportuno.

Notiamo innanzitutto che se $B_s(0)$ è una palla qualunque, allora per ogni $f \in B_s(0)$ ed ogni $h \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\frac{s_h(f)}{1 + s_h(f)} \leq 2^{|h|}\, d(f, 0) < 2^{|h|}\, s. \qquad (63)$$

Perciò, se abbiamo un $\mathcal{U}_{nr}$ e vogliamo trovare $B_s(0) \subset \mathcal{U}_{nr}$, basta scegliere s in modo tale che i prodotti $2^{|h|}\, s$, e di conseguenza anche le $s_h(f)$ quando $f \in B_s(0)$, siano piccoli per ogni $h = -n, \ldots, n-1$: abbastanza piccoli da ottenere, per la (60)

$$\begin{aligned} \max_{[-n,n]} |f| &= \max_{h=-n,\ldots,n-1} \|f\|_{C^0([h,\, h+1])} \\ &= \max_{h=-n,\ldots,n-1} s_h(f) < r. \qquad (64) \end{aligned}$$

Ciò mostra che $B_s(0) \subset \mathcal{U}_{nr}$ come si voleva.

Dettagli: posto $\rho(s) = s/(1+s)$ per $s \in [0, +\infty)$, la (63) implica che

$$\rho(s_h(f)) < 2^n\, s$$

per ogni $h = -n, \ldots, n-1$. Inoltre, poiché $\rho(s)$ è strettamente crescente, la (64) equivale a

$$\rho(s_h(f)) < \rho(r)$$

per $h = -n, \ldots, n-1$: quindi, per soddisfare la (64), basta prendere

$$s < \frac{\rho(r)}{2^n}.$$

SUPPORTO DI UNA DISTRIBUZIONE

Si rammenti che non ha senso parlare di valore di una distribuzione in un punto $x \in \mathbb{R}$, perché le distribuzioni non sono funzioni di una variabile reale.

Si può dire, tuttavia, che una distribuzione T è nulla in un intervallo (a, b), o, più in generale, in un sottoinsieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$, se risulta

$$T(\varphi) = 0$$

ogniqualvolta il supporto di φ è incluso in Ω.

L'unione di tutti gli aperti Ω nei quali una distribuzione data T è nulla è ancora un aperto, per ragioni topologiche.

Esso è il più grande aperto in cui T è nulla (vedere appresso).

Il complementare di tale aperto si dice supporto della distribuzione T.

Esempio 1: il supporto della distribuzione δ di Dirac è costituito da un solo punto, l'origine. Si ha, cioè,

$$\operatorname{supp} \delta = \{ 0 \}.$$

Infatti, se prendiamo una $\varphi \in \mathcal{D}$ tale che $\operatorname{supp} \varphi \subset (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, risulta

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) = 0.$$

Dunque l'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ è il più grande aperto in cui la distribuzione δ si annulla, ed il suo complementare è l'insieme $\{ 0 \}$.

Esempio 2: il supporto della distribuzione δ', derivata della δ di Dirac, è costituito da un solo punto, l'origine. Si ha, cioè,

$$\operatorname{supp} \delta' = \{ 0 \}.$$

Infatti, se prendiamo una $\varphi \in \mathcal{D}$ tale che $\operatorname{supp} \varphi \subset (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, risulta $\varphi(x) = 0$ in tutto un intorno dell'origine, e perciò

$$\delta'(\varphi) = -\varphi'(0) = 0.$$

Dunque l'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ è il più grande aperto in cui la distribuzione δ' si annulla, ed il suo complementare è l'insieme $\{ 0 \}$.

Esempio 3: il supporto della distribuzione regolare T_H, associata alla funzione a gradino di Heaviside $H(x)$, è l'intervallo $[0, +\infty)$.

Infatti si vede subito che, se $\operatorname{supp} \varphi \subset (-\infty, 0)$, allora $T_H(\varphi) =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 0,$$

dunque T_H si annulla su $(0, +\infty)$.

D'altra parte, supponiamo per assurdo che T_H si annulli su di un aperto A più grande: se così fosse, si avrebbe $A \cap (0, +\infty) \neq \emptyset$.

Ma allora, preso $x_0 \in A \cap (0, +\infty)$ e $r \in (0, x_0)$ tale che $(x_0 - r,\, x_0 + r) \subset A$, e posto $\varphi = \psi(\frac{x - x_0}{r})$, dove ψ è la funzione a campana (2), sostituendo $y = \frac{x - x_0}{r}$ si troverebbe $T_H(\varphi) =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tfrac{x - x_0}{r})\, dx = r \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\, dy > 0,$$

contro l'ipotesi che T_H si annulli su A.

INTRODUZIONE ALLE PARTIZIONI DELL'UNITÀ

Il fatto che l'unione di tutti gli aperti sui quali una distribuzione data T si annulla sia ancora un aperto, che indicheremo con Ω_0, è una proprietà topologica.

Invece il fatto che T si annulli anche su Ω_0 si può dimostrare utilizzando la tecnica della partizione dell'unità, cui spesso si ricorre per trarsi d'impaccio in varie dimostrazioni, ben al di là della teoria delle distribuzioni.

In questa sede, per semplicità, ci limitiamo a considerare due casi particolari.

1. Se la distribuzione T si annulla su due aperti disgiunti Ω_1 e Ω_2, allora si annulla anche sull'aperto $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Ciò si verifica facilmente perché se $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, allora le restrizioni $\varphi_1 = \varphi|_{\Omega_1}$ e $\varphi_2 = \varphi|_{\Omega_2}$ sono ancora funzioni test.

Inoltre risulta $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \Omega_i$ per $i = 1, 2$, e

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Poiché per ipotesi $T(\varphi_1), T(\varphi_2) = 0$, ne segue

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= T(\varphi_1) + T(\varphi_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

il che prova l'asserto.

2. Se la distribuzione T si annulla su due intervalli aperti e limitati $\Omega_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2$, parzialmente sovrapposti nel senso che

$$a_1 < a_2 < b_1 < b_2$$

possiamo costruire una partizione dell'unità come segue.

Consideriamo i mollificatori $\rho_n(x) = \frac{n}{c}\,\psi(nx)$, dove $\psi(x)$ è la consueta funzione a campana (2), e la costante c è determinata in modo tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx = 1 \qquad (65)$$

(vedere l'esercizio (b) della serie `[003]`).

La funzione $\eta_n(x)$, data da

$$\eta_n(x) = \int_{-\frac{1}{n}}^{x} \rho_n(t)\,dt$$

è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, vale 0 per $x \leq -\frac{1}{n}$, vale 1 per $x \geq \frac{1}{n}$, ed assume valori compresi nell'intervallo $[0, 1]$.

Di conseguenza, la funzione $\zeta_n(x) = 1 - \eta_n(x)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, vale 0 per $x \geq \frac{1}{n}$, vale 1 per $x \leq -\frac{1}{n}$, ed assume valori compresi nell'intervallo $[0, 1]$.

Dalla definizione discende immediatamente che

$$\eta_n(x) + \zeta_n(x) = 1$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Combinando tra loro funzioni del tipo di η_n e ζ_n, opportunamente traslate, si definisce una funzione test ϑ_1 tale che:

$$\operatorname{supp}\vartheta_1 = [a_1 + \tfrac{1}{n},\, b_1 - \tfrac{1}{n}];$$
$$\vartheta_1(x) = 1 \text{ per } x \in [a_1 + \tfrac{3}{n},\, b_1 - \tfrac{3}{n}];$$
$$\vartheta_1(x) \in [0,1] \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Similmente, si definisce una funzione test ϑ_2 tale che

$$\operatorname{supp}\vartheta_2 = [b_1 - \tfrac{3}{n},\, b_2 - \tfrac{1}{n}];$$
$$\vartheta_2(x) = 1 \text{ per } x \in [b_1 - \tfrac{1}{n},\, b_2 - \tfrac{3}{n}];$$
$$\vartheta_2(x) \in [0,1] \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, si fa in modo che

$$\vartheta_1(x) + \vartheta_2(x) = 1 \qquad (66)$$

per ogni $x \in [a_1+\frac{3}{n},\, b_2-\frac{3}{n}]$. In questo modo l'unità al secondo membro è "ripartita" fra le funzioni ϑ_1 e ϑ_2.

La tecnica della partizione dell'unità, nella sua piena generalità, si può applicare al caso in cui gli aperti considerati sono infiniti.

La tecnica si applica, inoltre, ad aperti di $\mathbb{R}^N$ con N eventualmente maggiore di 1.

In questa sede consideriamo il presente caso, del tutto particolare, a fini puramente indicativi.

Applichiamo la partizione dell'unità (66).

Consideriamo una qualunque funzione test φ tale che

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\varphi &\subset \Omega_1 \cup \Omega_2\\ &= (a_1, b_2),\end{aligned}$$

e prendiamo n tale che

$$\operatorname{supp}\varphi \subset (a_1 + \tfrac{3}{n},\, b_2 - \tfrac{3}{n}).$$

Moltiplicando la (66) per $\varphi(x)$ otteniamo

$$\varphi(x) = \varphi(x)\,\vartheta_1(x) + \varphi(x)\,\vartheta_2(x) \qquad (67)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che il prodotto $\varphi_1(x) = \varphi(x)\,\vartheta_1(x)$ è una funzione test supportata in (a_1, b_1).

Inoltre, prendendo n tale che $b_1 - \frac{3}{n} > a_2$, il prodotto $\varphi_2(x) = \varphi(x)\,\vartheta_2(x)$ è una funzione test supportata in (a_2, b_2).

Quindi, poiché la distribuzione T si annulla su tali intervalli, dalla (67) si deduce

$$\begin{aligned}T(\varphi) &= T(\varphi_1) + T(\varphi_2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Essendo φ arbitraria, si conclude che T si annulla anche sull'unione $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$.

Continuità per successioni

Si dimostra facilmente che se un'applicazione $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ è continua rispetto alla topologia dello spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni test, allora è continua per successioni.

In questo paragrafo vogliamo dimostrare che se l'applicazione T è lineare, e continua per successioni, allora è continua rispetto alla topologia di $\mathcal{D}$.

Prima parte

Dimostriamo che la continuità per successioni implica una proprietà di limitatezza locale:

Se T è continua per successioni, allora per ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ esistono almeno un ordine di derivazione $h \in \mathbb{N}$ ed una costante M_h tali che risulti

$$|T(\varphi)| \le M_h \tag{68}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$ e tale che

$$\|\varphi\|_{C^h([a,b])} \le 1. \tag{69}$$

Il risultato mostra che i valori di $T(\varphi)$ non possono essere resi arbitrariamente grandi pur potendo scegliere grandi a piacere le derivate di φ di ordine superiore ad h.

Per la linearità di T, possiamo anche riformulare la (68) dicendo che esistono un ordine di derivazione $h \in \mathbb{N}$ e un raggio ρ_h tali che $|T(\varphi)| < 1$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ soddisfacente $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$ e $\|\varphi\|_{C^h([a,b])} \le \rho_h$.

Essendo $T(-\varphi) = -T(\varphi)$, per verificare la (68) supponiamo per assurdo che per ogni $h \in \mathbb{N}$ esista una funzione $\tilde{\varphi}_h \in \mathcal{D}$ tale che $\operatorname{supp}\tilde{\varphi}_h \subset [a,b]$, $\|\tilde{\varphi}_h\|_{C^h([a,b])} \le 1$ e $T(\tilde{\varphi}_h) > h$.

Posto $\varphi_h = \tilde{\varphi}_h/h$ per $h > 0$ il supporto non cambia, e abbiamo $\|\varphi_h\|_{C^h([a,b])} \le \frac{1}{h}$ e $T(\varphi_h) > 1$.

Dunque per ogni $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ed ogni intero $h > \frac{1}{\varepsilon}$ risulta $\|\varphi_h\|_{C^h([a,b])} < \varepsilon$, oltre a $\operatorname{supp}\varphi_h \subset [a,b]$.

Ma allora $\varphi_h \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ sebbene $T(\varphi_h) > 1$, il che è in contrasto con la continuità per successioni.

Pertanto devono esistere un ordine di derivazione h ed una costante M_h soddisfacenti la (68).

Seconda parte

Se T è localmente limitata nel senso della (68), allora è continua.

Per dimostrarlo, useremo un'idea che si trova in Schwartz, Théorie des distributions, capitolo III, §1.

Ci serve una partizione dell'unità: per ogni $z \in \mathbb{Z}$ fissiamo una $\vartheta_z \in \mathcal{D}$ non negativa in modo tale che $\operatorname{supp}\vartheta_z \subset [z-1,\, z+1]$ e

$$\sum_{z=-\infty}^{+\infty} \vartheta_z(x) = 1 \tag{70}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. È possibile scegliere opportunamente ϑ_0 e poi prendere $\vartheta_z(x) = \vartheta_0(x-z)$: vedere a pag. D73.

Notare che per ogni x fissato la somma in (70) ammette almeno uno, e al massimo due termini non nulli, dunque è una serie banale.

Moltiplicando la (70) per una qualunque $\varphi \in \mathcal{D}$ si ottiene la rappresentazione

$$\varphi(x) = \sum_{z=-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \vartheta_z(x).$$

Converrà però scrivere:

$$\varphi = \frac{1}{3} \sum_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|z|}}\, \varphi_z \tag{71}$$

dove le φ_z sono date da

$$\varphi_z(x) = 2^{|z|}\, 3\, \varphi(x)\, \vartheta_z(x) \tag{72}$$

e ovviamente $\operatorname{supp} \varphi_z \subset [z-1,\, z+1]$. La scelta dei coefficienti, in parte arbitraria, è dovuta al fatto che

$$\frac{1}{3} \sum_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|z|}} = 1.$$

Essendo il supporto di φ limitato, anche la somma in (71), intesa come somma di funzioni, riguarda solo un numero finito di termini.

Quindi, per la linearità di T, si può scrivere

$$T(\varphi) = \frac{1}{3} \sum_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|z|}}\, T(\varphi_z). \tag{73}$$

Ancora per la linearità di T è sufficiente, al fine di dimostrarne la continuità, verificare che la controimmagine $T^{-1}((-1, 1)) = \{\, \varphi \in \mathcal{D} : |T(\varphi)| < 1 \,\}$ contiene almeno un intorno $\mathcal{U}_{k,r}$ opportuno.

A tal fine, vista la (73), è sufficiente trovare un intorno $\mathcal{U}_{k,r}$ tale che, per ogni $\varphi \in \mathcal{U}_{k,r}$, e indicate con φ_z le funzioni nella (72), risulti $|T(\varphi_z)| < 1$ per ogni z.

Sull'intervallo $[a_z, b_z] = [z-1,\, z+1]$, per la (68) esistono un ordine di derivazione h_z ed un raggio ρ_z tali che $|T(\varphi_z)| < 1$ a condizione che

$$\|\varphi_z\|_{C^{h_z}([z-1,\, z+1])} < \rho_z. \tag{74}$$

A sua volta, la norma di φ_z in $C^{h_z}([z-1,\, z+1])$ si può rendere più piccola di ρ_z rendendo opportunamente piccole le norme di φ in $C^{h_z}([z-1,\, z])$ ed in $C^{h_z}([z,\, z+1])$.

In altri termini, esistono ρ_{1z} e ρ_{2z} tali che se

$$\|\varphi\|_{C^{h_z}([z-1,\, z])} < \rho_{1,z} \tag{75}$$

$$\|\varphi\|_{C^{h_z}([z,\, z+1])} < \rho_{2,z} \tag{76}$$

allora la (74) è soddisfatta. Scrivendo $z+1$ al posto di z, la (75) diventa

$$\|\varphi\|_{C^{h_{z+1}}([z,\, z+1])} < \rho_{1,z+1}.$$

Per soddisfare questa e la (76), basta prendere

$$k(z) = \max\{\, h_z,\, h_{z+1} \,\},$$

$$r(z) = \min\{\, \rho_{1,z+1},\, \rho_{2,z} \,\}.$$

Con le suddette funzioni k ed r resta definito un intorno $\mathcal{U}_{k,r}$ tale che $|T(\varphi)| < 1$ per ogni $\varphi \in \mathcal{U}_{k,r}$, dunque T è continua, come volevasi dimostrare.

GLI INSIEMI LIMITATI IN $\mathcal{D}$

Pur non essendo lo spazio $\mathcal{D}$ metrizzabile, possiamo introdurre la nozione di limitatezza procedendo come segue.

Un sottoinsieme $X \subset \mathcal{D}$ si dice limitato se esistono un intervallo $[a, b]$ ed una successione di costanti C_n tali che per ogni $\psi \in X$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia

$$\operatorname{supp} \psi \subset [a, b]; \tag{77}$$

$$\|\psi\|_{C^n[a,b]} \leq C_n. \tag{78}$$

È interessante osservare che gli intorni $\mathcal{U}_{k,r}$ della funzione nulla, introdotti a pag. D12, non sono limitati.

Infatti, fissate le funzioni $k(z)$ e $r(z)$, i supporti delle funzioni $\psi \in \mathcal{U}_{k,r}$ possono trovarsi in qualunque posizione sulla retta e perciò non è soddisfatta la prima delle due condizioni sopra indicate.

LA LIMITATEZZA DELLE DISTRIBUZIONI

Dalla (68) possiamo dedurre che le distribuzioni sono limitate sui sottoinsiemi limitati di $\mathcal{D}$.

Per vederlo, indichiamo con X un sottoinsieme limitato di $\mathcal{D}$. Allora tutte le $\psi \in X$ soddisfano le (77)-(78) su di un particolare intervallo $[a, b]$.

D'altro canto sappiamo che su tale intervallo esistono un ordine di derivazione h ed una costante M_h per cui vale la (68).

Però, per poter utilizzare la (68), dobbiamo individuare un insieme Y i cui elementi φ soddisfino la (69).

A tal fine scegliamo $n = h$ nella (78) e vediamo che $\|\psi\|_{C^h[a,b]} \leq C_h$ per ogni $\psi \in X$.

Se $C_h = 0$, vuol dire che l'insieme X contiene solo la funzione nulla, nel qual caso T è ovviamente limitata.

Altrimenti conviene definire $Y = X/C_h = \{\varphi \in \mathcal{D} : C_h \varphi \in X\}$ ed ecco che la (69) vale per ogni $\varphi \in Y$, dunque vale anche la (68).

Essendo T lineare, per ogni $\psi \in X$ possiamo porre $\varphi = \psi/C_h$, e siccome $\varphi \in Y$, per la (68) abbiamo

$$|T(\psi)| = C_h \, |T(\varphi)| \leq C_h \, M_h,$$

dunque T è limitata su X, come volevasi dimostrare

Ordine di una distribuzione

Sappiamo che la disuguaglianza (68) vale per tutte le distribuzioni.

Tuttavia gli ordini di derivazione h, e le rispettive costanti M_h nella (68), in generale dipendono dall'intervallo $[a, b]$ considerato.

Per alcune particolari distribuzioni, esiste un ordine di derivazione h tale che comunque si prenda $[a, b] \subset \mathbb{R}$ esiste una costante $M_{[a,b]}$ tale che

$$|T(\varphi)| \leq M_{[a,b]} \tag{79}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ soddisfacente $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$ e $\|\varphi\|_{C^h([a,b])} \leq 1$.

In altri termini, la costante $M_{[a,b]}$ dipende dall'intervallo, ma l'ordine di derivazione no.

Quando ciò accade, il più piccolo valore di h avente la suddetta proprietà si dice ordine della distribuzione. Quando invece non esiste nessun h siffatto, si dice che la distribuzione ha ordine infinito.

Esempio. La δ di Dirac ha ordine $h = 0$: infatti se $\|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R})} \leq 1$ abbiamo che

$$|\delta(\varphi)| = |\varphi(0)| \leq 1,$$

e perciò la (79) vale con $M_{[a,b]} = 1$. In questo esempio, inoltre, il valore di $M_{[a,b]}$ è indipendente da $[a, b]$. Ovviamente, se $0 \notin (a, b)$, si può anche prendere $M_{[a,b]} = 0$.

Esempio. Le distribuzioni regolari T_f, che sono rappresentate da funzioni $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, hanno ordine $h = 0$. Infatti, se $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$ si ha

$$|T_f(\varphi)| \leq \int_a^b |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx$$
$$\leq \|f\|_{L^1((a,b))}\,\|\varphi\|_{C^0([a,b])}.$$

dunque la (79) è soddisfatta da $T = T_f$ con $h = 0$ e $M_{[a,b]} = \|f\|_{L^1((a,b))}$.

Se, in particolare, abbiamo $f \in L^1(\mathbb{R})$, possiamo prendere $M_{[a,b]} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ indipendentemente dall'intervallo $[a, b]$, ma questo non è possibile per tutte le distribuzioni regolari.

Per vederlo, consideriamo $f(x) = e^x$ e fissiamo a piacere un valore di $h \in \mathbb{N}$. Posto $\lambda_h = \|\psi\|_{C^h(\mathbb{R})} > 0$, dove ψ è la consueta funzione a campana, le funzioni test $\varphi_n(x) = \psi(x - n)/\lambda_h$ soddisfano $\|\varphi_n\|_{C^h(\mathbb{R})} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e tuttavia

$$T_{e^x}(\varphi_n) = \int_{n-1}^{n+1} e^x\,\varphi_n(x)\,dx$$
$$\geq e^{n-1}\int_{n-1}^{n+1} \varphi_n(x)\,dx = \frac{c}{\lambda_h}\,e^{n-1}$$

essendo $c > 0$ la costante in (37). Quindi $T_{e^x}(\varphi_n) \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e la (79) non può valere con una costante indipendente da $[a, b]$.

Esempio. La distribuzione T somma della serie (33) ha ordine $h = 0$, e soddisfa la (79) con $M_{[a,b]} =$ numero di elementi dell'insieme $(a, b) \cap \mathbb{N}$.

Esempio. La distribuzione T somma della serie (34) ha ordine infinito.

IL VALORE PRINCIPALE DI $\frac{1}{x}$

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è localmente sommabile, quindi non individua una distribuzione nella maniera consueta. Infatti l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\tfrac{1}{x}\,dx$$

non ha senso, in generale, o, come si suol dire, "non converge".

La funzione $F(x) = \log|x|$, invece, è localmente sommabile, dunque definisce una distribuzione, che indicheremo con T_F:

$$T_F(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\log|x|\,dx.$$

Tutte le distribuzioni sono derivabili. Esiste dunque la distribuzione $(T_F)'$, che infatti è data da

$$(T_F)'(\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\,\log|x|\,dx.$$

La distribuzione $(T_F)'$ si dice "valore principale" di $\frac{1}{x}$ e si indica con $\operatorname{vp}\frac{1}{x}$. Verifichiamo che

$$(\operatorname{vp}\tfrac{1}{x})(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x)\,\tfrac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x)\,\tfrac{1}{x}\,dx\right).$$

Si noti che ciascuno dei due precedenti integrali, preso da solo, può benissimo tendere a $+\infty$ o a $-\infty$.

La loro somma, tuttavia, tende ad un valore finito quando $\varepsilon \to 0^+$.

Per verificarlo, fissiamo innanzitutto un intervallo limitato (a, b) contenente sia l'origine che il supporto di φ.

Integrando per parti, troviamo

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x)\,\tfrac{1}{x}\,dx = \varphi(-\varepsilon)\,\log\varepsilon - \int_a^{-\varepsilon} \varphi'(x)\,\log|x|\,dx$$

e similmente

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x)\,\tfrac{1}{x}\,dx = -\varphi(\varepsilon)\,\log\varepsilon - \int_{\varepsilon}^{b} \varphi'(x)\,\log|x|\,dx.$$

Sommando termine a termine le due uguaglianze, siamo condotti a studiare il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\,\log\varepsilon.$$

Ciò può farsi agevolmente, scrivendo

$$(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\,\log\varepsilon = \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0) + \varphi(0) - \varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon}\,2\varepsilon\,\log\varepsilon.$$

Per la definizione della derivata, la frazione tende a $\varphi'(0)$, ed è noto che il prodotto $\varepsilon\,\log\varepsilon$ tende a 0.

Resta dunque da considerare soltanto la somma degli integrali

$$-\int_a^{-\varepsilon} \varphi'(x)\,\log|x|\,dx$$

e

$$-\int_{\varepsilon}^{b} \varphi'(x)\,\log|x|\,dx,$$

la quale tende all'integrale

$$-\int_a^{b} \varphi'(x)\,\log|x|\,dx.$$

Essendo $\operatorname{supp}\varphi \subset (a, b)$, la verifica può considerarsi conclusa.

Applicazione lineare e discontinua sullo spazio $\mathcal{D}$

Si dicono "distribuzioni di Schwartz" le applicazioni lineari e continue aventi per dominio lo spazio vettoriale-topologico $\mathcal{D}$.

Per curiosità, definiamo un'applicazione lineare $L\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ discontinua nel punto $\psi \in \mathcal{D}$, essendo ψ, ad esempio, la consueta funzione a campana.

Osserviamo che la successione $\psi_n(x) = \psi(x - \frac{1}{n})$ converge a ψ in $\mathcal{D}$. Ciò segue dall'uniforme continuità di ψ e delle sue derivate.

Inoltre le funzioni ψ_n e la funzione ψ sono linearmente indipendenti.

Consideriamo allora delle altre funzioni test φ_s, dove s è un parametro che varia in un opportuno insieme S, in modo tale che le ψ_n, la ψ e le φ_s formino una base dello spazio $\mathcal{D}$.

Il passaggio precedente è detto "non costruttivo".

Si è soliti compiere tale passaggio invocando il lemma di Zorn, o l'assioma della scelta, o principi analoghi.

A questo punto possiamo definire: $L(\psi) = 1$; $L(\psi_n) = 0$ per ogni $n > 0$, e $L(\varphi_s) = 0$ per ogni $s \in S$.

La definizione dell'applicazione L si estende, per linearità, a tutto lo spazio $\mathcal{D}$.

Infatti, per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ esistono scalari λ, λ_n e μ_s, di cui solo un numero finito diversi da zero, tali che

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \lambda\,\psi(x) \; &+ \; \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n\,\psi_n(x) \\ &+ \; \sum_{s\in S} \mu_s\,\varphi_s(x). \end{aligned}$$

Mediante tali scalari si definisce $L(\varphi)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, ponendo

$$L(\varphi) = \lambda.$$

L'applicazione L è lineare per definizione.

Inoltre L è discontinua nel punto $\psi \in \mathcal{D}$ perché $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$, ma essendo $L(\psi) = 1$ e $L(\psi_n) = 0$ per ogni $n > 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} L(\psi_n) = 0 \neq L(\psi).$$

Dunque l'applicazione L non è una distribuzione: $L \notin \mathcal{D}'$.

DISTRIBUZIONI BASATE SU DI UN APERTO $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$

Le distribuzioni di Schwartz, così come sono state presentate nelle pagine precedenti, estendono la classe $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ e consentono molte notevoli applicazioni.

Per rappresentare la densità materiale di una distribuzione puntiforme di massa nello spazio, e per estendere la classe $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni (localmente sommabili) di N variabili reali, con $N \geq 1$, si procede come segue.

Fissato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (eventualmente $\Omega = \mathbb{R}^N$), indichiamo con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ il cui supporto è limitato e incluso in Ω.

Si dice che una successione di funzioni $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ converge ad una funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se:

1. Esiste un opportuno insieme limitato, chiuso e incluso in Ω, che contiene $\operatorname{supp} \varphi_n$ per ogni n;

2. Le funzioni φ_n convergono alla funzione φ uniformemente in $\mathbb{R}^N$;

3. Ciascuna delle derivate parziali della funzione φ_n, di qualunque ordine essa sia, converge alla corrispondente derivata parziale della funzione φ uniformemente in $\mathbb{R}^N$.

Si denota con $\mathcal{D}'(\Omega)$ lo spazio delle applicazioni $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, lineari, e continue rispetto alla suddetta nozione di convergenza.

FUNZIONI NON SVILUPPABILI IN SERIE DI TAYLOR

La consueta funzione a campana $\psi(x)$, data da

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } x \in (-1,1); \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1), \end{cases}$$

ci permette di fare un'osservazione interessante.

Sappiamo che $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, e che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $\psi^{(k)}(\pm 1) = 0$ (esercizio 4(b) della serie `[001]`).

Dunque la serie di Taylor associata alla funzione $\psi(x)$ ed avente come punto base il punto $x_0 = 1$, è la serie banale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 0$$

perché nel punto $x_0 = 1$ si annullano la funzione ψ e tutte le sue derivate.

La suddetta serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ alla costante nulla, e perciò non coincide con la funzione generatrice $\psi(x)$ per $x \in (-1,1)$.

Concludiamo che non è affatto detto che la serie di Taylor di una funzione data debba necessariamente convergere a tale funzione.

Quando ciò avviene, almeno in un intorno del punto base x_0, la funzione data si dice "analitica" in tale intorno.

Dunque la funzione ψ di cui sopra non è analitica in nessun intorno del punto $x_0 = 1$.

La convergenza in legge

OBIETTIVI

In questo capitolo sviluppiamo un collegamento tra la teoria delle distribuzioni e la teoria della probabilità.

Consideriamo una successione di variabili aleatorie X_n convergente in legge ad una variabile aleatoria X.

Indicate con F_n le funzioni di ripartizione delle variabili X_n, e con F quella della variabile X, verifichiamo che

$$F_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} F'. \tag{80}$$

Si noti che la tesi sussiste indipendentemente dal fatto che le funzioni F_n e la F siano derivabili nel senso usuale.

Più avanti verificheremo l'implicazione inversa.

FUNZIONI DI RIPARTIZIONE

La funzione di ripartizione F di una variabile aleatoria $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ è, per definizione, la funzione

$$F(x) = P\big(\{\,\omega \mid X(\omega) \le x\,\}\big).$$

CONVERGENZA IN LEGGE

Si dice che una successione di variabili aleatorie $X_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ converge in legge alla variabile aleatoria X se, indicate con F_n le funzioni di ripartizione delle variabili X_n, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x_0) = F(x_0) \tag{81}$$

in tutti i punti $x_0 \in \mathbb{R}$ nei quali la funzione F è continua.

RICHIAMI DI TEORIA DELLA MISURA

Essendo una funzione di ripartizione F monotona e limitata per definizione, l'insieme dei suoi punti di discontinuità è, tuttalpiù, un insieme numerabile, ed ha senz'altro misura nulla.

IL TEOREMA DELLA CONVERGENZA LIMITATA

Se una successione di funzioni misurabili e limitate $f_n(x)$ converge ad una funzione $f(x)$ per quasi ogni x in un intervallo limitato (a,b), allora la funzione limite f è misurabile e limitata, e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

DIMOSTRAZIONE DELLA (80)

Con la formula (80) si intende che, per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$, risulta

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} &\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\,F_n(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\,F(x)\,dx.\end{aligned} \tag{82}$$

Le funzioni F_n assumono valori nell'intervallo $[0,1]$, quindi le $f_n(x) = \varphi'(x)\,F_n(x)$ sono limitate. Inoltre $f_n(x)$ converge per ipotesi ad $f(x) = \varphi'(x)\,F(x)$ nei punti di continuità di F, e perciò quasi ovunque.

Infine il dominio di integrazione può ridursi ad un intervallo limitato (a,b) contenente il supporto di φ. La (82) segue dunque dal teorema della convergenza limitata.

L'IMPLICAZIONE INVERSA

Consideriamo una successione di variabili aleatorie X_n e indichiamo con F_n le loro funzioni di ripartizione.

Supponiamo che esista una variabile aleatoria X la cui funzione di ripartizione F soddisfa la (80).

Vogliamo dimostrare che X_n converge in legge ad X.

USO DEL TEOREMA DI HELLY

Per il teorema di Helly, esiste una sottosuccessione (F_{n_k}) convergente ad una funzione monotona $F_\infty \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ in ogni punto x dove quest'ultima è continua.

Il teorema si può trovare, ad esempio, in M.M. Rao, R.J. Swift, Probability theory with applications, Second edition, Springer, pagina 224 (Theorem 1).

PASSAGGIO AL LIMITE

Indichiamo con (F_{n_k}) una qualunque sottosuccessione convergente puntualmente quasi ovunque. Per il teorema di Helly ne esiste almeno una.

Indicato con F_∞ il limite puntuale di F_{n_k}, per il teorema della convergenza limitata si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\, F_{n_k}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\, F_\infty(x)\, dx$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$. Confrontando tale uguaglianza con l'ipotesi (82), si conclude che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\, (F(x) - F_\infty(x))\, dx = 0 \qquad (83)$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$.

USO DEL LEMMA DI DU BOIS-REYMOND

Per il lemma di Du Bois-Reymond, dalla (83) segue che esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$F_\infty(x) = F(x) + C \qquad (84)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. Il lemma si può trovare, ad esempio, in Brézis, Analisi funzionale, Liguori editore, pagina 194 (Lemma VIII.1).

Siccome per ipotesi $F(x) \to 0$ per $x \to -\infty$, e siccome $F_\infty(x) \in [0,1]$, dalla (84) segue $C \in [0,1]$. Ma poiché $F(x) \to 1$ per $x \to +\infty$, dalla (84) segue anche $C \in [-1,0]$, dunque $C = 0$.

LA CONVERGENZA DI F_n

Le considerazioni precedenti mostrano che se (F_{n_k}) è una qualunque sottosuccessione convergente puntualmente quasi ovunque, allora la funzione limite F_∞ coincide quasi ovunque con F.

Vogliamo ora verificare che se F è continua in un dato punto x_0, allora vale la (81).

Sia dunque $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di continuità per F. Supponiamo per assurdo che la (81) non sussista. Allora, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione (F_{n_k}) tale che

$$\lim_{n \to +\infty} F_{n_k}(x_0) = \ell \neq F(x_0).$$

Per la continuità di F in x_0, esiste un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ nel quale

$$|F(x) - F(x_0)| < \tfrac{1}{2} |\ell - F(x_0)|. \tag{85}$$

Inoltre per il teorema di Helly esiste una sotto-sottosuccessione $(F_{n_{k_j}})$ convergente quasi ovunque ad una funzione F_∞ che, come abbiamo visto, coincide quasi ovunque con F.

Esaminiamo il caso $\ell > F(x_0)$. La (85) implica

$$F(x) < \ell \tag{86}$$

per ogni $x \in (x_0, x_0 + r)$. D'altra parte, per la monotonia delle $F_{n_{k_j}}$ risulta

$$F_{n_{k_j}}(x_0) \leq F_{n_{k_j}}(x)$$

per ogni $x > x_0$ e per ogni j. Passando al limite per $j \to +\infty$ troviamo

$$\ell \leq F(x)$$

per quasi ogni $x > x_0$, contro la (86). Esaminiamo allora il caso $\ell < F(x_0)$. La (85) implica

$$F(x) > \ell \tag{87}$$

per ogni $x \in (x_0 - r, x_0)$. Per la monotonia delle $F_{n_{k_j}}$ risulta

$$F_{n_{k_j}}(x_0) \geq F_{n_{k_j}}(x)$$

per ogni $x < x_0$ e per ogni j. Passando al limite per $j \to +\infty$ troviamo

$$\ell \geq F(x)$$

per quasi ogni $x < x_0$, contro la (87). Deve pertanto valere la (81) in tutti i punti x_0 nei quali F è continua, ovvero X_n converge in legge ad X come volevasi dimostrare.

Bibliografia

[1] L. Amerio. Analisi matematica con elementi di analisi funzionale, vol. 3, parte seconda, capitolo 1: Distribuzioni. UTET 1982.

[2] H. Brézis. Analisi funzionale, teoria e applicazioni. Liguori 1986.

[3] P. A. M. Dirac. I principi della meccanica quantistica. Boringhieri 1976.

[4] L. C. Evans, R. F. Gariepy. Measure theory and fine properties of functions. CRC Press 1992.

[5] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov. Generalized functions. AMS Chelsea Publishing 1964.

[6] G. Hörmann, R. Steinbauer. Lecture notes on the theory of distributions. Dispensa, Università di Vienna.

[7] R. P. Kanwal. Generalized functions: theory and technique. Academic press 1983.

[8] G. Köthe. Topological vector spaces. Springer-Verlag 1969.

[9] L. Freddi. Calcolo delle variazioni. Settima lezione. Distribuzioni. Dispensa, Università di Udine.

[10] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order, 2nd edition. Springer-Verlag 1998.

[11] A. Pratelli. Distribuzioni, trasformate di Fourier e spazi di Sobolev. Dispensa, Università di Pavia 2011.

[12] C. Pucci. Istituzioni di analisi superiore. Unione Matematica Italiana 2013.

[13] H. H. Schaefer, M. P. Wolff. Topological vector spaces. Springer-Verlag 1999.

[14] L. Schwartz. Théorie des distributions. Hermann 1950.

[15] S. Semmes. An introduction to some aspects of functional analysis, 5: Smooth functions and distributions. Dispensa, Rice University.

[16] F. Treves. Locally convex spaces and linear partial differential equations. Springer-Verlag 1967.

[17] F. Treves. Topological vector spaces, distributions and kernels. Academic press 1967.

[18] K. Yosida. Functional analysis. Springer-Verlag 1980.

[19] A. H. Zemanian. Distribution theory and trasform analysis. McGraw-Hill 1965.