Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Funzioni test

Esercizi

1) Disegnare il grafico della parte negativa $f(x) = (\operatorname{sen} x)^-$ della funzione $\operatorname{sen} x$.

2) Si consideri l'applicazione $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ data da

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx.$$

(a) Facendo appello alle proprietà dell'integrale, verificare che l'applicazione T è lineare. (b) Verificare che l'applicazione T è continua rispetto alla nozione di convergenza dello spazio $\mathcal{D}$.

(continua a fianco)

3) Verificare che l'applicazione $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ data da $T(\varphi) = \varphi(0)$ è lineare e continua.

4) (a) Disegnare il grafico della funzione $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } x \in (-1,1); \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1). \end{cases}$$

(b) Trovare tutti gli interi positivi n tali che la funzione $\psi_n(x)$ data da $\psi_n(x) = \frac{1}{n}\,\psi(x)$ appartenga allo spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni test. (c) Fissato arbitrariamente un punto $x \in \mathbb{R}$, calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n(x)$$

e discutere l'eventuale dipendenza del valore numerico del limite dal valore numerico di x. (d) Stabilire se $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, dove il simbolo 0 denota la funzione identicamente nulla.

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
L'idea di Dirac

Esercizi

1) Indicata con $f_\varepsilon(x)$ la funzione

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (-\infty, -\frac{\varepsilon}{2}) \cup (\frac{\varepsilon}{2}, +\infty), \\ \frac{1}{\varepsilon}, & \text{se } x \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}], \end{cases}$$

dove ε è un parametro positivo, calcolare il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(x). \tag{1}$$

(continua a fianco)

2) Indicato con $f(x)$ il limite (1), stabilire, calcolando gli integrali, se sussiste la seguente uguaglianza:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Limite in $\mathcal{D}'$

Esercizi

Indichiamo con ψ la funzione test data da

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } x \in (-1,1); \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1). \end{cases}$$

(a) Stabilire se esiste un numero reale $c \in (0, +\infty)$ tale che $c = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx$. Non è richiesto il calcolo numerico di c.

(continua a fianco)

(b) Posto $\rho_n(x) = \frac{n}{c}\, \psi(nx)$, stabilire per quali interi positivi n sussiste l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\, dx = 1.$$

(c) Stabilire se la distribuzione T_n rappresentata da ρ_n converge alla δ di Dirac in $\mathcal{D}'$.

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Derivate in $\mathcal{D}'$

Esercizi

1) (a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^+$ (parte positiva di x). (b) Stabilire se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. (c) Esprimere la derivata della distribuzione T rappresentata dalla funzione f.

2) Indicata con $T_{|x|}$ la distribuzione rappresentata dalla funzione $f(x) = |x|$, trovarne la derivata seconda.