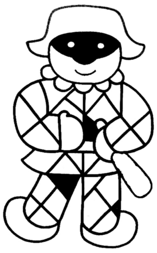


La δ di Dirac, e altre distribuzioni

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

prof. Antonio Greco

http://people.unica.it/antoniogreco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari

10-3-2017

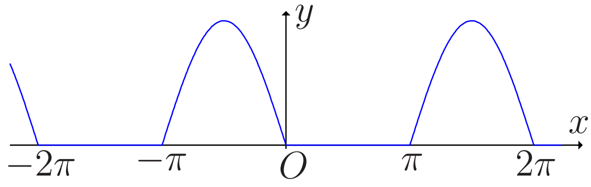
Indice

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[001]

Funzioni test

1) Disegnare il grafico della parte negativa $f(x) = (\operatorname{sen} x)^-$ della funzione $\operatorname{sen} x$.



2) Si consideri l'applicazione $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ data da

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

(a) Facendo appello alle proprietà dell'integrale, verificare che l'applicazione T è lineare.

Per la linearità dell'integrale, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &T(\lambda_1\,\varphi_1 + \lambda_2\,\varphi_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\lambda_1\,\varphi_1(x) + \lambda_2\,\varphi_2(x)\Big)\,dx \\ &= \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\,dx + \\ &+ \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x)\,dx = \\ &= \lambda_1\,T(\varphi_1) + \lambda_2\,T(\varphi_2) \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

2) (b) Verificare che l'applicazione T è continua rispetto alla nozione di convergenza dello spazio $\mathcal{D}$.

Come prescrive la definizione di convergenza in $\mathcal{D}$, consideriamo una successione di funzioni $\varphi_n \in \mathcal{D}$ i cui supporti sono tutti contenuti in uno stesso intervallo $[a, b]$.

Supponiamo, inoltre, che la suddetta successione converga uniformemente, sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$, ad una funzione $\varphi \in \mathcal{D}$.

Essendo $\varphi_n(x) = 0$ per ogni $x \notin [a, b]$ e per ogni n, dalla definizione di limite segue immediatamente che $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \notin [a, b]$, dunque $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$.

L'uniforme convergenza sull'intervallo limitato $[a, b]$ permette di passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} T(\varphi_n) \;&=\; \int_a^b \varphi_n(x)\,dx \\ &\to\; \int_a^b \varphi(x)\,dx = T(\varphi) \end{aligned}$$

Dunque l'applicazione T è continua rispetto alla nozione di convergenza dello spazio $\mathcal{D}$.

3) Verificare che l'applicazione $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ data da $T(\varphi) = \varphi(0)$ è lineare e continua.

La linearità segue immediatamente da

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) &= \lambda_1 \varphi_1(0) + \lambda_2 \varphi_2(0) \\ &= \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2). \end{aligned}$$

Possiamo quindi concentrarci sulla continuità.

Come prescrive la definizione di convergenza in $\mathcal{D}$, consideriamo una successione di funzioni $\varphi_n \in \mathcal{D}$ i cui supporti sono tutti contenuti in uno stesso intervallo $[a, b]$.

Supponiamo, inoltre, che la suddetta successione converga uniformemente, sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$, ad una funzione $\varphi \in \mathcal{D}$.

Poiché la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, possiamo scrivere

$$T(\varphi_n) = \varphi_n(0) \longrightarrow \varphi(0) = T(\varphi)$$

Dunque l'applicazione data, che è la distribuzione δ di Dirac, è continua rispetto alla nozione di convergenza dello spazio $\mathcal{D}$.

4) (a) Disegnare il grafico della funzione $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } x \in (-1, 1); \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \end{cases}$$

Osserviamo, innanzitutto, che $\psi \in C^0(\mathbb{R})$.

Applicando le regole di derivazione, troviamo che la derivata di ψ è data da

$$\psi'(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2}\, e^{-\frac{1}{1-x^2}}$$

per $x \in (-1, 1)$, ed è nulla per $x \notin [-1, 1]$.

Poiché $\psi(x)$ è continua in $x = \pm 1$, e poiché $\psi'(x) \to 0$ per $x \to \pm 1$, si conclude che $\psi'(\pm 1) = 0$.

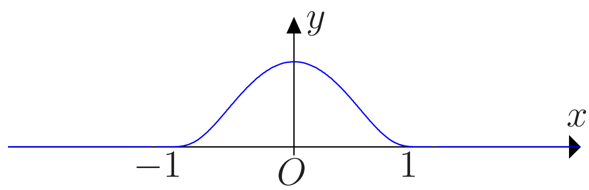
Troviamo, inoltre, che la derivata seconda di ψ è data da

$$\psi''(x) = 2\, \frac{3x^4 - 1}{(1-x^2)^4}\, e^{-\frac{1}{1-x^2}}$$

per $x \in (-1, 1)$, ed è nulla per $x \notin [-1, 1]$.

Poiché $\psi'(x)$ è continua in $x = \pm 1$, e poiché $\psi''(x) \to 0$ per $x \to \pm 1$, si conclude che $\psi''(\pm 1) = 0$.

Considerato che la funzione data è pari, possiamo tracciarne il grafico come segue:



4) (b) Trovare tutti gli interi positivi n tali che la funzione $\psi_n(x)$ data da $\psi_n(x) = \frac{1}{n}\,\psi(x)$ appartenga allo spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni test.

Consideriamo innanzitutto il caso $n = 1$, cioè verifichiamo che $\psi \in \mathcal{D}$.

Dalla parte (a) dell'esercizio segue che $\psi \in C^2(\mathbb{R})$.

Per quanto riguarda le derivate successive, è sufficiente verificare che

$$\psi^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}}\, e^{-\frac{1}{1-x^2}} \qquad (1)$$

per $x \in (-1, 1)$, essendo $P_k(x)$ un opportuno polinomio.

Procediamo per induzione. Per $k = 1, 2$ la formula è stata verificata nella parte (a) dell'esercizio. Supponiamo dunque che essa valga per un certo k. Derivando ambo i membri, troviamo

$$\psi^{(k+1)}(x) = \frac{P_{k+1}(x)}{(1-x^2)^{2k+2}}\, e^{-\frac{1}{1-x^2}}$$

per $x \in (-1, 1)$, essendo $P_{k+1}(x)$ il polinomio dato da

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= P_k'(x)\,(1-x^2)^2 - 2\,x\,P_k(x) \\ &+ 4k\,x\,P_k(x)\,(1-x^2). \end{aligned}$$

Per il principio di induzione, la (1) vale per ogni k intero positivo, ed ogni $x \in (-1, 1)$.

Si ha inoltre, banalmente, $\psi^{(k)}(x) = 0$ per $x \notin [-1, 1]$, e, ragionando come nella parte (a) dell'esercizio, si trova che $\psi^{(k)}(x) = 0$ per $x = \pm 1$.

Possiamo dunque concludere che $\psi \in \mathcal{D}$.

Studiamo ora la funzione

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n}\,\psi(x).$$

Poiché le derivate di ψ_n si ottengono facilmente tramite la formula

$$\psi_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n}\,\psi^{(k)}(x),$$

si conclude che $\psi_n \in \mathcal{D}$ per ogni intero positivo n.

---

4) (c) Fissato arbitrariamente un punto $x \in \mathbb{R}$, calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n(x)$$

e discutere l'eventuale dipendenza del valore numerico del limite dal valore numerico di x.

Poiché il valore di $\psi(x)$ non dipende da n, si vede subito che

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\psi(x) = 0$$

qualunque sia $x \in \mathbb{R}$. Il valore del limite è indipendente da x.

---

4) (d) Stabilire se $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, dove il simbolo 0 denota la funzione identicamente nulla.

Certo, perché $\operatorname{supp}\psi_n = [-1, 1]$ per ogni n, ed inoltre

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_n^{(k)}(x)| = \frac{1}{n} \max_{x\in[-1,1]} |\psi^{(k)}(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Quindi, qualunque sia l'ordine k di derivazione, la successione delle derivate $\psi_n^{(k)}$ tende uniformemente a zero quando $n \to +\infty$.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[002]

L'idea di Dirac

1) Indicata con $f_\varepsilon(x)$ la funzione

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, \text{ se } x\in(-\infty,-\frac{\varepsilon}{2})\cup(\frac{\varepsilon}{2},+\infty),\\ \frac{1}{\varepsilon}, \text{ se } x\in[-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}],\end{cases}$$

dove ε è un parametro positivo, calcolare il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(x). \tag{2}$$

per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Esaminiamo innanzitutto il punto $x=0$. Sostituendo $x=0$ nella definizione di $f_\varepsilon(x)$ troviamo che $f_\varepsilon(0)=\frac{1}{\varepsilon}$ qualunque sia $\varepsilon>0$, e di conseguenza

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(0)=+\infty.$$

Ora consideriamo, invece, un punto $x\neq 0$ fissato sull'asse reale, e facciamo tendere ε a zero.

Osserviamo che la condizione $x\in[-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}]$ si può anche scrivere $|x|\le\frac{\varepsilon}{2}$. Quindi per ogni $\varepsilon\in(0,\,2\,|x|)$ risulta $x\notin[-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}]$.

Ma allora, per la definizione di $f_\varepsilon(x)$, per ogni $\varepsilon\in(0,\,2\,|x|)$ si ha

$$f_\varepsilon(x)=0$$

e perciò risulta

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(0)=0.$$

2) Indicato con $f(x)$ il limite (2), stabilire, calcolando gli integrali, se sussiste la seguente uguaglianza:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione $f_\varepsilon(x)$ ha due punti di discontinuità a salto, per $x=\pm\frac{\varepsilon}{2}$, e perciò non possiede una primitiva $F_\varepsilon(x)$ per $x\in\mathbb{R}$.

Tuttavia, applicando alla funzione $f_\varepsilon(x)$ la definizione dell'integrale generalizzato o improprio di Riemann si trova

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,dx=1$$

qualunque sia $\varepsilon>0$. Ciò è in accordo con l'interpretazione geometrica dell'integrale.

Alla stessa conclusione si arriva applicando la definizione dell'integrale di Lebesgue. Invece, all'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{3}$$

non si può applicare la definizione di Riemann perché essa richiede che la funzione f abbia valori reali, mentre nel presente caso si ha $f(0)=+\infty$.

Applicando la definizione dell'integrale di Lebesgue, così come è riportata nel testo di C. D. Pagani e S. Salsa, si trova

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=0,$$

quindi l'uguaglianza considerata non sussiste.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[003]

Limite in $\mathcal{D}'$

Indichiamo con ψ la funzione test data da

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } x \in (-1,1); \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1). \end{cases}$$

(a) Stabilire se esiste un numero reale $c \in (0, +\infty)$ tale che

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx.$$

Non è richiesto il calcolo numerico di c.

La costante cercata esiste perché la funzione data ψ è di classe $C^0(\mathbb{R})$ e a supporto limitato, dunque è sommabile.

Inoltre risulta $c > 0$ perché ψ è una funzione non negativa e non identicamente nulla.

(b) Posto $\rho_n(x) = \frac{n}{c}\,\psi(nx)$, stabilire per quali interi positivi n sussiste l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\, dx = 1.$$

Con la sostituzione $nx = t$, qualunque sia n troviamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\, dx &= \frac{n}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

(c) Stabilire se la distribuzione T_n rappresentata da ρ_n converge alla δ di Dirac in $\mathcal{D}'$.

Per la definizione della δ di Dirac, e della convergenza in $\mathcal{D}'$, dobbiamo verificare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ fissata, risulta

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \rho_n(x)\, dx = \varphi(0). \tag{4}$$

A tal fine, applichiamo la definizione di limite, seguendo il procedimento indicato a lezione.

Fissato $\varepsilon > 0$, per la continuità di $\varphi(x)$ nel punto $x = 0$ esiste un intervallo $(-r, r)$ tale che per ogni $x \in (-r, r)$ risulta

$$\varphi(0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(0) + \varepsilon. \tag{5}$$

Osserviamo che $\operatorname{supp} \rho_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Quindi, quando $n > 1/r$, risulta $\operatorname{supp} \rho_n \subset (-r, r)$.

Moltiplicando, allora, ciascun termine della (5) per $\rho_n(x) > 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} (\varphi(0) - \varepsilon)\, \rho_n(x) &< \varphi(x)\, \rho_n(x) \\ &< (\varphi(0) + \varepsilon)\, \rho_n(x) \end{aligned}$$

per $x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset (-r, r)$.

Integrando i tre termini della disuguaglianza precedente, che sono nulli per $x \notin (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, troviamo

$$\begin{aligned} \varphi(0) - \varepsilon &< \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \rho_n(x)\, dx \\ &< \varphi(0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

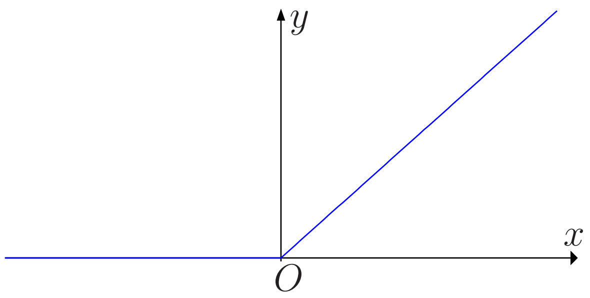
Tali disugaglianze valgono per ogni $n > 1/r$, quindi la (4) segue dalla definizione di limite.

Svolgimento degli esercizi

[004]

Derivate in $\mathcal{D}'$

1) (a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^+$.



1) (b) Stabilire se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Essendo di classe $C^0(\mathbb{R})$, la funzione data è sommabile secondo Riemann, e, a maggior ragione, secondo Lebesgue su ogni intervallo limitato (a, b). Dunque $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

---

1) (c) Esprimere la derivata della distribuzione T rappresentata dalla funzione f.

Per la definizione della derivata in $\mathcal{D}'$, la distribuzione T' è individuata da

$$\begin{aligned} T'(\varphi) &= -T(\varphi') \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, x\, dx. \end{aligned}$$

Poiché il supporto della funzione test φ è limitato, possiamo integrare per parti e scrivere

$$T'(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx.$$

Dunque la distribuzione T' è rappresentata dalla funzione $H(x)$ di Heaviside.

---

2) Indicata con $T_{|x|}$ la distribuzione rappresentata dalla funzione $f(x) = |x|$, trovarne la derivata seconda.

Abbiamo visto a lezione che la derivata prima di $T_{|x|}$ è la distribuzione $(T_{|x|})' = T_{\mathrm{sgn}(x)}$ rappresentata dalla funzione $\mathrm{sgn}(x)$.

Resta dunque da determinare la derivata di quest'ultima distribuzione.

Indicata con φ una generica funzione test, per la definizione della derivata di una distribuzione si ha

$$\begin{aligned} (T_{|x|})''(\varphi) &= (T_{\mathrm{sgn}(x)})'(\varphi) \\ &= -(T_{\mathrm{sgn}(x)})(\varphi'). \end{aligned}$$

Siamo dunque condotti a studiare l'espressione

$$\begin{aligned} -(T_{\mathrm{sgn}(x)})(\varphi') &= \int_{-\infty}^0 \varphi'(x)\, dx \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx. \end{aligned}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, otteniamo subito

$$-(T_{\mathrm{sgn}(x)})(\varphi') = 2\,\varphi(0)$$

e, per l'arbitrarietà di φ, concludiamo che

$$(T_{|x|})'' = 2\delta.$$