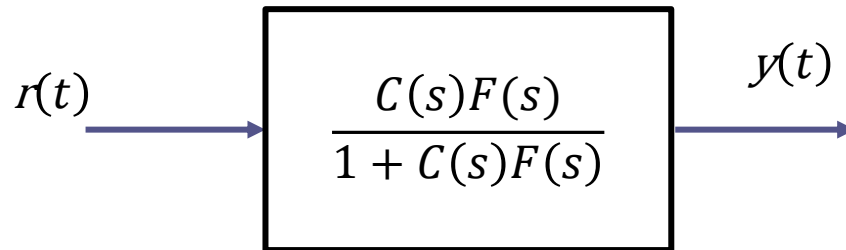


Controlli automatici

Sistemi dinamici elementari

Prof. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Ripartiamo dalla FdT a ciclo chiuso fra set point e uscita in un sistema di controllo a retroazione unitaria



Sicuramente il controllore $C(s)$ sarà scelto in modo da rendere asintoticamente stabile tale FdT (in modo che sia garantita la stabilità esterna del sistema di controllo).

N.B. Il controllore dovrà anche ovviamente soddisfare quei «vincoli» volti a garantire, in aggiunta, la stabilità interna.

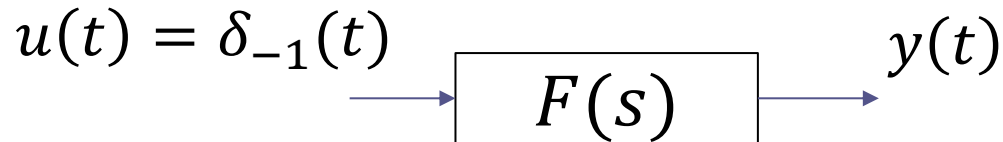
Stante il fatto che set-point costanti, o costanti a tratti, sono largamente impiegati nei sistemi di regolazione, risulta di grande interesse indagare le caratteristiche della **risposta al gradino** di FdT asintoticamente stabili al variare della posizione dei poli e degli zeri della FdT.

Risposta al gradino delle FdT elementari

La **risposta al gradino** è una delle caratteristiche maggiormente significative di un sistema dinamico. Essa infatti ne “cattura” le principali dinamiche, ed una chiara comprensione di come le sue caratteristiche siano influenzate dai parametri del sistema (guadagno, poli e zeri) è di grande rilevanza nell’ambito della analisi e della progettazione dei sistemi di controllo

In questa sede analizziamo le risposte al gradino di “semplici” FdT (FdT elementari) **asintoticamente stabili**, illustrando nel contempo alcuni concetti grazie ai quali desumere le principali caratteristiche della risposta al gradino di processi aventi una struttura più complicata.

Risposta al gradino unitario



Dalla definizione di FdT:
$$Y(s) = F(s)U(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

Si ha pertanto, antitrasformando:
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\}$$

Ovviamente se il segnale di ingresso è un gradino di ampiezza qualunque, non necessariamente unitaria, si avrà:

$$u(t) = U^* \cdot \delta_{-1}(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = U^* \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\}$$

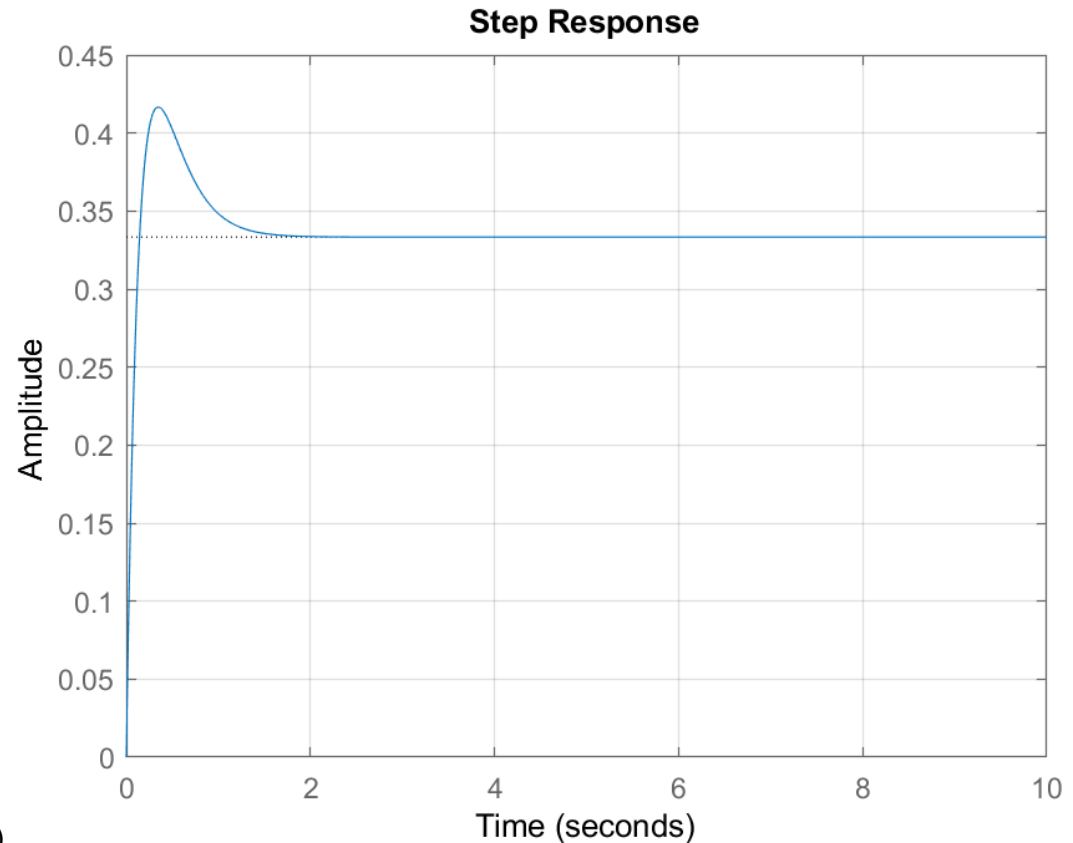
Ricordiamo che (sulla base del T.F.R.G.):

La risposta al gradino unitario di un sistema $F(s)$ asintoticamente stabile (cioè un sistema con tutti i poli strettamente contenuti nel semipiano sinistro) tende asintoticamente al valore del guadagno statico $\mu = F(0)$

$$W_r^y(s) = \frac{4(s+2)}{(s+4)(s+6)}$$

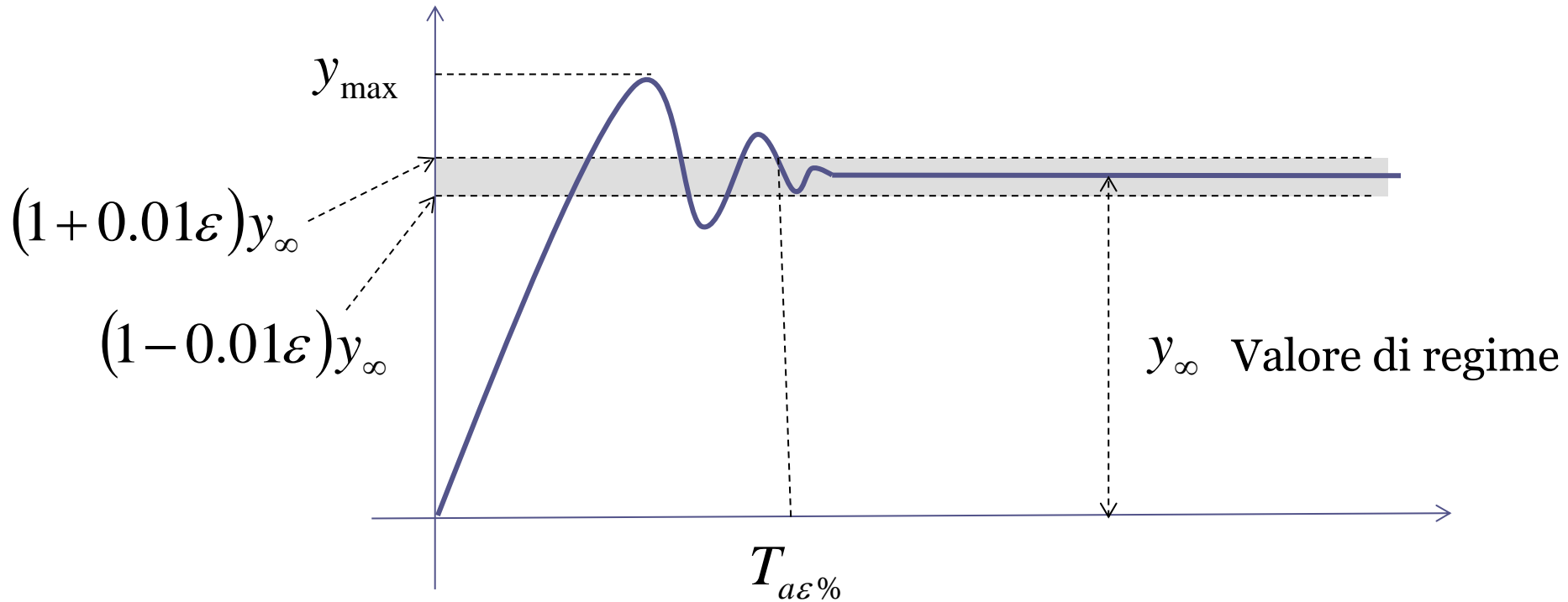
$$\mu = W_r^y(0) = \frac{8}{24} \cong 0.33$$

**Come mai la risposta transitoria presenta tale andamento ?
Lo si poteva in qualche modo prevedere ?**



```
s=tf('s');
Wry=4*(s+2)/((s+4)*(s+6));
step(Wry,0:.01:10),grid
```

Parametri significativi della risposta al gradino di sistemi LTI **asintoticamente stabili**



$$S_{\%} = 100 \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}}$$

Sovraelongazione percentuale

$T_{a\epsilon\%}$ **Tempo di assestamento all' ϵ %** ($\epsilon=1,2,5$)

Sistemi as. stabili con poli e zeri *reali*

Risulta comodo ai fini della presente analisi esprimere una FdT mediante particolari forme standard (dette «fattorizzazioni») che mettano direttamente in luce quali siano i poli e gli zeri della FdT. Una di tali fattorizzazioni è la seguente:

Fattorizzazione «poli-zeri»

$$F(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

z_i/p_i ***zeri/ poli***

K ***«Guadagno in alta frequenza» (HFG) della FdT***
(N.B. è un parametro differente rispetto al guadagno statico)

$p_i < 0 \quad \forall i$ Per la stabilità asintotica della FdT

Sistemi as. stabili con poli e zeri *reali*

Una fattorizzazione alternativa per una FdT avente poli e zeri reali è la seguente

Fattorizzazione in «costanti di tempo»

$$F(s) = \frac{\mu(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_m s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}$$

Termini «binomi»

τ_i / T_i **Costanti di tempo degli zeri / dei poli**

μ **Guadagno statico (DC gain)**

$T_i > 0 \quad \forall i$ Per la stabilità asintotica della FdT

Relazione fra poli/zeri e le relative costanti di tempo

ZERI	$z_i = -\frac{1}{\tau_i}$	$\tau_i = -\frac{1}{z_i}$
POLI	$p_i = -\frac{1}{T_i}$	$T_i = -\frac{1}{p_i}$

I poli e gli zeri sono i **reciproci cambiati di segno** delle relative costanti di tempo, e viceversa.

Esempio

$$F(s) = \frac{4s + 4}{s^2 + 5s + 6}$$

$$n = 2 \quad m = 1$$

$$\text{zero: } s = -1 \quad \text{poli: } s = -2, \quad s = -3$$

Fattorizzazione poli-zero

$$F(s) = \frac{4(s + 1)}{(s + 2)(s + 3)}$$

$$K = 4 \quad z_1 = -1$$

$$p_1 = -2$$

$$p_2 = -3$$

Fattorizzazione costanti di tempo

$$F(s) = \frac{4(s + 1)}{2 \left(\frac{1}{2}s + 1\right) 3 \left(\frac{1}{3}s + 1\right)} = \frac{2}{3} \frac{(1 + s)}{\left(1 + \frac{1}{2}s\right) \left(1 + \frac{1}{3}s\right)}$$

$$\mu = F(0) = \frac{2}{3}$$

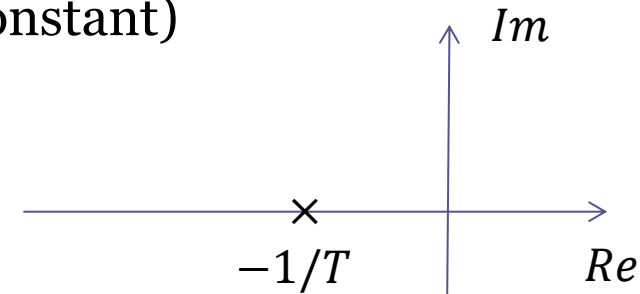
$$\tau_1 = 1s \quad (\text{1 secondo})$$

$$T_1 = \frac{1}{2}s \quad T_2 = \frac{1}{3}s$$

$$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

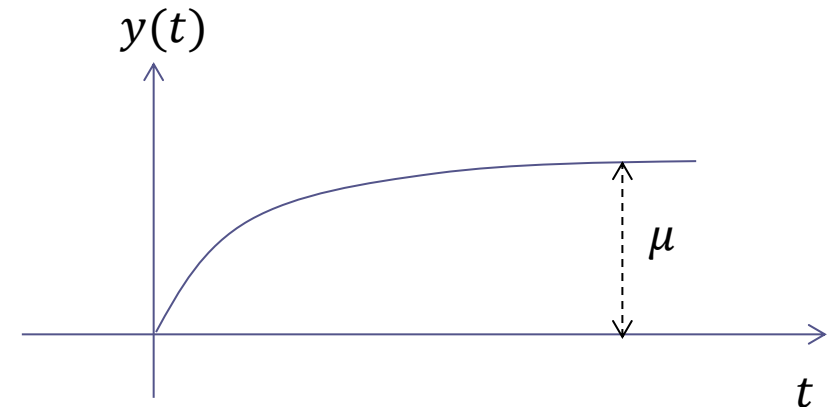
Sistema «STC» (single time constant)

Sistema del primo ordine con un solo polo (reale negativo) e nessuno zero.



Espressione analitica della risposta al gradino unitario (RGU):

$$y(t) = \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \delta_{-1}(t)$$



La risposta al gradino ha un andamento **monotono crescente di natura esponenziale**

La rapidità di convergenza verso il valore di regime dipende dal valore della costante di tempo T.

$$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

Espressione analitica
(lievemente approssimata)
dei tempi di assestamento

$$T_{a5\%}$$

$$3T$$

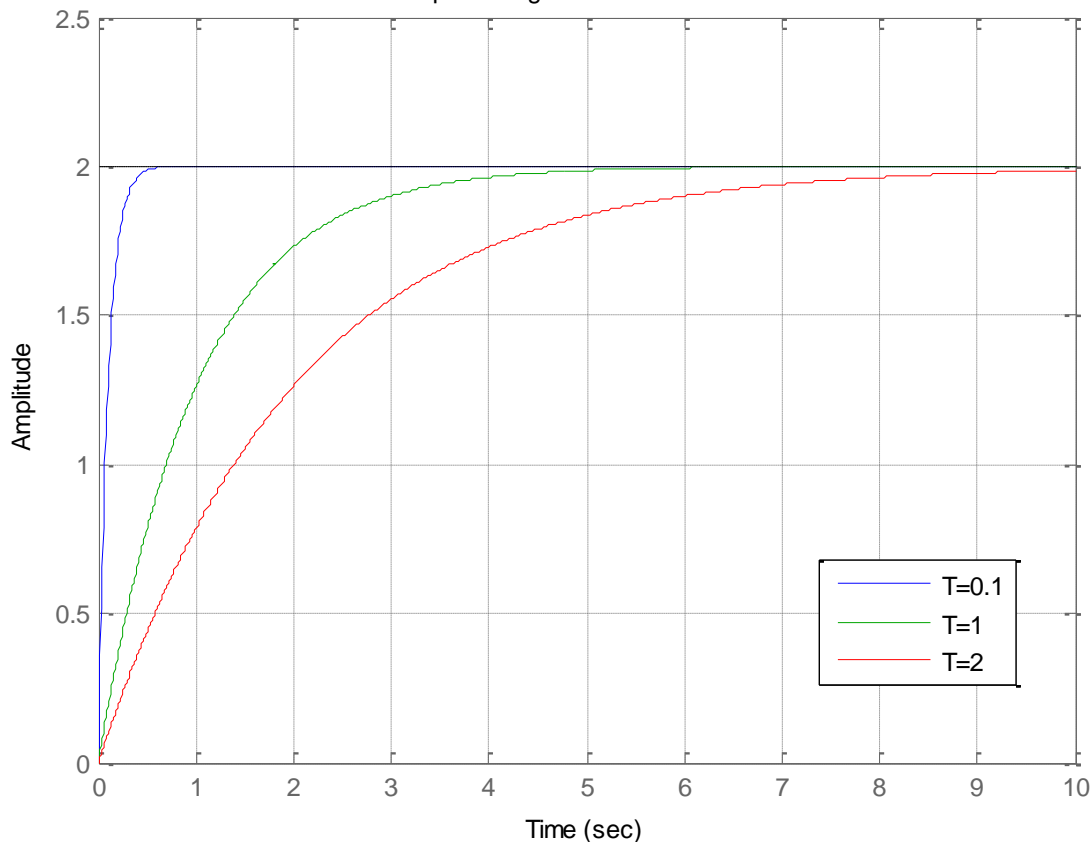
$$T_{a2\%}$$

$$3.9T$$

$$T_{a1\%}$$

$$4.6T$$

Risposta al gradino di sistemi STC



$$\mu = 2$$

$$T = 0.1s$$

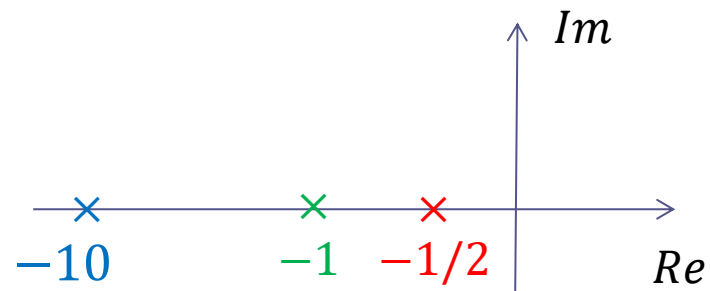
polo in -10

$$T = 1s$$

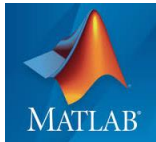
polo in -1

$$T = 2s$$

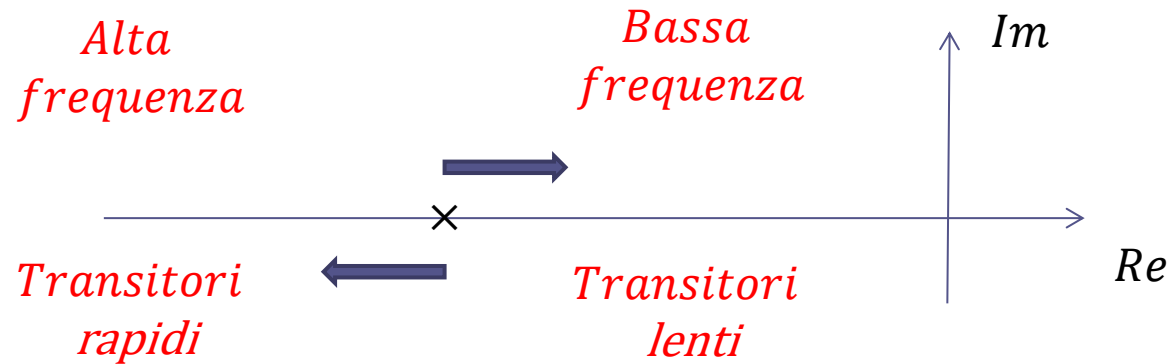
polo in -1/2



Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T1=0.1;  
T2=1;  
T3=2;  
  
S4=tf(mu, [T1 1]);  
S5=tf(mu, [T2 1]);  
S6=tf(mu, [T3 1]);  
  
step(S4,S5,S6, [0:0.01:10]), grid,  
axis([0 10 0 2.5])  
legend('T=0.1', 'T=1', 'T=2')  
title('Risposta al gradino di sistemi STC')
```



Se il polo si **sposta verso sinistra** (o, come si dice in gergo, «più in **alta frequenza**») la risposta si **velocizza**. Si presti attenzione al fatto che se il polo si sposta più in alta frequenza la costante di tempo rimpicciolisce.

Dualmente, se il polo si sposta verso destra («più in bassa frequenza») la risposta viene rallentata. Se il polo si sposta più in bassa frequenza la relativa costante di tempo aumenta.

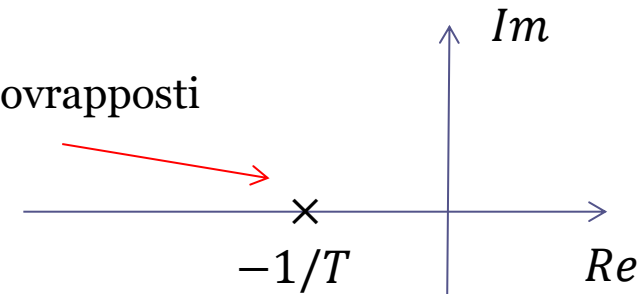
Poli in bassa frequenza \longleftrightarrow Transitori lenti

Poli in alta frequenza \longleftrightarrow Transitori rapidi

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2} = \frac{\mu}{T^2s^2 + 2Ts + 1}$$

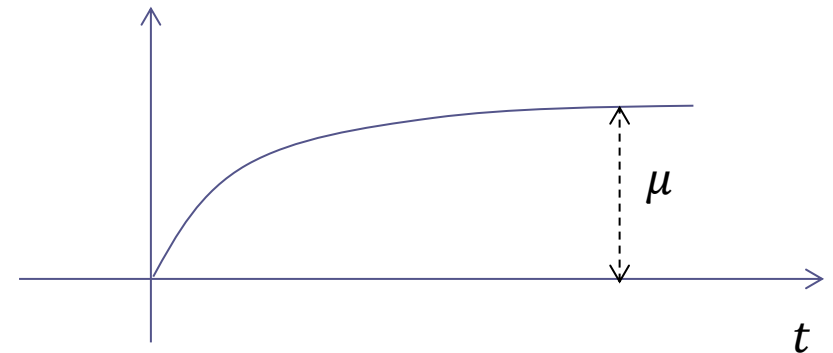
Sistema con due poli reali negativi **coincidenti**

Due poli sovrapposti



Espressione analitica della RGU:

$$y(t) = \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right) \delta_{-1}(t)$$



La risposta al gradino ha ancora un andamento **monotono crescente**

La rapidità di convergenza verso il valore di regime dipende dal valore della costante di tempo T dei due poli

I valori dei tempi di assestamento sono ancora determinabili in forma chiusa in funzione di T , e risultano essere **maggiori rispetto al caso precedente del sistema STC**

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$	$3T$	$3.9T$	$4.6T$
$F(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2}$	$4.7T$	$5.8T$	$6.6T$

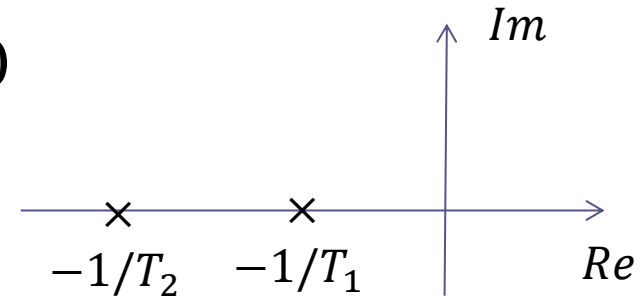
Per delle valutazioni di massima può essere utile riferirsi ai seguenti **valori approssimati**, maggiormente facili da ricordare

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$	$3T$	$4T$	$5T$
$F(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2}$	$5T$	$6T$	$7T$

Se la coppia di poli coincidenti si sposta verso **destra**/**sinistra** (cioè se la relativa costante di tempo T **aumenta**/**diminuisce**) la risposta diventa rispettivamente più **lenta** / **rapida**.

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$T_1 > T_2 > 0$$

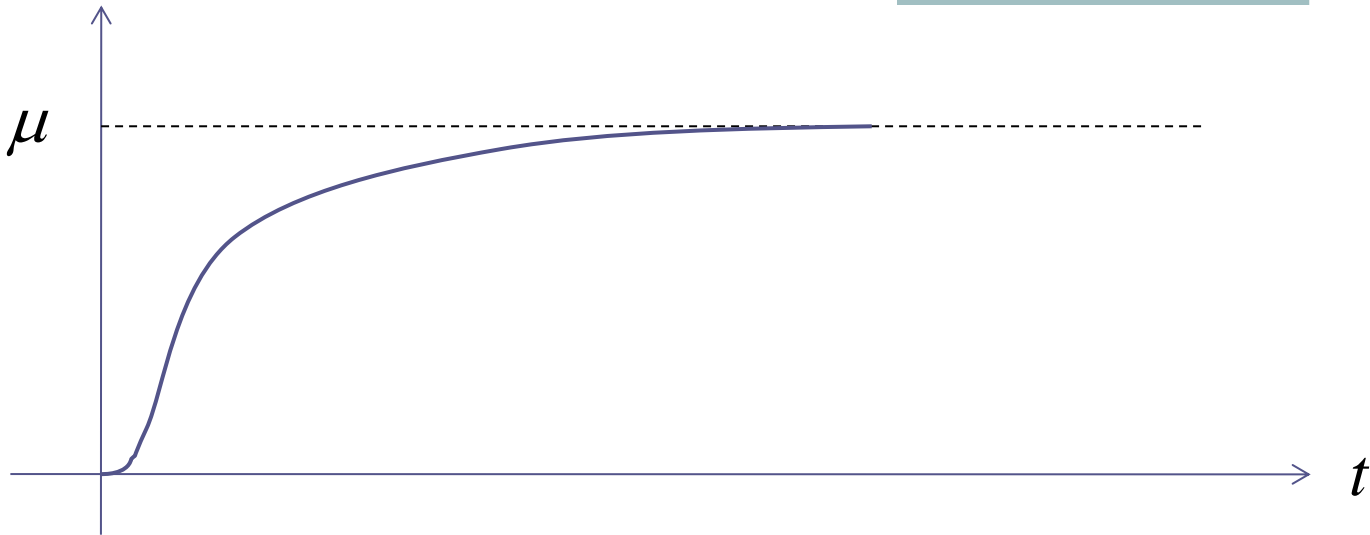


FdT del secondo ordine, senza zeri ($m = 0$), e con due poli ($n = 2$) reali negativi

$$p_1 = -\frac{1}{T_1} \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}$$

Espressione analitica della RGU:

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \delta_{-1}(t)$$



Risposta al gradino **monotona crescente** (**senza sovraelongazione**)

La risposta si velocizza/**rallenta** se viene ridotta/**umentata** una fra le due costanti di tempo T_1 e T_2 (o entrambe).

Non esiste una espressione semplice e significativa per i tempi di assestamento in funzione dei valori delle due costanti di tempo T_1 e T_2

Se le due costanti di tempo sono sensibilmente diverse

$$T_1 \gg T_2$$

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

$$\frac{T_1}{T_1 - T_2} \approx 1$$

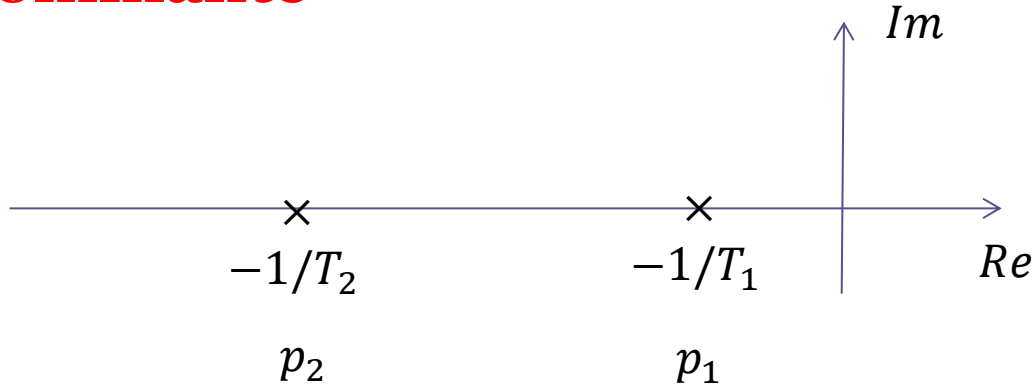
$$\frac{T_2}{T_1 - T_2} \approx 0$$

$$y(t) \approx \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

“polo (o costante di tempo) **dominante**”

L'approssimazione diventa (indicativamente) lecita quando **$T_1 > 5 T_2$**

Polo dominante



Se fra i due poli (o equivalentemente fra le costanti di tempo) esiste un rapporto almeno pari a 5 allora si può «trascurare» il polo p_2 più in alta frequenza, ed il polo p_1 viene detto «**dominante**»

In tale situazione, la risposta al gradino del sistema «completo»

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

risulta essere praticamente indistinguibile, o comunque estremamente simile, a quella del sistema **approssimato** di ordine ridotto

$$F_{appr}(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)}$$

Esempio

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)} = \frac{1}{(s+1)(0.1s+1)}$$

Le costanti di tempo sono sensibilmente differenti (fattore 10), e per il tracciamento della risposta al gradino ci si può riferire alla approssimazione di **polo dominante**

$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

La risposta al gradino del «sistema di ordine ridotto» $F_{appr}(s)$, che sarà estremamente simile a quella del sistema completo $F(s)$, può essere tracciata facilmente sulla base di quanto visto in precedenza

$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

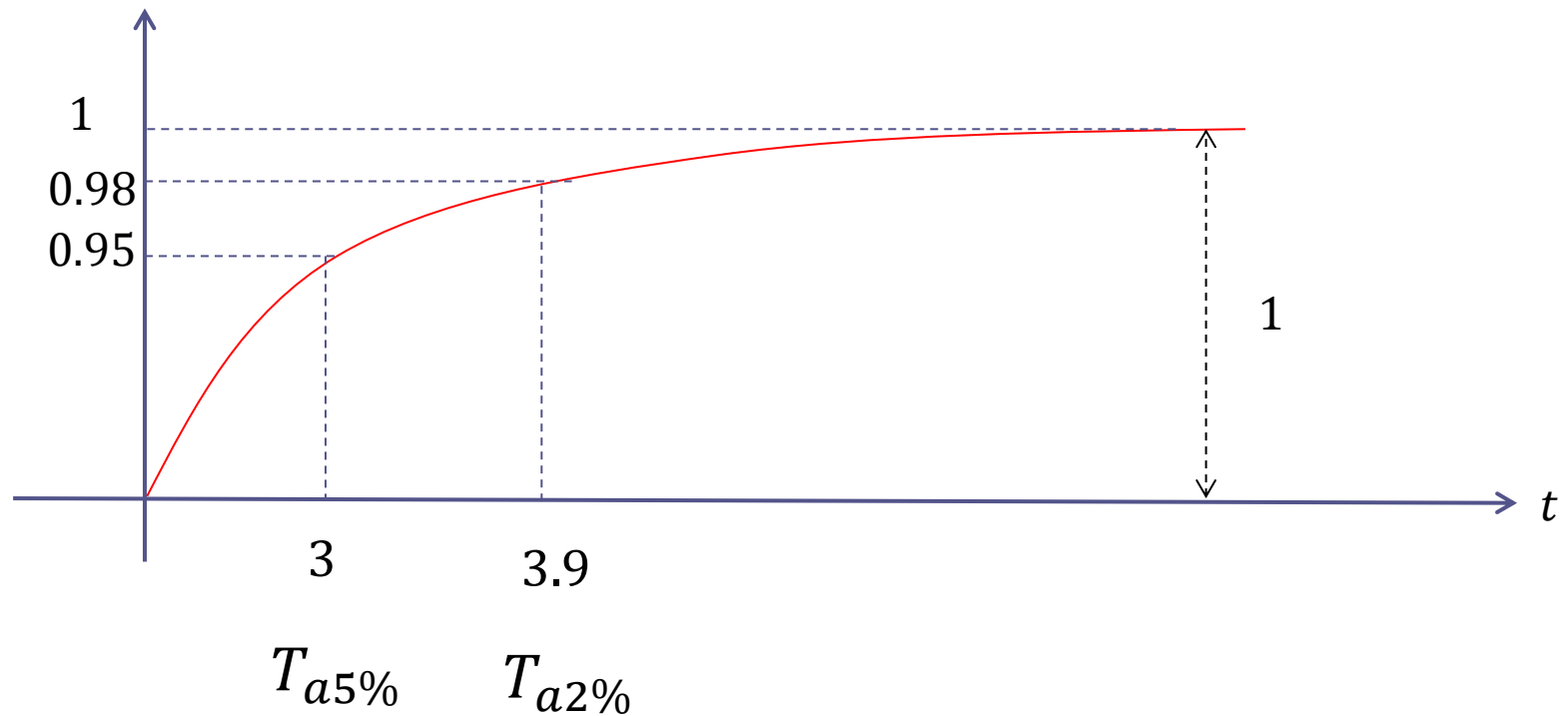
$$T = 1s$$

$$T_{a5\%}$$

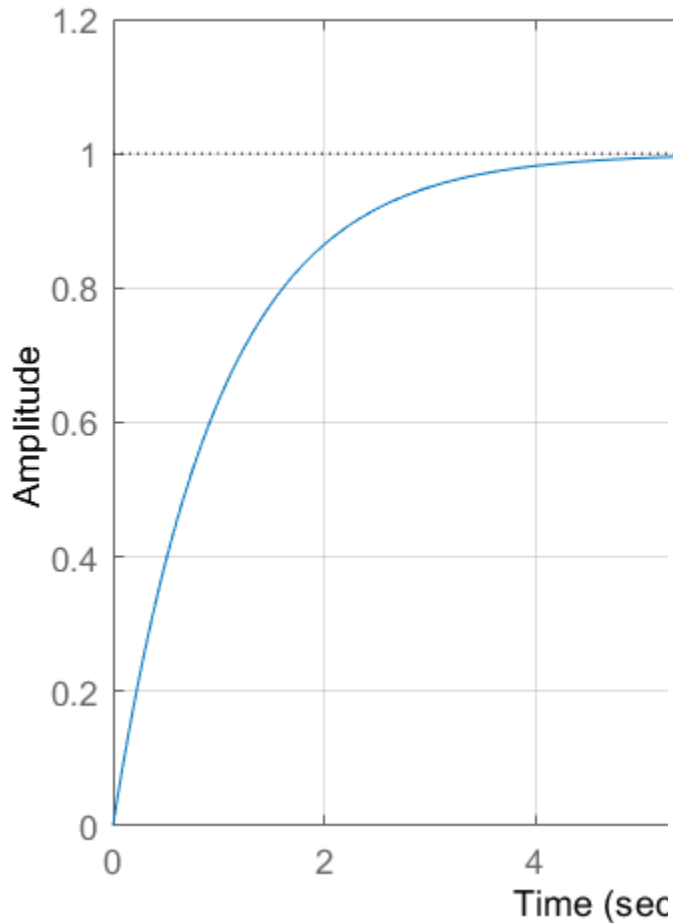
$$T_{a2\%}$$

$$3T$$

$$3.9T$$

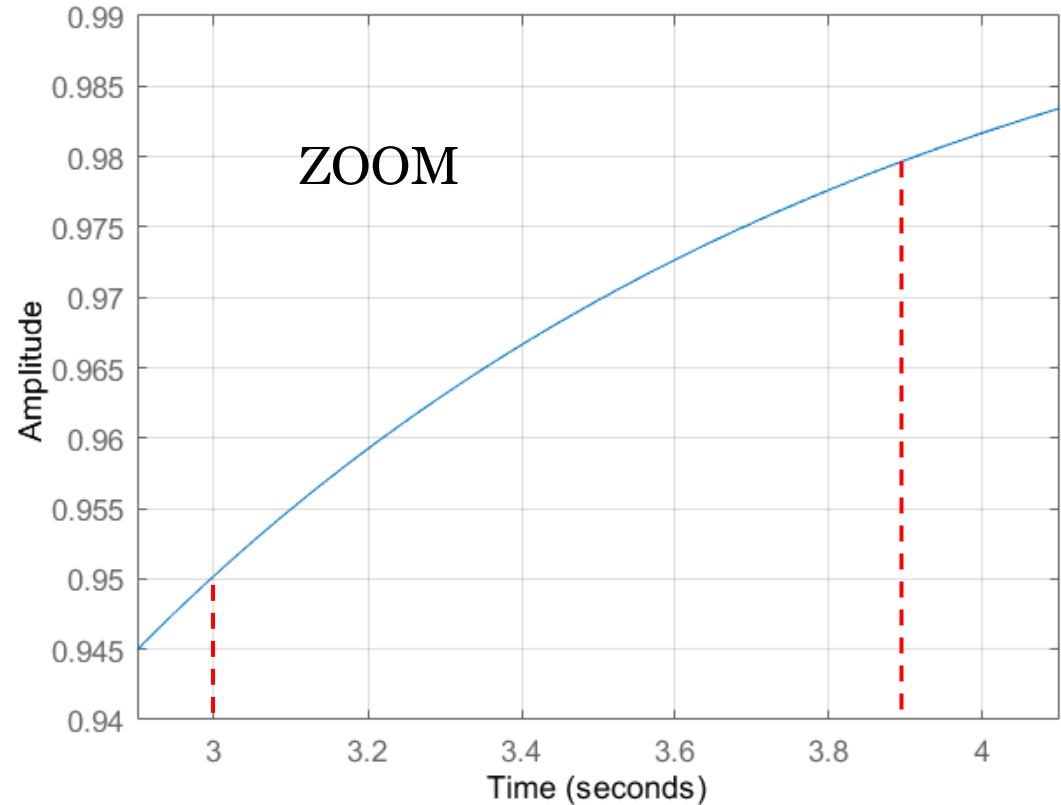


Step Response



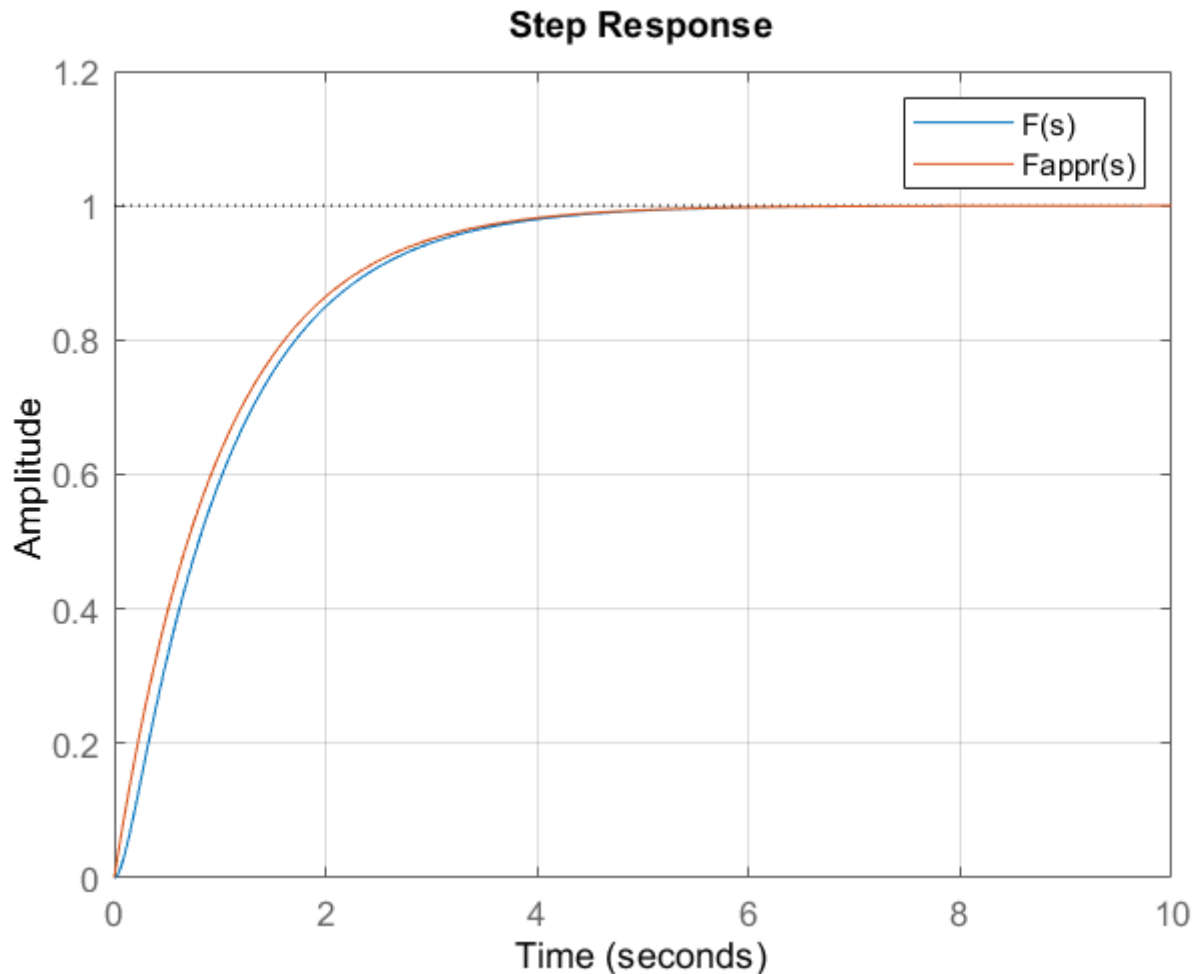
$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

Step Response



Questi grafici confermano la correttezza del grafico tracciato manualmente nella precedente slide

Confronto fra la risposta al gradino unitario del sistema complessivo $F(s)$ e quella del sistema di ordine ridotto $F_{appr}(s)$

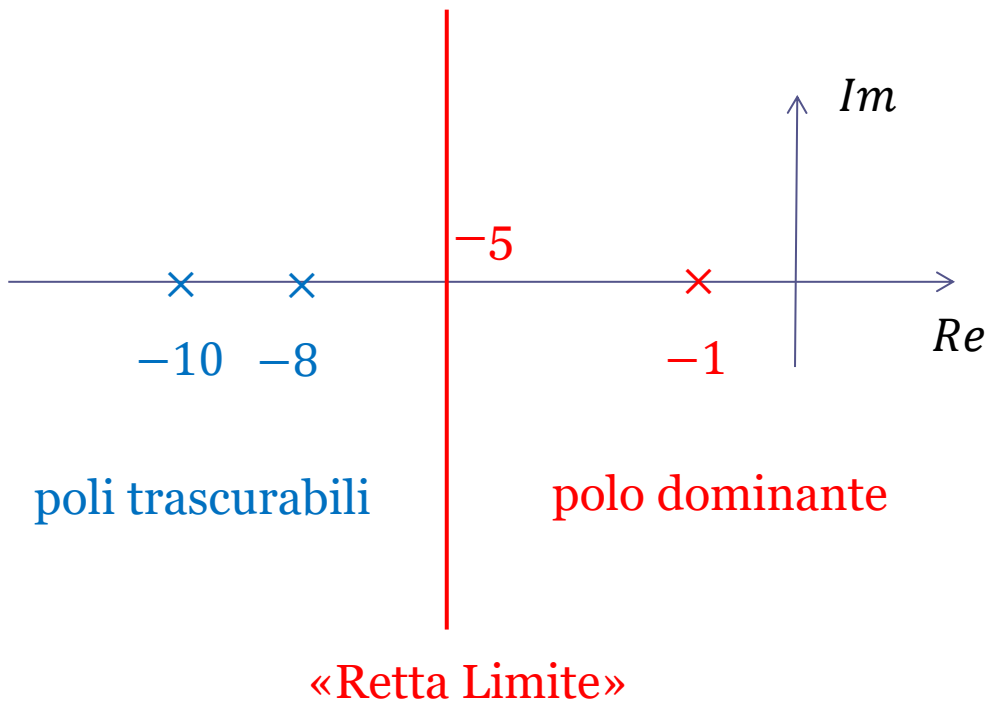
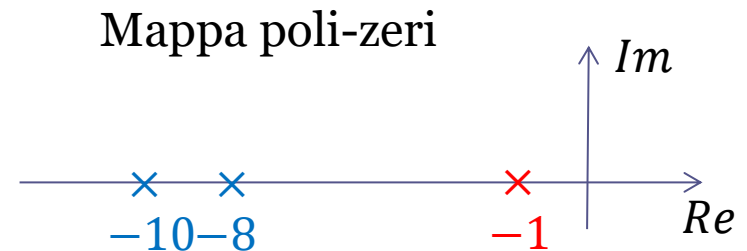


$$F(s) = \frac{1}{(s + 1)(0.1s + 1)}$$

$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

Grazie al concetto di «polo dominante» possono essere trattati casi di natura anche più generale. Si consideri la seguente FdT:

$$G(s) = \frac{20}{(s + 1)(s + 8)(s + 10)}$$



Tutti i poli (e gli eventuali zeri) alla sinistra della «retta limite» possono essere rimossi dalla FdT senza che le caratteristiche dinamiche principali della sua risposta al gradino risultino apprezzabilmente modificate

Quando applicando il concetto di polo dominante si rimuovono da una FdT uno o più poli perché «trascurabili» vi è rischio di incorrere in un errore.

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)\cancel{(s+8)}\cancel{(s+10)}}$$

Rimuovendo dalla FdT i termini $(s+8)$ ed $(s+10)$ si deduce il modello approssimato $G_{appr1}(s)$ a lato. Tale procedura è errata.

$$G_{appr1}(s) = \frac{20}{(s+1)}$$



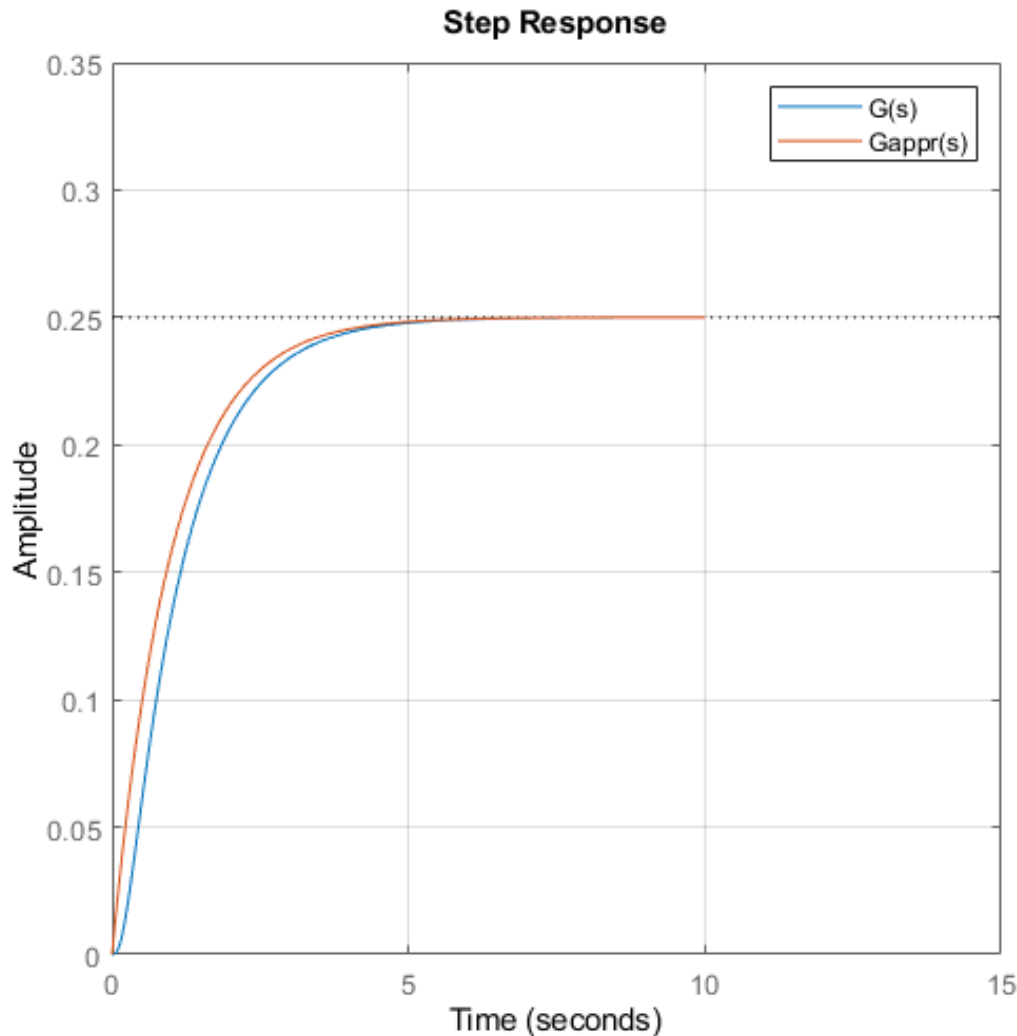
Questo è il modo **errato** di rimuovere dei poli, in quanto il guadagno statico della FdT approssimata $G_{appr1}(s)$ di ordine ridotto risulta essere differente da quello della FdT originale $G(s)$, e quindi le due risposte al gradino risultano essere differenti. Il modello approssimato corretto, il cui guadagno statico coincide con quello del sistema originario $G(s)$ è il seguente.

$$G_{appr}(s) = \frac{20}{(s+1) \cdot 8 \cdot 10} = \frac{0.25}{(s+1)}$$



I termini binomi, la cui rimozione non altera il valore del guadagno statico, possono invece essere «cancellati» senza problemi.

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+8)(s+10)} = \frac{0.25}{(s+1) \left(\frac{1}{8}s+1\right) \left(\frac{1}{10}s+1\right)}$$



Il grafico a sinistra mette a confronto le risposte al gradino dei sistema originale e di quello approssimato:

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+8)(s+10)}$$

$$G_{appr}(s) = \frac{0.25}{(s+1)}$$

Le risposte differiscono lievemente nella parte iniziale del transitorio, ma i tempi di assestamento sono pressoché analoghi

```
s=tf('s');
G=20/((s+1)*(s+8)*(s+10))
Gappr=0.25/((s+1))
step(G,Gappr,0:.01:10),grid
legend('G(s)', 'Gappr(s)')
```



Sistema as. stabile con tutti i poli reali e nessuno zero

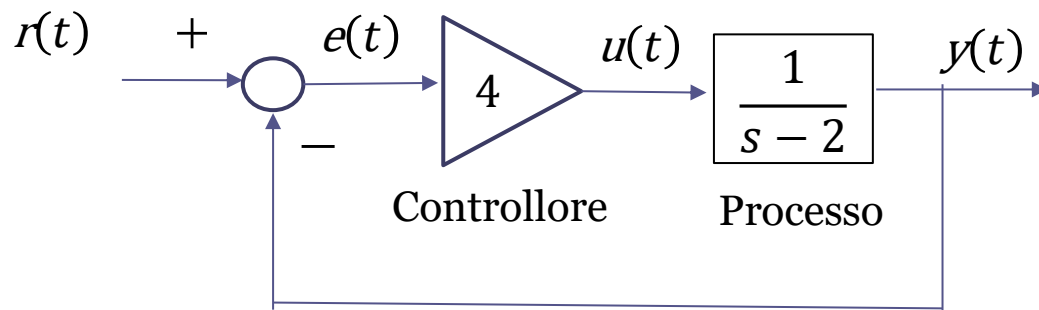
$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1s)(1 + T_2s) \dots (1 + T_ns)}$$

La risposta al gradino unitario è **monotona crescente**.

I poli più vicini all'origine (quelli cioè cui sono associate le costanti di tempo più grandi) sono quelli che influenzano in maniera più incisiva i tempi di assestamento della risposta al gradino unitario.

Es.

Con riferimento al seguente sistema di controllo si tracci l'andamento qualitativo della variabile di uscita in risposta ad un set-point a gradino unitario



$$W_r^y(s) = \frac{4 \cdot \frac{1}{s-2}}{1 + 4 \cdot \frac{1}{s-2}} = \frac{4}{s+2}$$

$W_r^y(s)$ è della forma STC

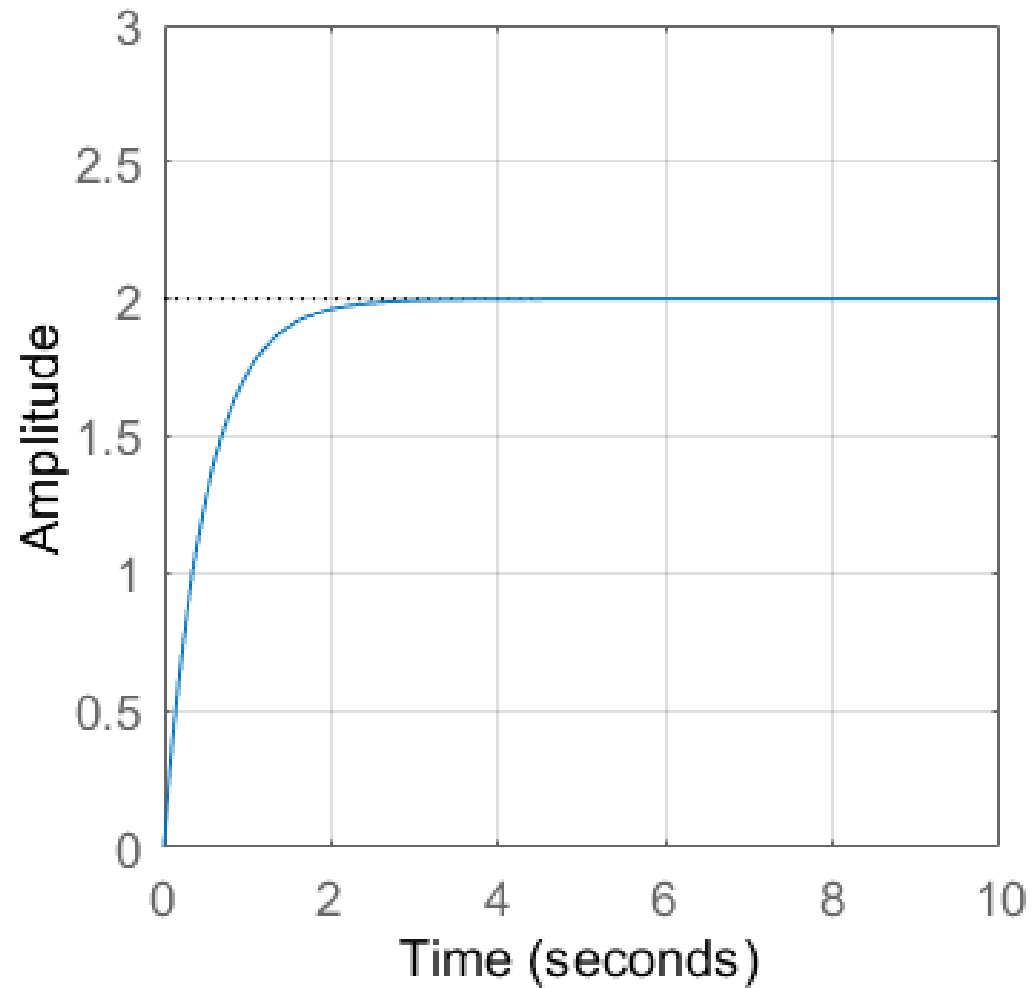
Guadagno statico: $\mu = W_r^y(0) = 1$

Polo: $p = -2$

Costante di tempo: $T = -\frac{1}{p} = 0.5 \text{ s}$

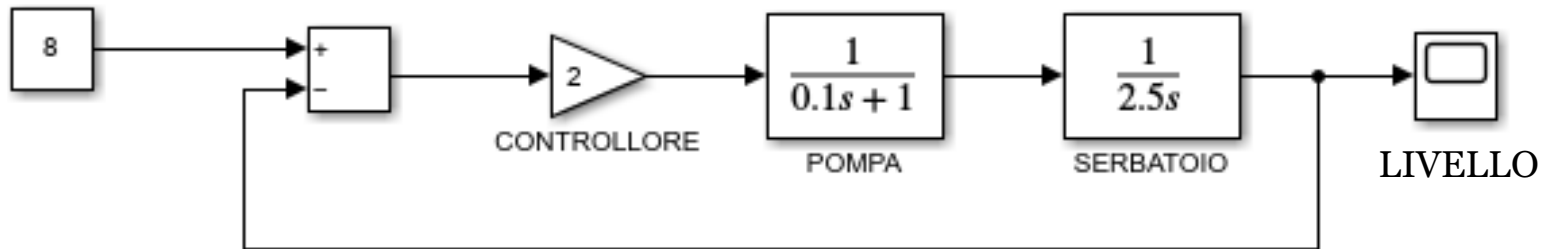
$$W_r^y(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} = \frac{1}{1 + 0.5s}$$

Grafico realizzato con Matlab-Simulink



Es.

Con riferimento al seguente sistema di controllo di livello, discusso in precedenza nel corso, si tracci l'andamento qualitativo del livello nel serbatoio.



$$W_r^y(s) = \frac{2}{0.25s^2 + 2.5s + 2} = \frac{2}{0.25s^2 + 2.5s + 2}$$

Guadagno statico: $\mu = W_r^y(0) = 1$

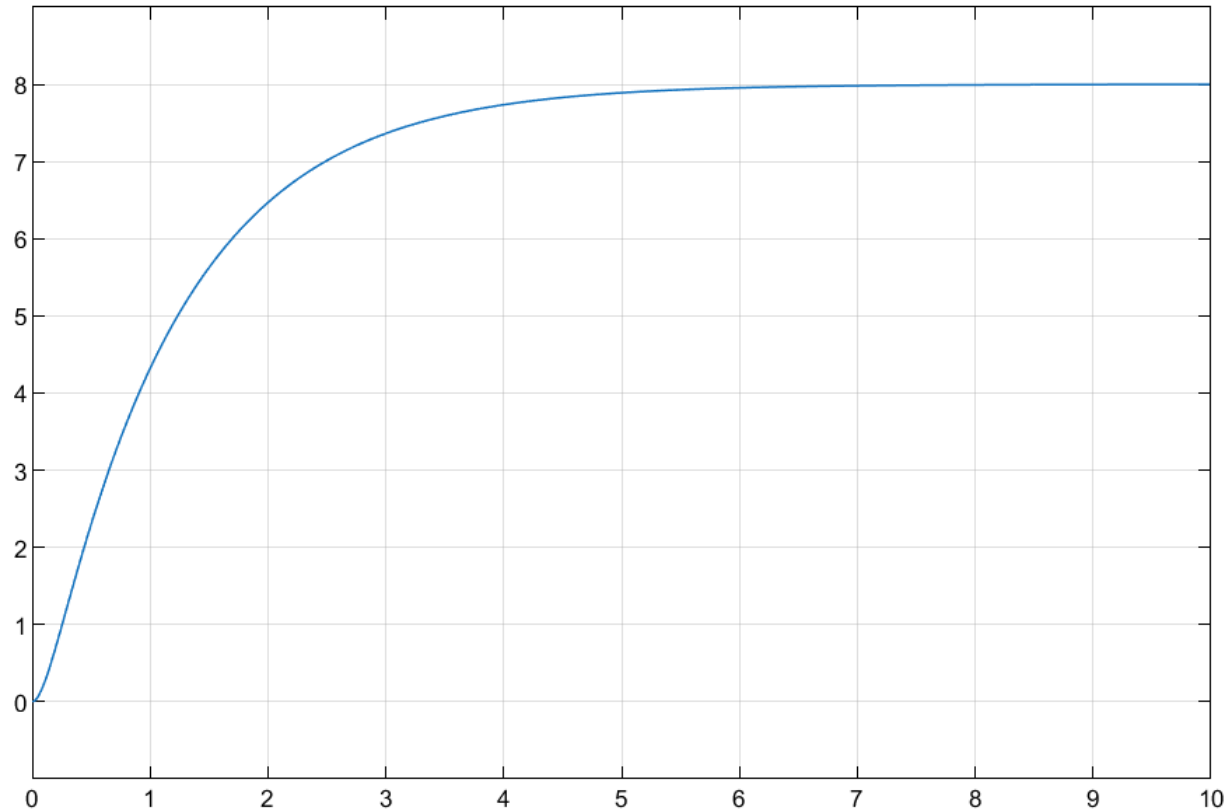
Poli: $p_1 = -0.87$ $p_2 = -9.12$

Costanti di tempo: $T_1 = -\frac{1}{p_1} = 1.14$ $T_2 = -\frac{1}{p_2} = 0.11 \text{ s}$

$$W_r^y(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)} = \frac{1}{(1 + 1.14s)(1 + 0.11s)}$$

$$W_{r,APPR}^y(s) = \frac{1}{(1 + 1.14s)}$$

Grafico realizzato con Matlab-Simulink



Ora includiamo nella FdT del sistema anche uno zero.

$$F(s) = \frac{\mu(1 + \tau s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$T_1 > T_2 > 0$$

FdT del secondo ordine ($n=2$), con uno zero ($m=1$), e con due poli reali negativi

Espressione analitica della RGU:

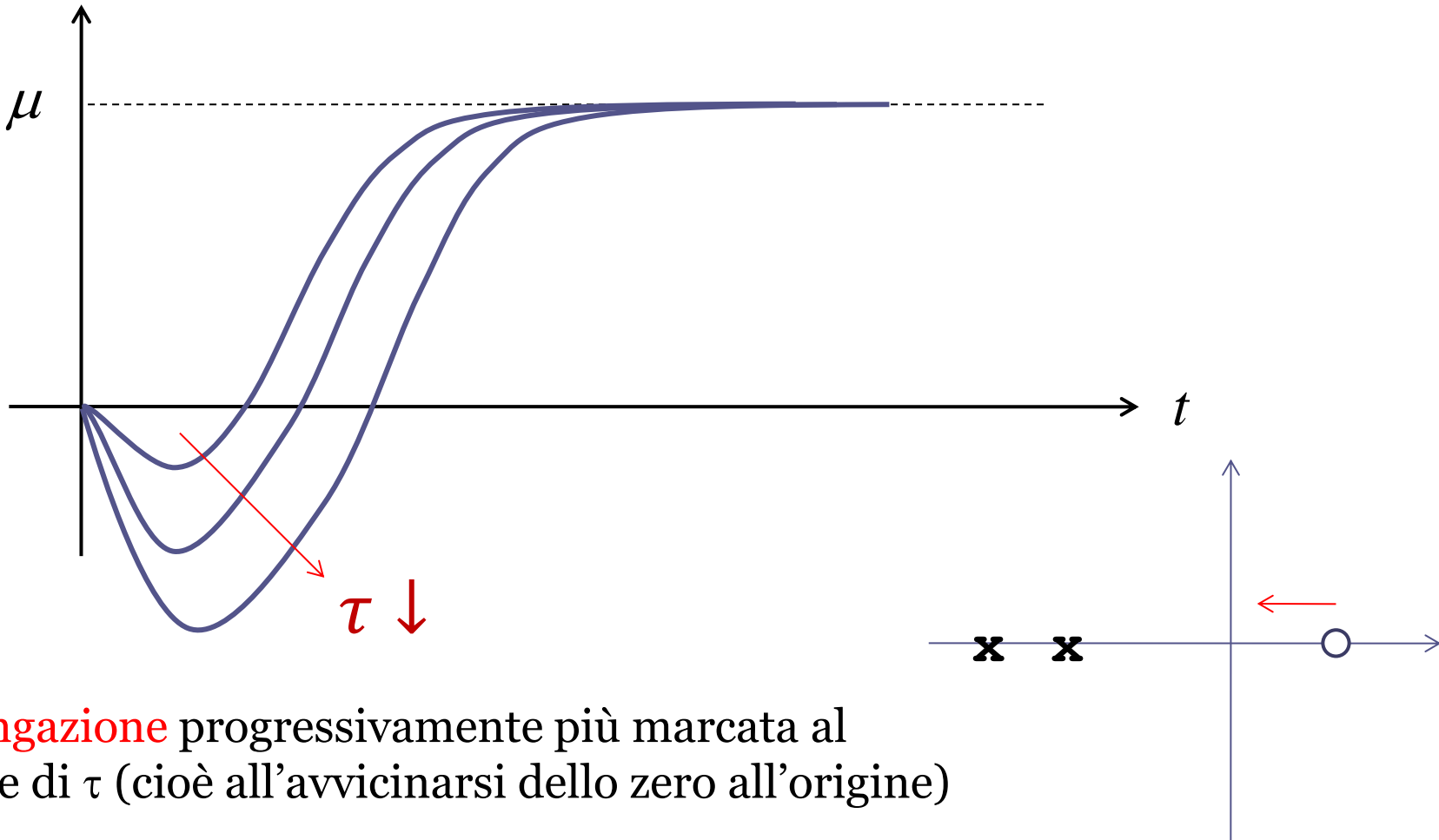
$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad \dot{y}(0) = \frac{\mu \tau}{T_1 T_2}$$

Se la costante di tempo dello zero è negativa ($\tau < 0$), cioè se lo zero è posizionato nel semiasse reale positivo, e se il guadagno statico μ è maggiore di zero, si ha che

$$\dot{y}(0) < 0$$

In tale situazione l'uscita decresce in un intervallo iniziale, la risposta al gradino presenta quindi il fenomeno dell' **undershooting (sottoelongazione)**

$\tau < 0$ Sistema con uno zero a parte reale positiva (sistema a **fase non minima**)

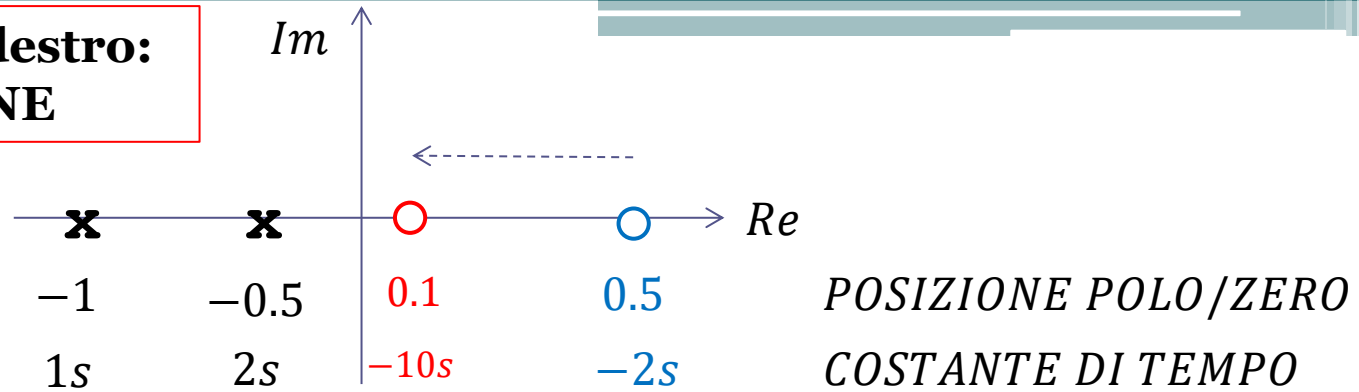


Sottoelongazione progressivamente più marcata al diminuire di τ (cioè all'avvicinarsi dello zero all'origine)

Raggiunto il punto di minimo, la risposta «cambia direzione» ed evolve verso il valore positivo di regime (il guadagno statico μ) con andamento **monotono**

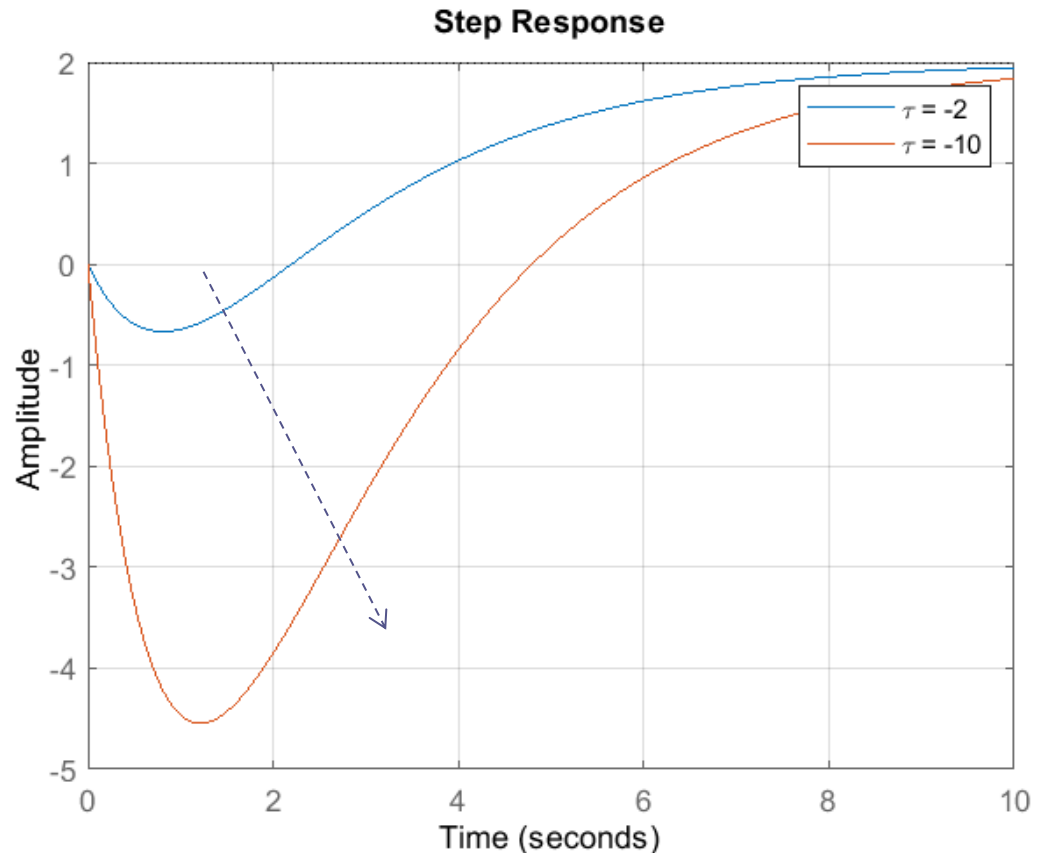
Zero nel semipiano destro: SOTTOELONGAZIONE

Confrontiamo le risposte di due sistemi aventi la stessa coppia di poli reali negativi ed uno zero nel semipiano destro in posizione variabile.

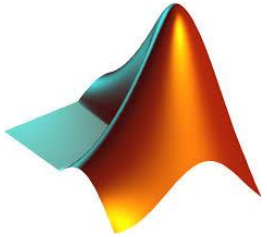


$$F_1(s) = \frac{2(1 - 2s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

$$F_2(s) = \frac{2(1 - 10s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

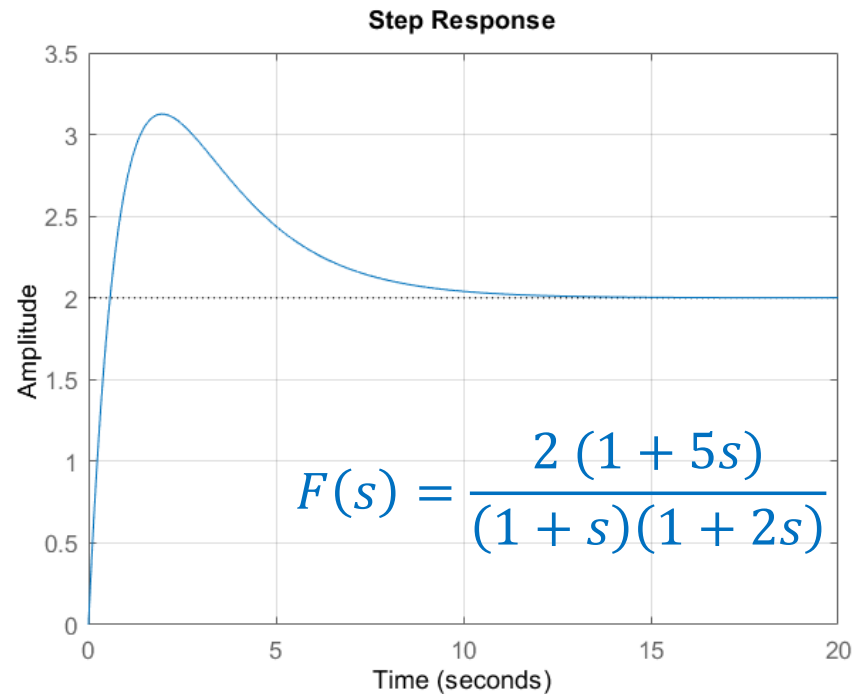
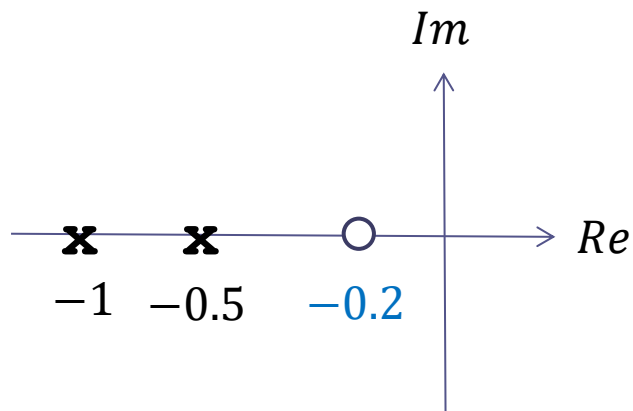


Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau1=-2;  
tau2=-10;  
  
F1=tf(mu*[tau1 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
F2=tf(mu*[tau2 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
figure(1)  
step(F1,F2,[0:0.01:10]),grid  
legend('\tau = -2','\tau = -10')
```

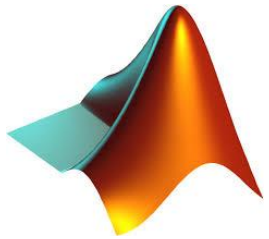
Zero nel semipiano sinistro collocato più in bassa frequenza rispetto a entrambi i poli: SOVRAELONGAZIONE



La presenza di uno zero più in bassa frequenza rispetto a tutti i poli induce una **sovraelongazione** nella risposta al gradino.

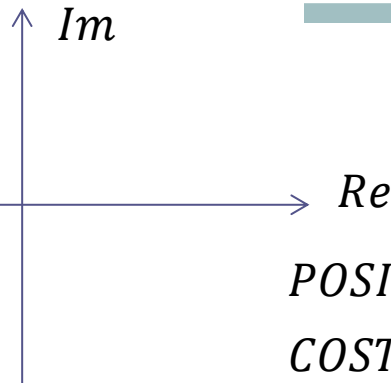
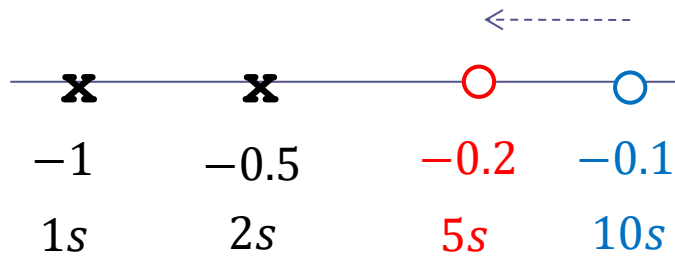
Superato il punto di massimo, la risposta evolve verso il regime con andamento **monotono**

Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau=5;  
  
F=tf(mu*[tau 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
figure(1)  
step(F,[0:0.01:20]),grid
```

Zero in bassa frequenza: confronto



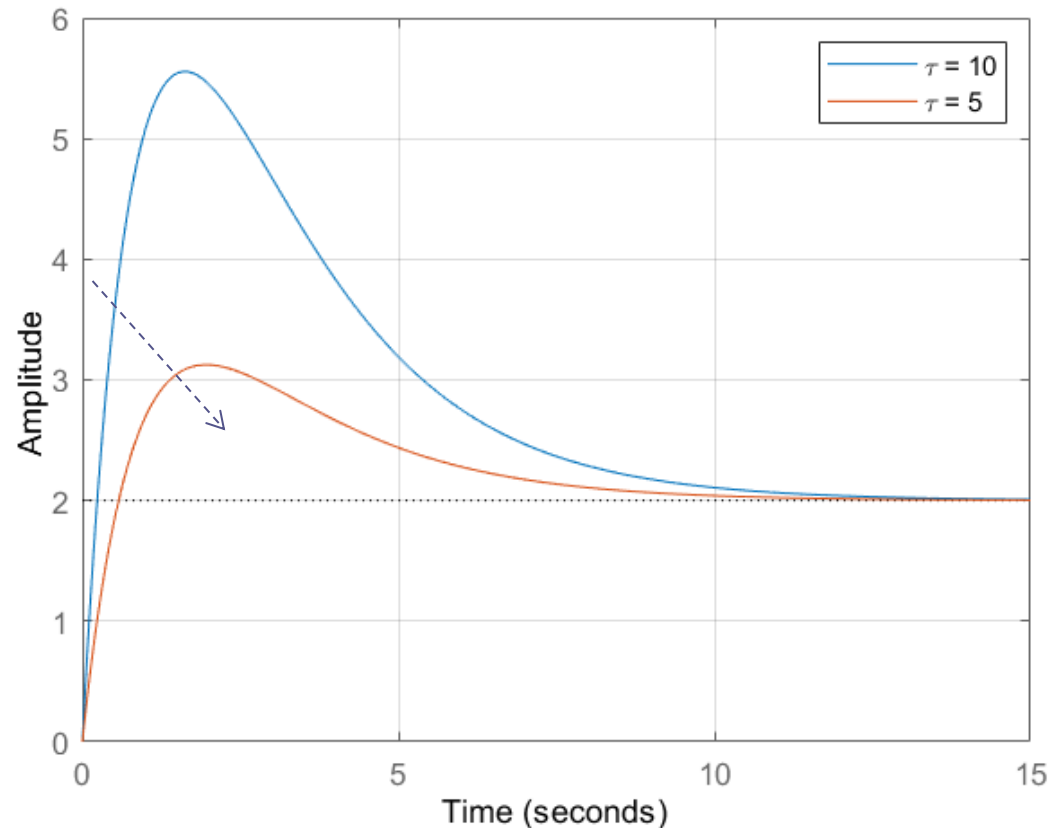
POSIZIONE POLO/ZERO
COSTANTE DI TEMPO

$$F_3(s) = \frac{2(1 + 10s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

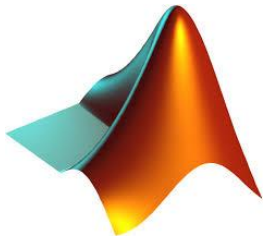
$$F_4(s) = \frac{2(1 + 5s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

La sovraelongazione è progressivamente più marcata quanto più lo zero risulta prossimo all'origine)

Step Response

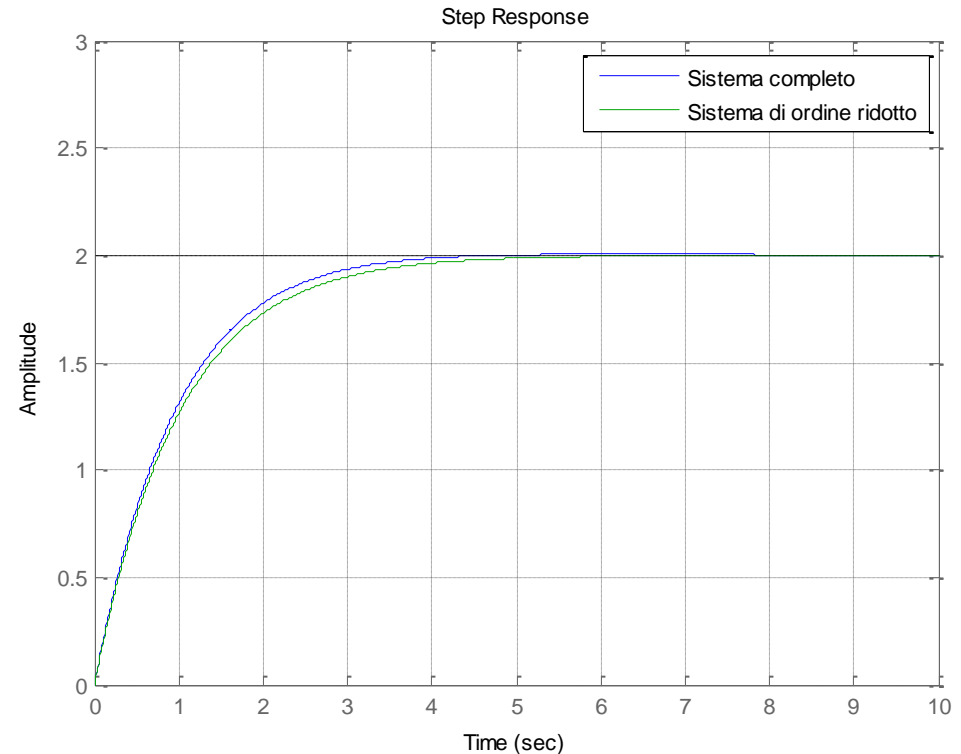
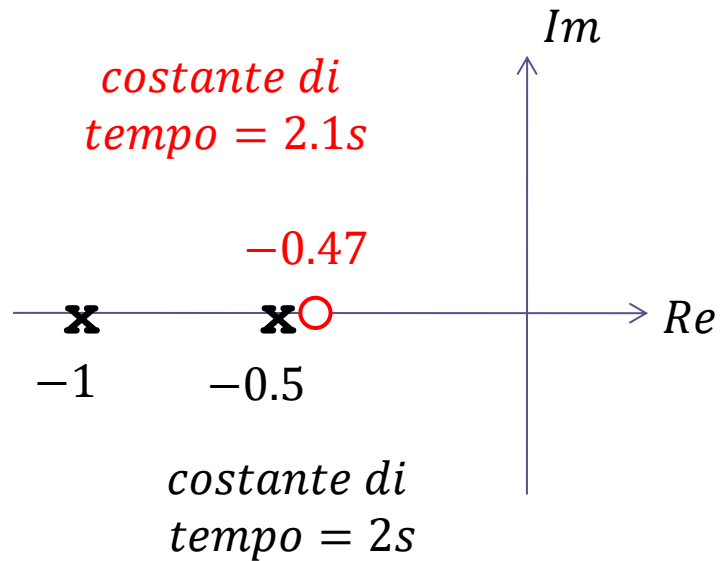


Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau1=10;  
tau2=5;  
  
F3=tf(mu*[tau1 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
F4=tf(mu*[tau2 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
figure(1)  
step(F3,F4,[0:0.01:15]),grid  
legend('\tau = 10','\tau = 5')
```

Cancellazione polo-zero



Quando uno zero ed un polo sono molto prossimi fra loro, è in genere possibile rimuoverli entrambi dalla FdT (operare cioè una «cancellazione polo-zero») senza alterare la risposta in maniera significativa

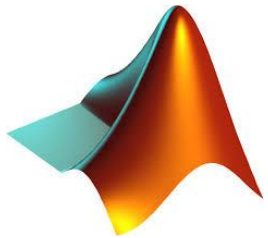
Sistema completo:

$$F_5(s) = \frac{2(1 + 2.1s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

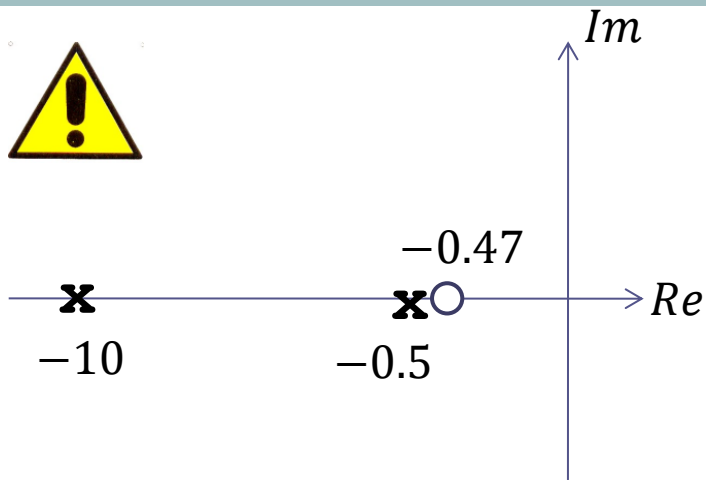
Sistema di ordine ridotto:

$$F_6(s) = \frac{2}{(1 + s)}$$

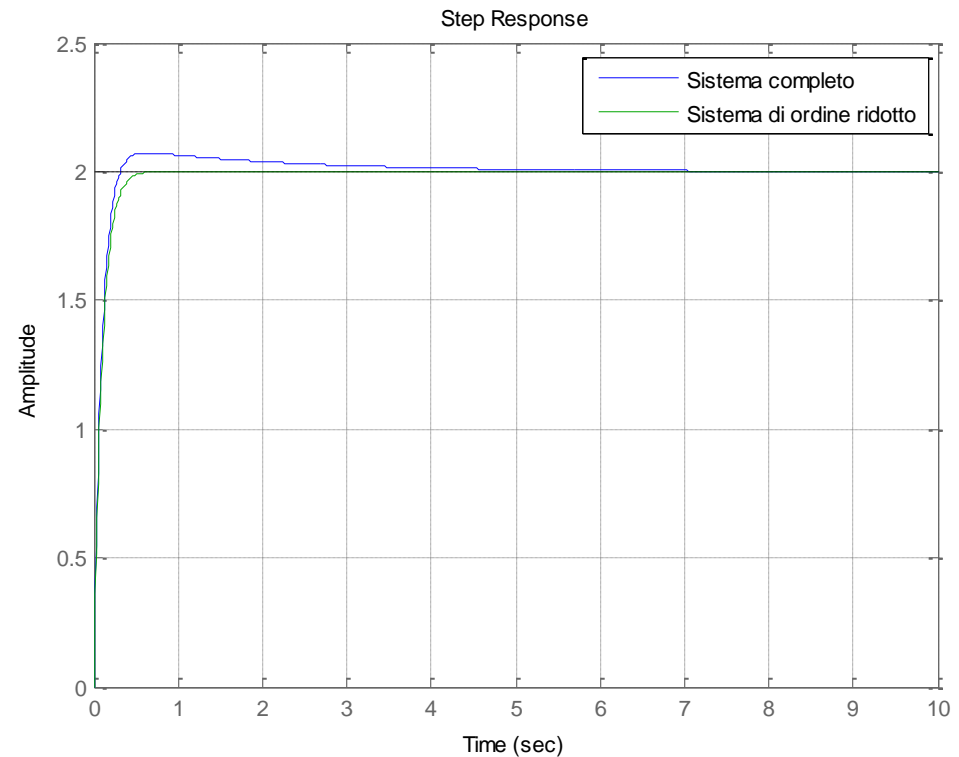
Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau=2.1;  
  
F5=tf(mu*[tau 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
F6=tf(mu,[T2 1]);  
figure(1)  
step(F5,F6,[0:0.01:10]),grid  
legend('Sistema completo','Sistema di ordine ridotto')
```



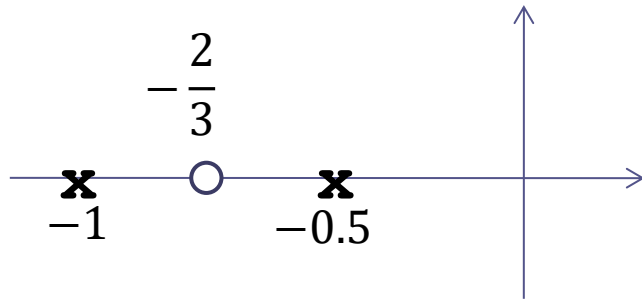
La cancellazione polo-zero può dar luogo a differenze significative fra le risposte del sistema complessivo e di quello di ordine ridotto quando si cancella una coppia polo-zero “lenta”, e le costanti di tempo residue che permangono nel sistema di ordine ridotto sono molto più piccole, come in questo esempio



Sistema completo:
$$F(s) = \frac{2(1 + 2.1s)}{(1 + 0.1s)(1 + 2s)}$$

Sistema di ordine ridotto:
$$F(s) = \frac{2}{(1 + 0.1s)}$$

Zero posizionato fra i due poli

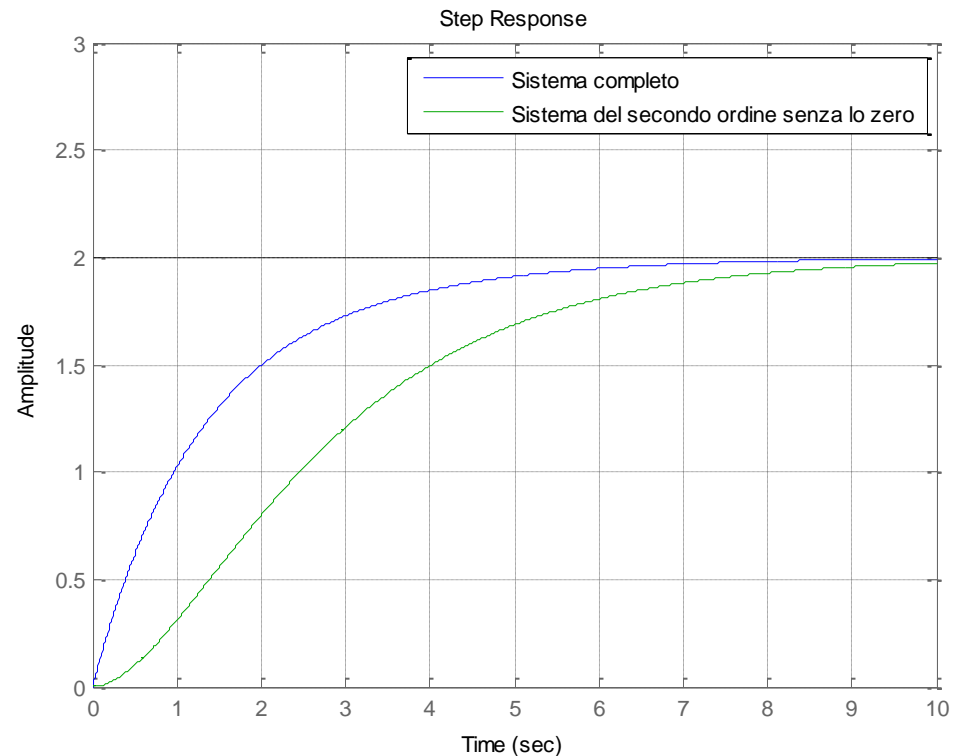


La risposta è monotona crescente, con un andamento qualitativo assimilabile a quello visto nel caso in cui lo zero non è presente

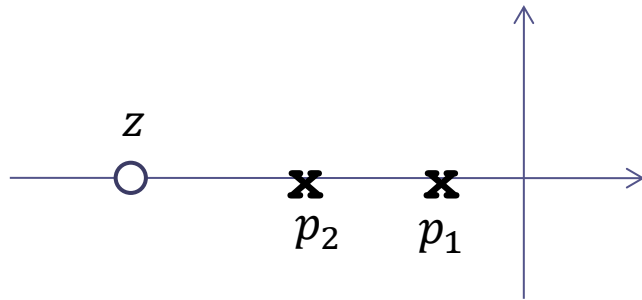
L'effetto della presenza dello zero è quello di velocizzare la risposta rispetto alla situazione in cui lo zero non c'è

$$F_1(s) = \frac{2 \left(1 + \frac{3}{2}s\right)}{(1+s)(1+2s)}$$

$$F_2(s) = \frac{2}{(1+s)(1+2s)}$$



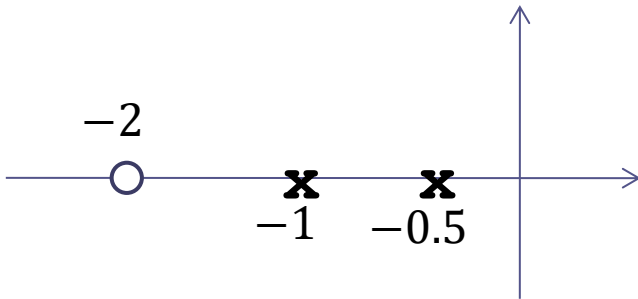
Zero posizionato più in alta frequenza rispetto ad entrambi i poli



La presenza di uno zero più in alta frequenza rispetto a entrambi i poli, e non eccessivamente vicino al polo p_2 (nel qual caso subentra la cancellazione polo-zero) ha un effetto alquanto ridotto.

L'unico effetto è una **debole velocizzazione della risposta**

Zero posizionato più in alta frequenza rispetto ad entrambi i poli

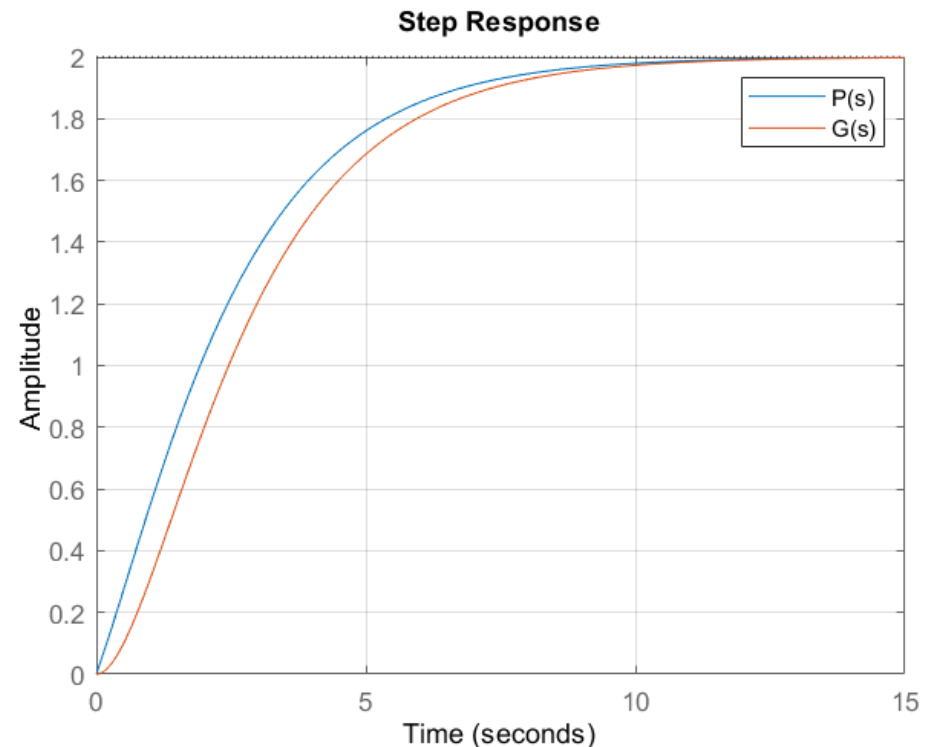


La presenza di uno zero più in alta frequenza rispetto a entrambi i poli ha un effetto alquanto ridotto.

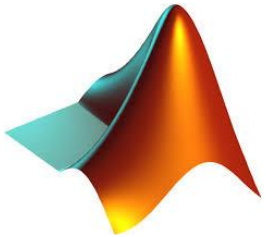
La risposta al gradino del sistema che include anche lo zero ha dei tempi di assestamento lievemente inferiori.

$$P(s) = \frac{2 \left(1 + \frac{1}{2}s\right)}{(1+s)(1+2s)}$$

$$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+2s)}$$



Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2
p1=-0.5
p2=-1
z=-2
z2=-4;
s=tf('s')
P1=-(mu*p1*p2/z)*(s-z)/((s-p1)*(s-p2))
P2=-(mu*p1*p2/z2)*(s-z2)/((s-p1)*(s-p2))
G=(mu*p1*p2)/((s-p1)*(s-p2))
step(P1,G,P2,[0:0.01:15]),grid
legend('P1(s)', 'G(s)', 'P2(s)')
```

Riassumiamo quanto visto

$$F(s) = \frac{\mu(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_m s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}$$

In generale la risposta al gradino di un sistema a **poli e zeri reali** si presenta monotona crescente tranne i due casi in cui:

è presente uno zero positivo



In questo caso la risposta presenta una sottoelongazione («undershooting»), seguita da una convergenza monotona verso il valore di regime

è presente uno zero negativo più in bassa frequenza rispetto a tutti i poli.



In questo caso la risposta presenta una sovraelongazione, seguita da una convergenza monotona verso il valore di regime

Sono sempre assenti fenomeni oscillatori.

La presenza degli zeri velocizza la risposta.

Es.

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta al gradino unitario dei sistemi descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento.

$$G_2(s) = \frac{3}{(s + 1) \left(\frac{1}{7}s + 1 \right)}$$

$$G_3(s) = \frac{3 + 0.2s}{(s + 1) \left(\frac{1}{7}s + 1 \right)}$$

$$G_4(s) = \frac{1 - s}{(s + 1)(2s + 1)}$$

$$G_2(s) = \frac{3}{(s + 1) \left(\frac{1}{7}s + 1\right)}$$

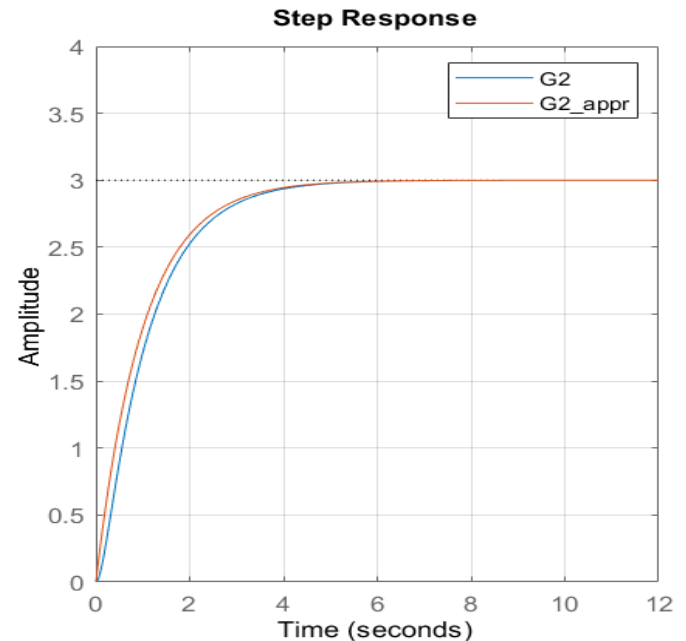
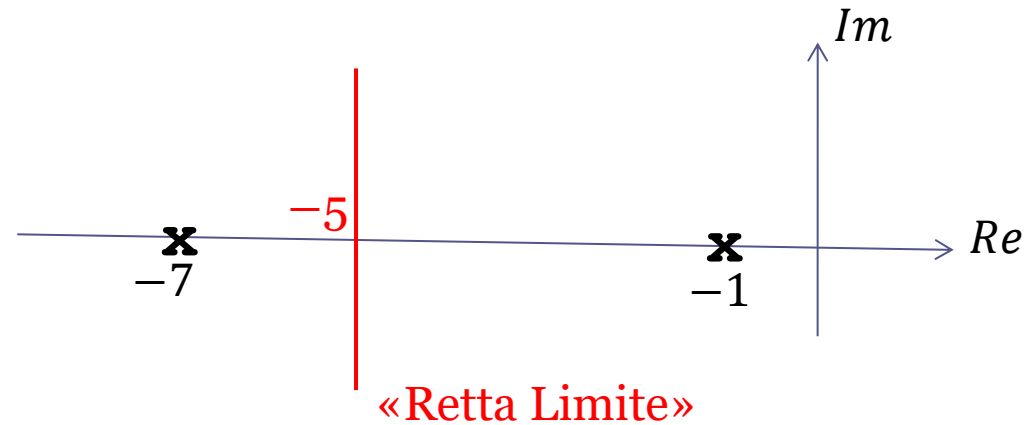
$$\mu_2 = G_2(0) = 3$$

Poli: $p_1 = -1$ $p_2 = -7$

Il polo in -1 è dominante.
 Il polo in -7 può essere trascurato.

$$G_{2,appr}(s) = \frac{3}{(s + 1)}$$

Distribuzione poli-zeri



Distribuzione poli-zeri

$$G_3(s) = \frac{3 + 0.2s}{(s + 1) \left(\frac{1}{7}s + 1\right)}$$

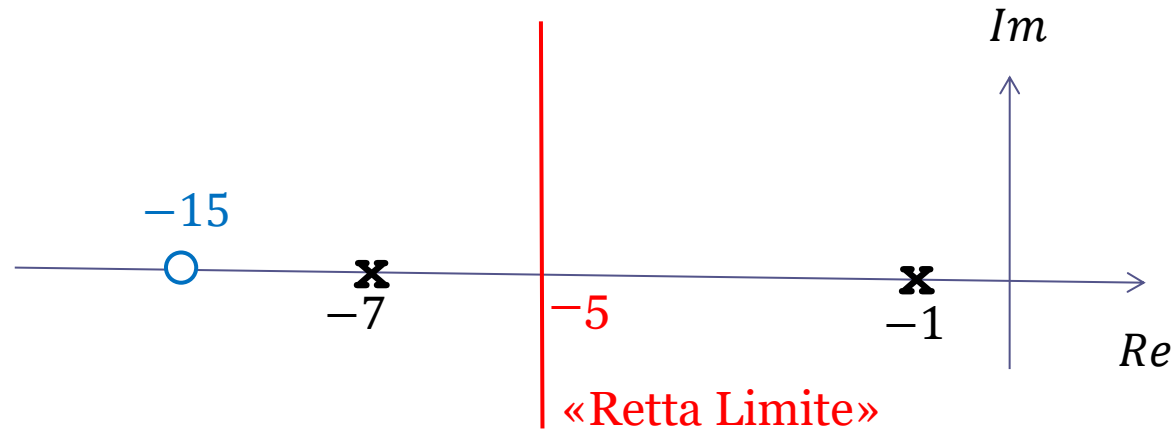
$$\mu_3 = G_3(0) = 3$$

Poli e zeri

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = -7$$

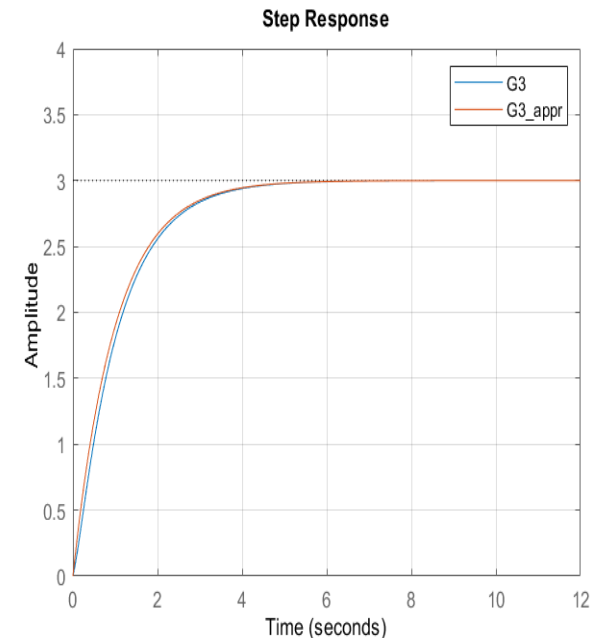
$$z_1 = -15$$



Il polo in -1 è dominante. **Sia il polo in -7 che lo zero in -15 possono essere trascurati.**

$$G_{3,appr}(s) = \frac{3}{(s + 1)}$$

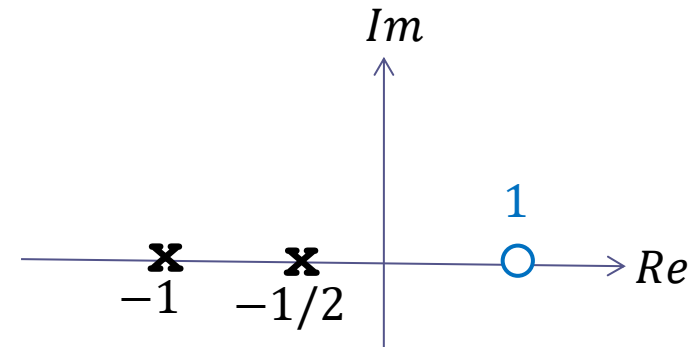
Risposta circa analoga a quella dell'esempio precedente



$$G_4(s) = \frac{1 - s}{(s + 1)(2s + 1)}$$

$$\mu_4 = G_4(0) = 1$$

Distribuzione poli-zeri

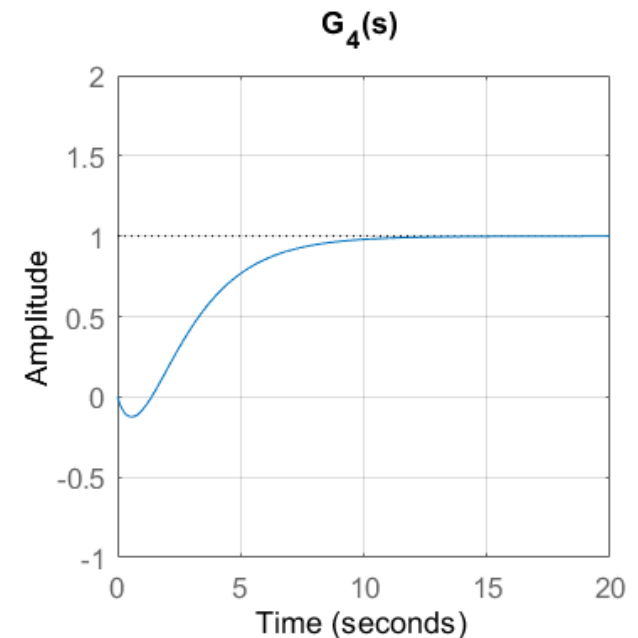


Due poli reali negativi non tali da poterne eleggere uno come «dominante»

Zero reale positivo che induce l'undershooting

Successivamente al punto di minimo, la risposta converge verso il valore di regime con un andamento monotono crescente

Sia l'entità dell'undershooting che i tempi di assestamento non sono facilmente determinabili



Istruzioni Matlab per la creazione dei grafici

```
clc  
clear all  
close all
```

```
s=tf('s')
```

```
G2=3/((s+1)*(s/7+1));  
G2appr=3/((s+1));
```

```
G3=(3+0.2*s)/((s+1)*(s/7+1));  
G3appr=3/((s+1));
```

```
G4=(1-s)/((s+1)*(2*s+1));
```

```
figure(1)  
step(G2,[0:0.01:12]),grid  
hold on  
step(G2appr,[0:0.01:12])  
ylim([0 4])  
legend('G2','G2_appr')
```

```
figure(2)  
step(G3,[0:0.01:12]),grid  
hold on  
step(G3appr,[0:0.01:12])  
ylim([0 4])  
legend('G3','G3_appr')
```

```
figure(3)  
step(G4,[0:0.01:20]),grid  
title('G_4(s)')  
ylim([-1 2])
```

Motore in corrente continua

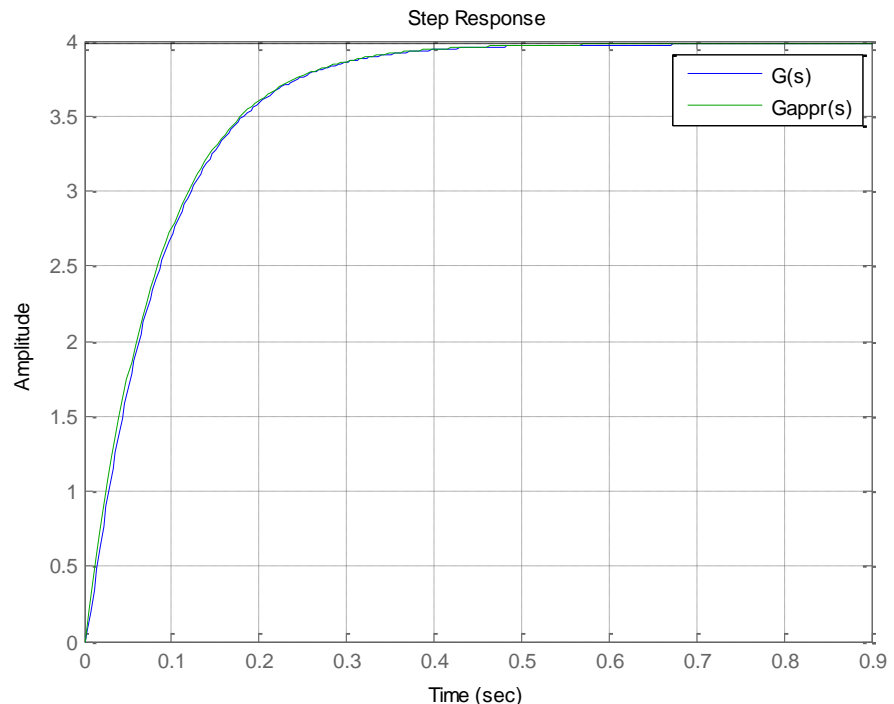
$R=0.46 \Omega$, $L=15 \text{ mH}$, $J = 0.012 \text{ kg m}^2$, $B=0.0008 \text{ Ns/rad}$, $K=0.25 \text{ N/A}$

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{(R + Ls)(B + Js) + K^2} = \frac{3.97}{(1 + 0.0844s)(1 + 0.0034s)}$$



Le costanti di tempo differiscono per un fattore 25

$$G_{appr}(s) = \frac{3.97}{(1 + 0.0844s)}$$



FdT asintoticamente stabili con poli e zeri sia reali che complessi coniugati (CC)

Quando in una FdT sono presenti anche poli (o zeri) complessi coniugati, la **fattorizzazione in costanti di tempo** diventa più articolata, ed oltre alle costanti di tempo include dei parametri aggiuntivi, associati alle coppie di poli e zeri complessi coniugati, denominati «**pulsazione naturale**» e «**smorzamento**»

$$F(s) = \mu \frac{\overbrace{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_{m_1} s)}^{\text{Termini «binomi»}}}{\underbrace{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_{n_1} s)}_{\text{Termini trinomi}}} \frac{\left(1 + \frac{2\xi_{z1}}{\omega_{n,z1}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,z1}^2}\right) \dots \left(1 + \frac{2\xi_{zn2}}{\omega_{n,zn2}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,zn2}^2}\right)}{\left(1 + \frac{2\xi_{p1}}{\omega_{n,p1}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,p1}^2}\right) \dots \left(1 + \frac{2\xi_{pn2}}{\omega_{n,pn2}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,pn2}^2}\right)}$$

Termine trinomio $\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) = \frac{1}{\omega_n^2} (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$

ω_n **Pulsazione naturale della coppia di poli/zeri CC** $\omega_n > 0$

ξ **Smorzamento della coppia di poli/zeri CC** $|\xi| < 1$

Poli (o zeri) complessi coniugati (CC)

$$\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) = \frac{1}{\omega_n^2} (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$$

ω_n **Pulsazione naturale** della coppia di poli/zeri CC $\omega_n > 0$

ξ **Smorzamento** della coppia di poli/zeri CC $|\xi| < 1$

Parte reale e immaginaria dei due poli (o zeri)

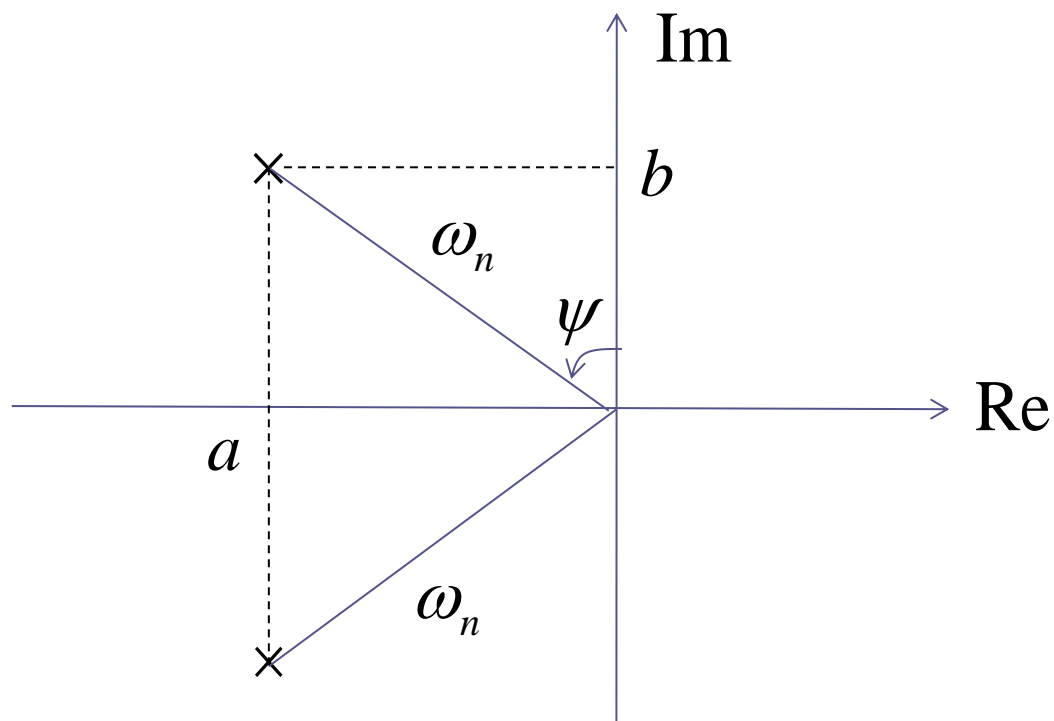
$$s_{1,2} = a \pm jb \quad a = -\xi\omega_n \quad \text{Parte reale}$$

$$b = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{Parte immaginaria}$$

Relazioni inverse

$$\xi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Significato geometrico dello smorzamento e della pulsazione naturale



$$\xi = \sin(\psi)$$

$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$$

**Distanza
dall'origine**

$-1 < \xi < 1$ **radici complesse coniugate** $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$

$0 < \xi < 1$ Parte reale negativa ($0 < \psi < \pi$)

$-1 < \xi < 0$ Parte reale positiva ($-\pi < \psi < 0$)

$\xi = 0$ **radici immaginarie pure** $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

Sistema con due poli complessi coniugati

$$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\mu}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

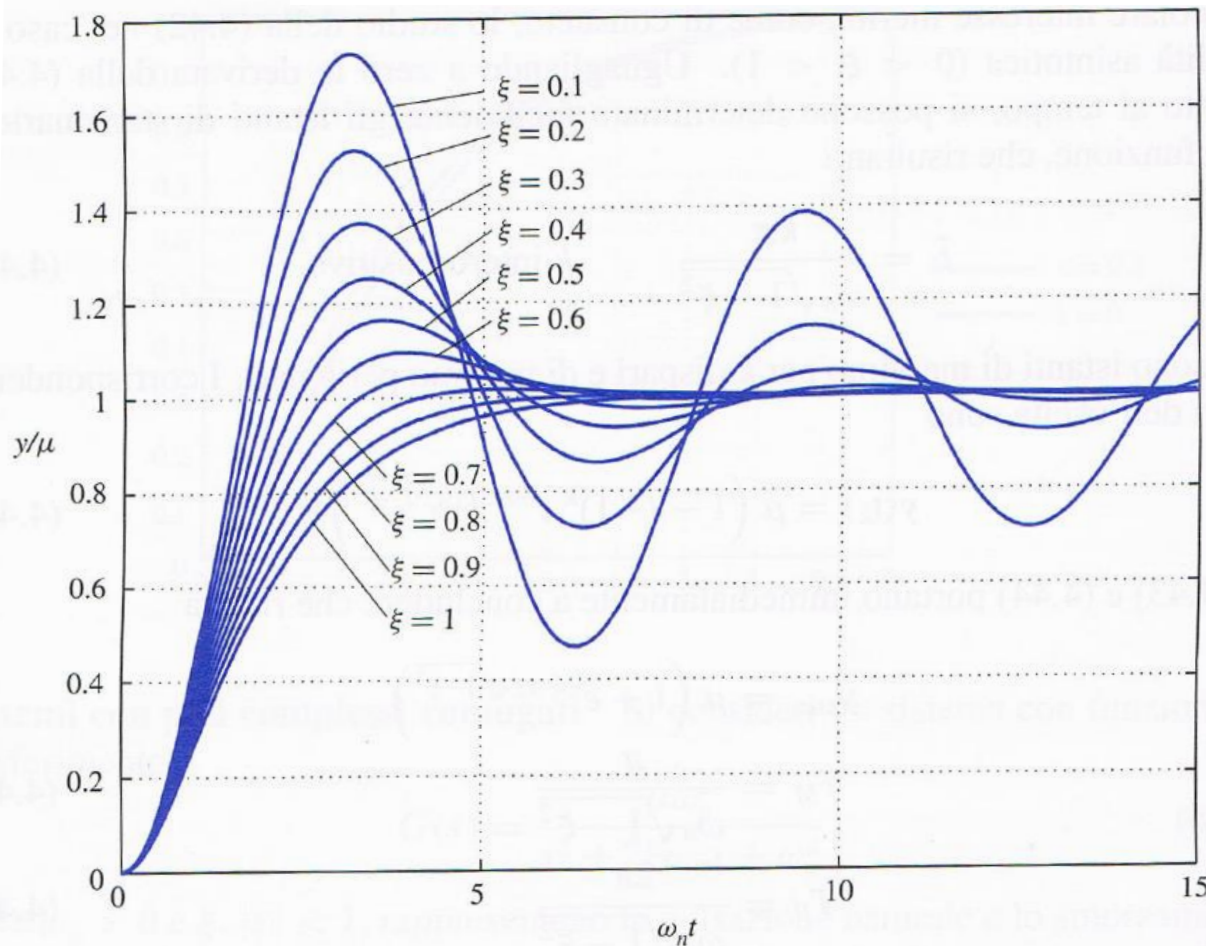
Coppia di poli complessi
coniugati a parte reale negativa

$$\omega_n > 0 \quad \text{Puls. naturale}$$

$$0 < \xi < 1 \quad \text{Smorzamento}$$

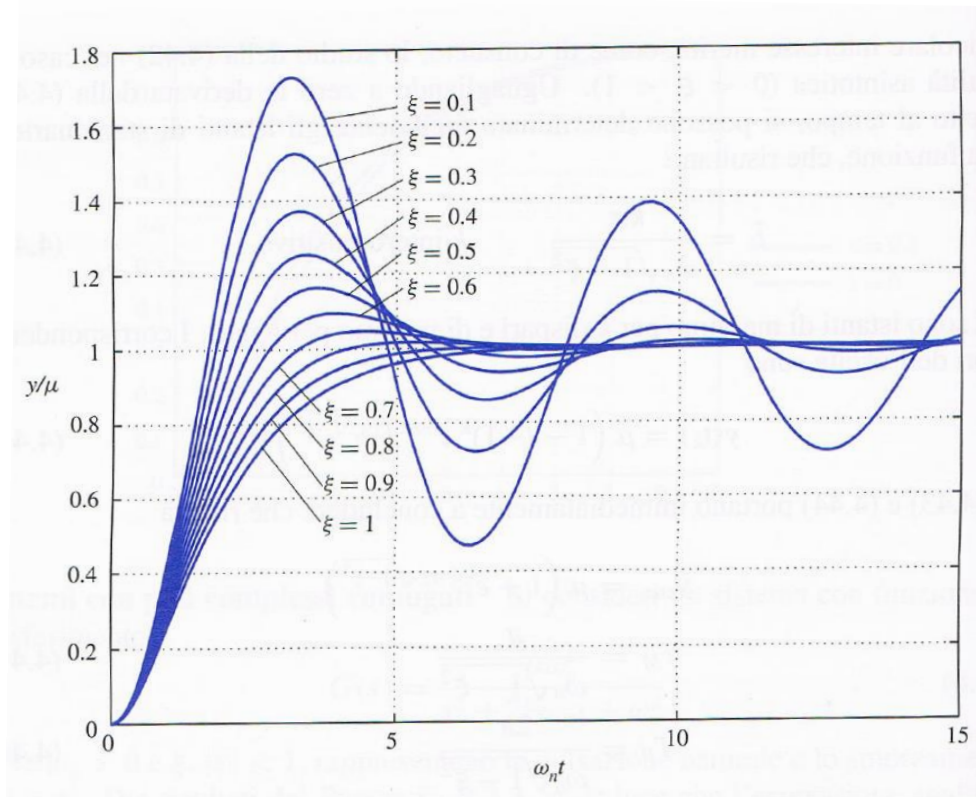
Espressione analitica della RGU

$$y(t) = \mu \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \alpha) \right]$$



Grafici al variare dello smorzamento

Periodo dell'oscillazione e sovraelongazione percentuale



Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Istante del primo punto di massimo

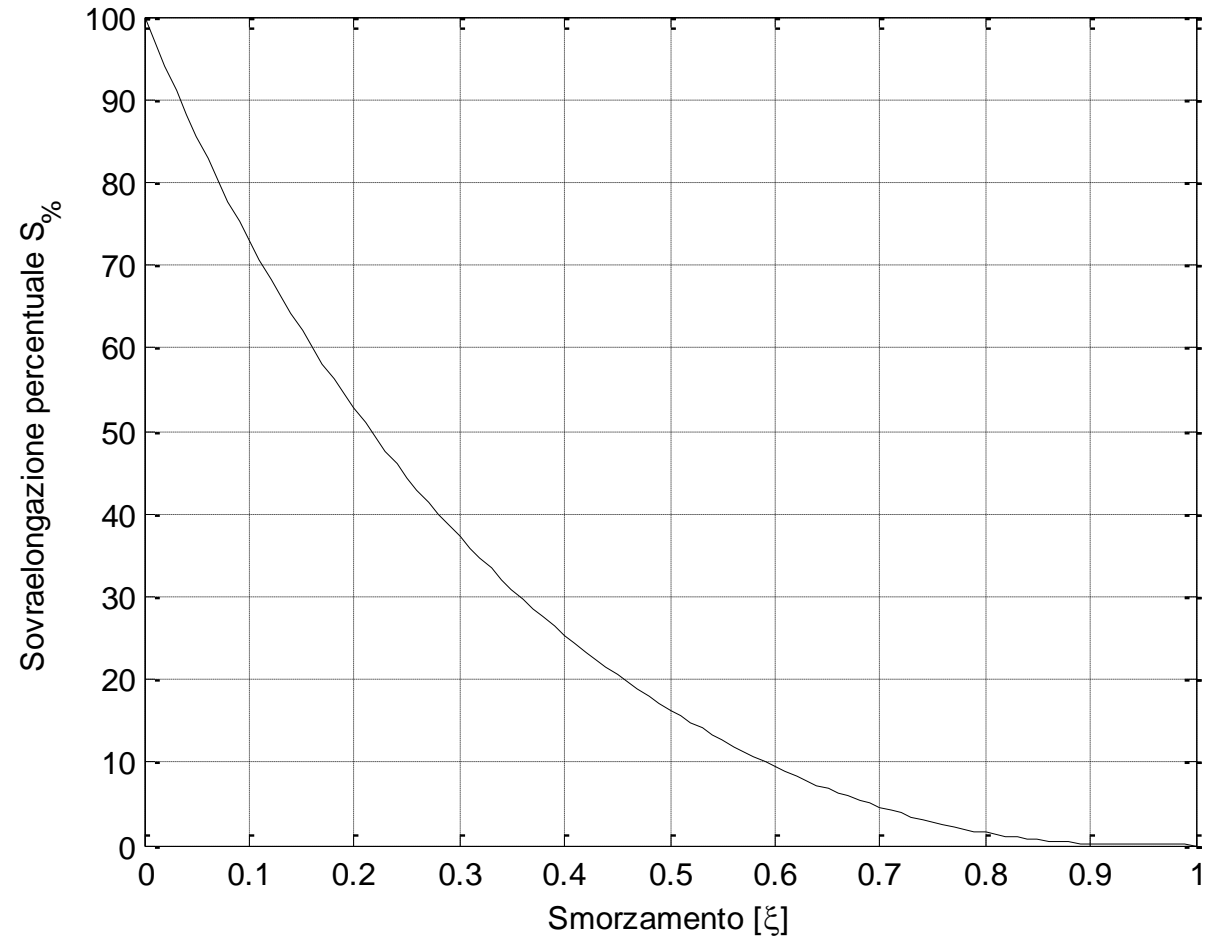
$$t_{max} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$S_{\%} = 100 \frac{y_{max} - \mu}{\mu} = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Sovraelongazione percentuale
(dipende unicamente dallo smorzamento)

Sovraelongazione percentuale vs. smorzamento

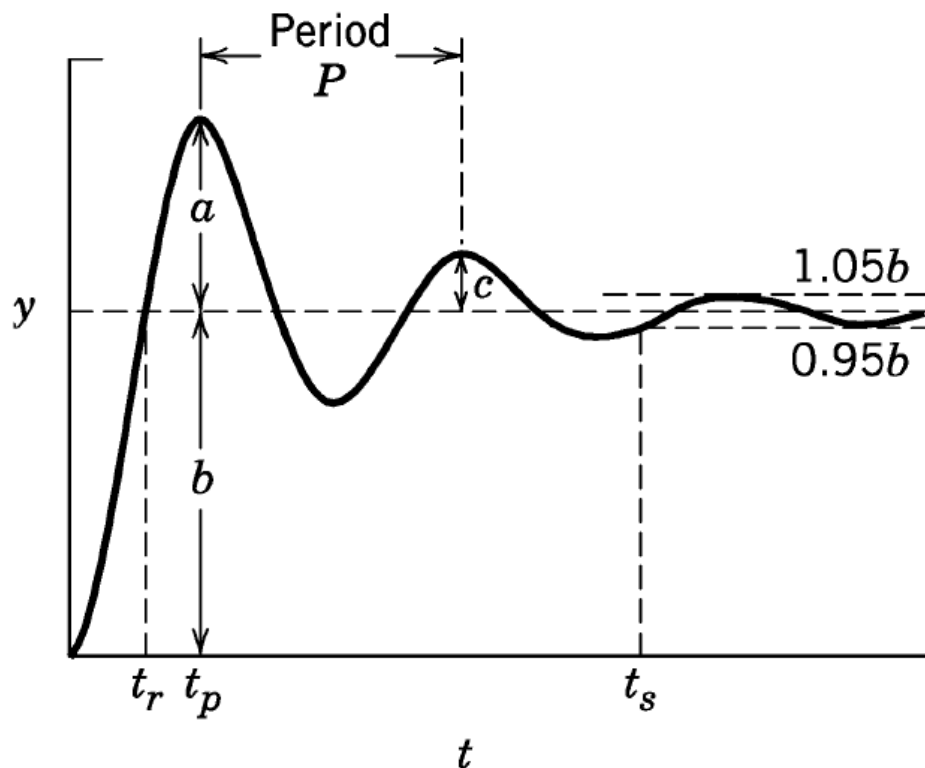
$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



```
xi=0:0.01:1;
s=100*exp((-xi*pi)./(sqrt(1-xi.^2)));
plot(xi,s,'k'),grid
xlabel('Smorzamento [\xi]')
ylabel('Sovraelongazione percentuale S_%)')
```

Rapporto di decadimento delle oscillazioni

Decay Ratio. $DR = c/a$ (where c is the height of the second peak).

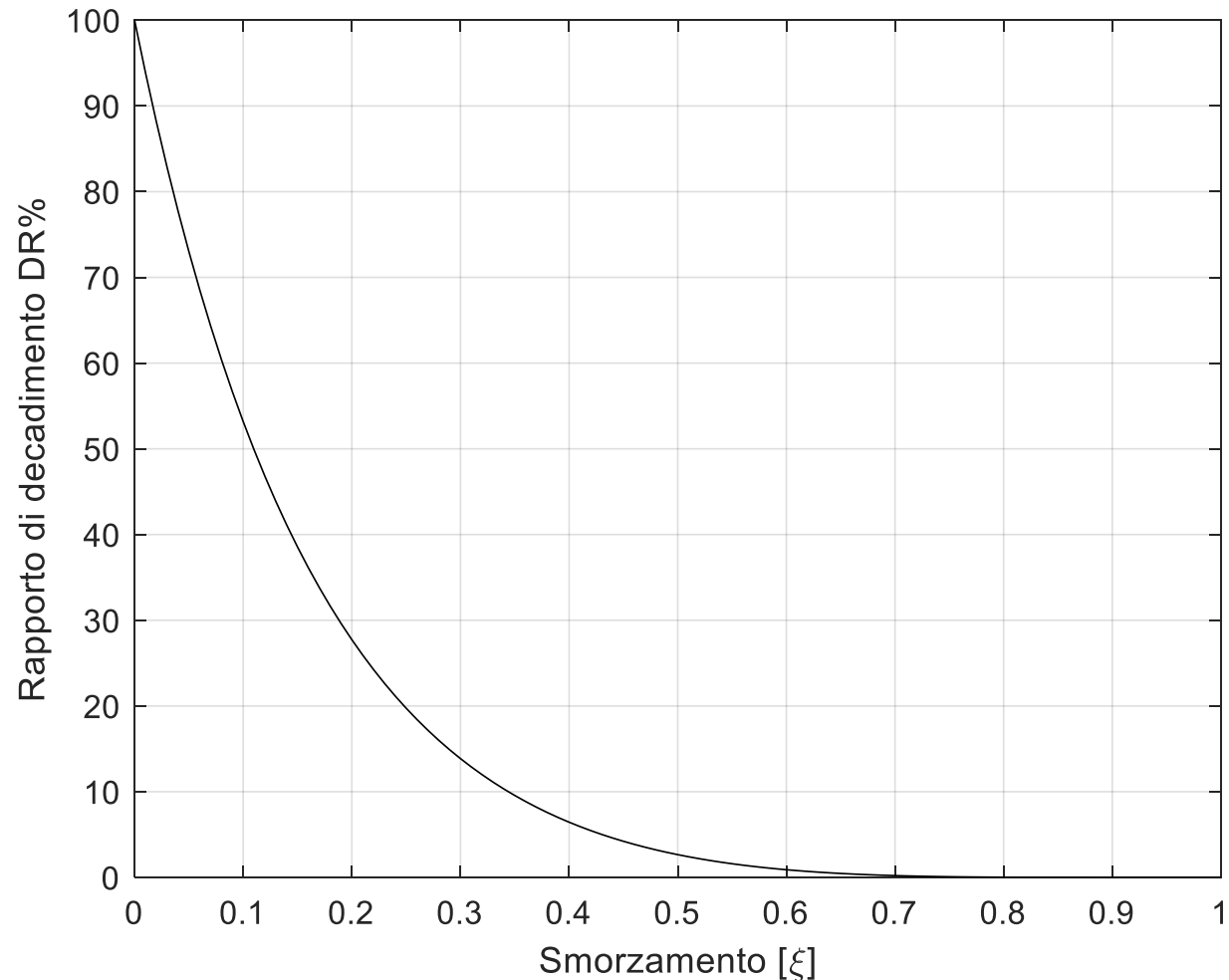


Dipende unicamente dallo smorzamento

$$DR = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Rapporto di decadimento percentuale delle oscillazioni vs. smorzamento

$$DR\% = 100e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



Tempi di assestamento

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{3}{\xi\omega_n}$	$\frac{3.9}{\xi\omega_n}$	$\frac{4.6}{\xi\omega_n}$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)}$	3τ	3.9τ	4.6τ
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	4.7τ	5.8τ	6.6τ

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

«costante di tempo equivalente» della coppia di poli CC

Tempi di assestamento – relazioni approssimate

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

«costante di tempo equivalente» della coppia di poli CC

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$	$3\tau_{eq}$	$4\tau_{eq}$	$5\tau_{eq}$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)}$	3τ	4τ	5τ
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	5τ	6τ	7τ

Esempio

$$F(s) = \frac{14}{s^2 + 2s + 7}$$

Poiché il polinomio caratteristico della FdT ha i coefficienti con segno concorde, le sue radici hanno certamente parte reale negativa (regola di Cartesio). Il sistema è dunque as. stabile

Il guadagno statico è $\mu = F(0) = 2$ Tale valore sarà il valore di regime della risposta al gradino unitario

Calcoliamo il Δ dell'equazione di secondo grado per verificare se i poli siano reali o complessi coniugati

$$\Delta = 4 - 28 = -24 \quad \text{Poli complessi coniugati}$$

Ci interessa valutarne smorzamento e pulsazione naturale

Uguagliamo il polinomio caratteristico della FdT alla forma generale precedentemente introdotta in cui compaiono esplicitamente lo smorzamento e la pulsazione naturale

$$s^2 + 2s + 7 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{7} \approx 2.64 \text{ rad/sec}$$

$$2\xi\omega_n = 2 \quad \Rightarrow \quad \xi = 1/\omega_n \approx 0.37$$

Un modo alternativo di procedere, più lungo, è quello di determinare esplicitamente la parte reale a e la parte immaginaria b della coppia di poli complessi coniugati applicando la formula risolutiva per una equazione di secondo grado

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-24}}{2} = -1 \pm 2.45j \quad a = -1, \quad b = 2.45$$

e applicare successivamente le formule

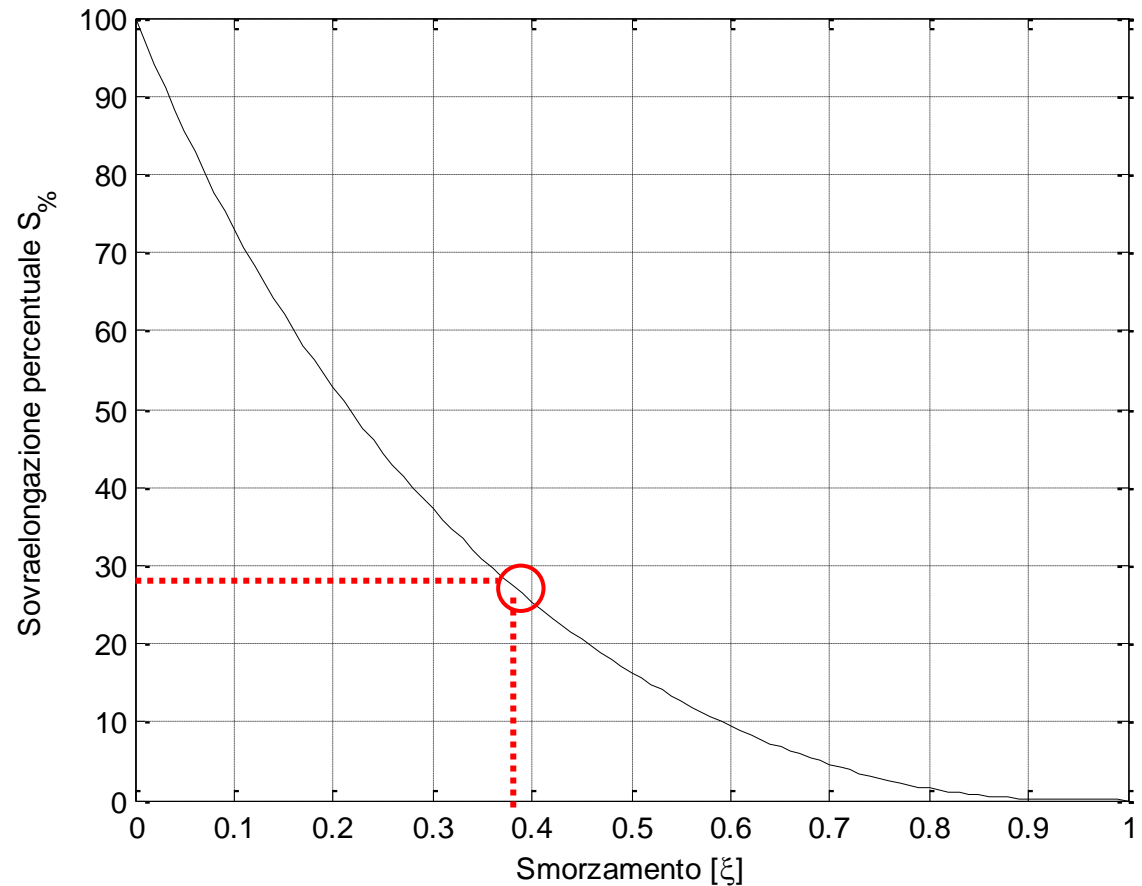
$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2} = 2.64 \quad \xi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.37$$

Sovraelongazione percentuale

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\xi \approx 0.37$$

$$S_{\%} \approx 28$$



Il valore massimo dell'uscita durante il transitorio sarà pertanto

$$y_{max} = \mu + 0.28 \mu = 1.28\mu = 2.56$$

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n} \approx 1.02 \text{ s} \quad \text{Costante di tempo equivalente e tempi di assestamento}$$

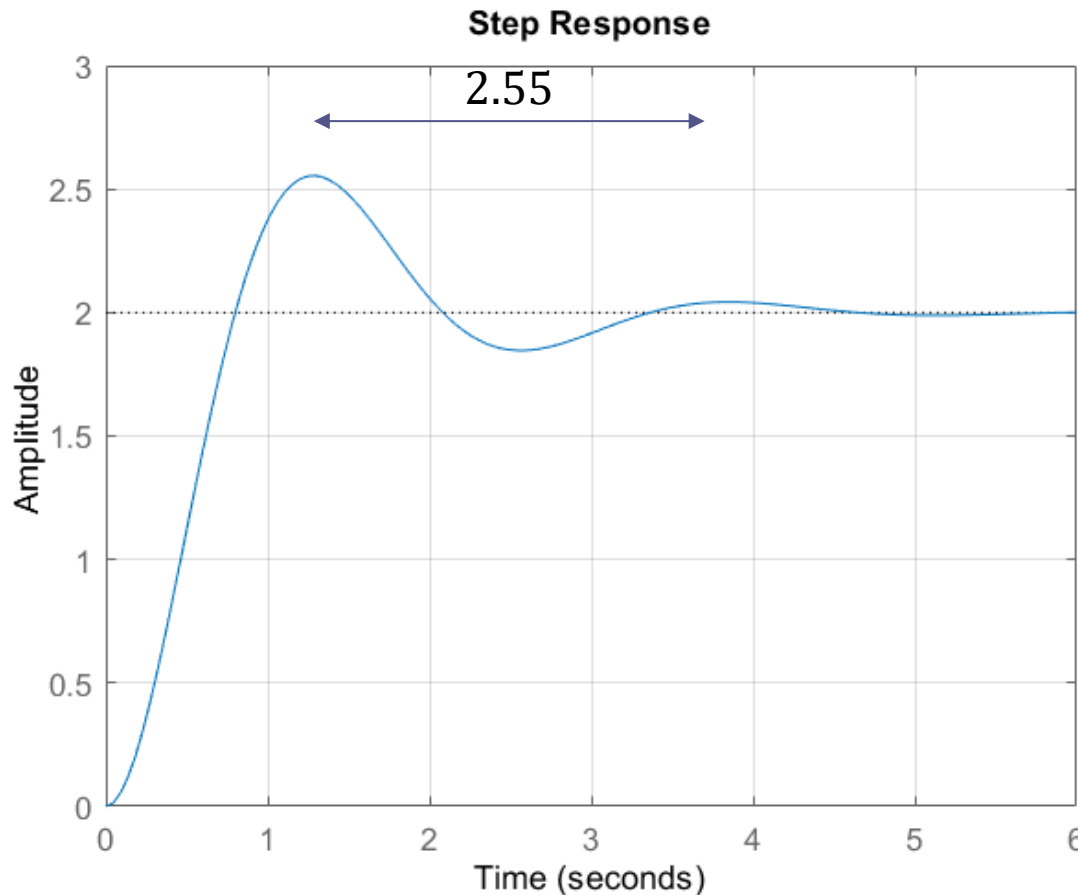
	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$	$3\tau_{eq}$	$4\tau_{eq}$	$5\tau_{eq}$
$F(s) = \frac{14}{s^2 + 2s + 7}$	3.06 s	4.08 s	5.10 s

Periodo della oscillazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 2.55 \text{ s}$$

Istante del primo punto di massimo

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 1.27 \text{ s}$$



$$S_{\%} \approx 28$$

$$y_{max} = 2.56$$

$$T_{a1\%} \approx 5.1 \text{ s}$$

Trascorsi 5.1 secondi la risposta evolve nella fascia [1.98, 2.02]

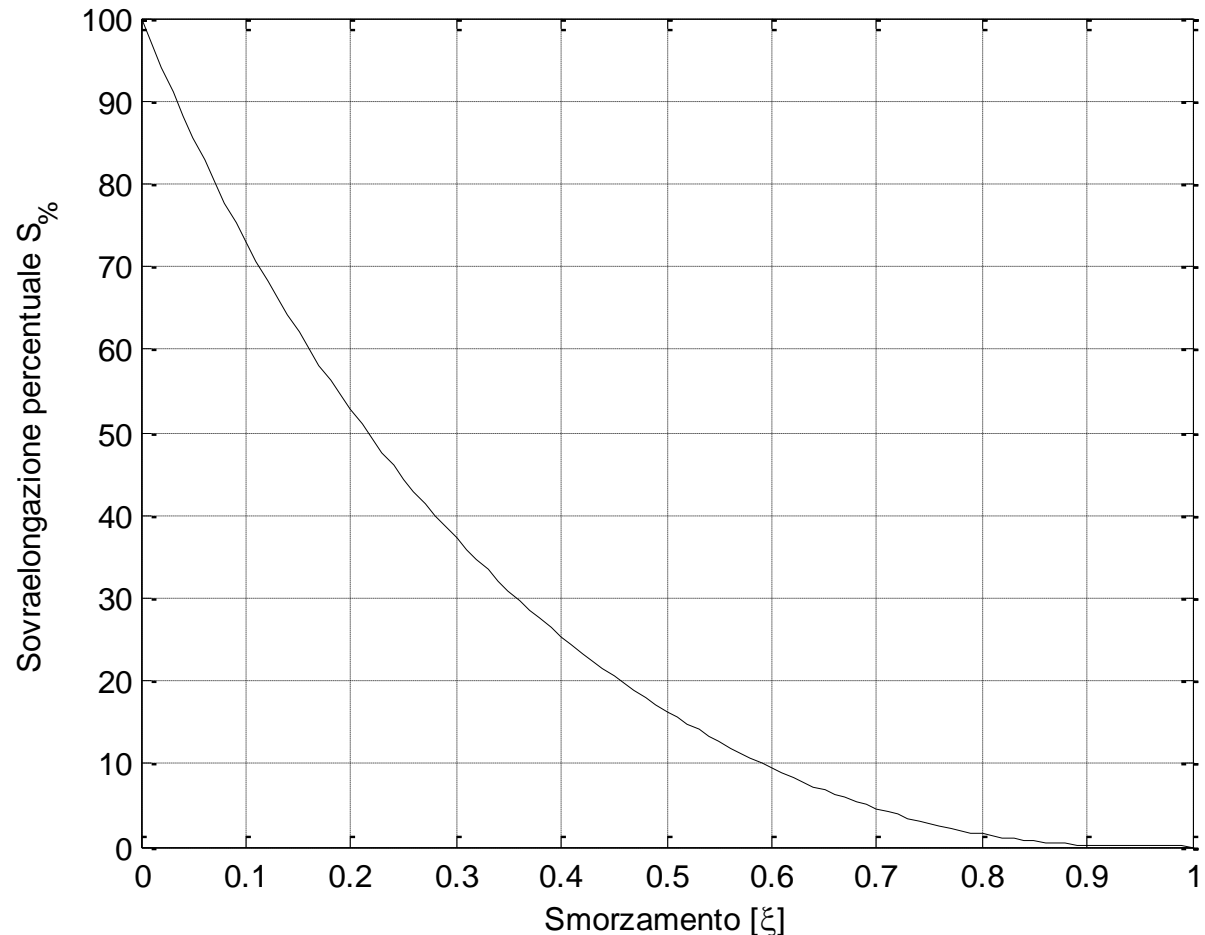
$$DR = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.08$$

L'ampiezza di ciascuna oscillazione è pari all' 8% di quella precedente

Come possiamo garantire che in un sistema di controllo la sovraelongazione sia, ad esempio, inferiore al 10 % ?

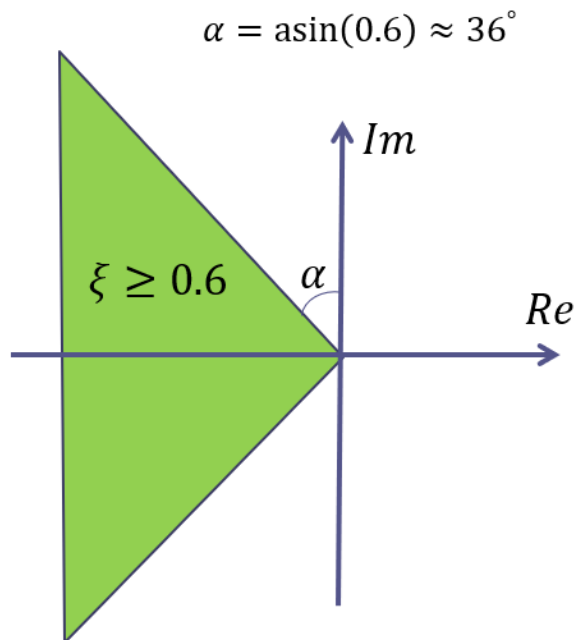
Sovraelongazione percentuale vs. smorzamento

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



Sulla base del grafico precedente, desumiamo come per fare in modo che in un sistema di controllo la sovralongazione percentuale sia minore del 10% è sufficiente garantire che **tutti i poli complessi coniugati della FdT a ciclo chiuso abbiano uno smorzamento maggiore o uguale di 0.6.**

In termini grafici, ciò corrisponde a garantire che i poli della FdT a ciclo chiuso ricadano all'interno di una **regione ammissibile**

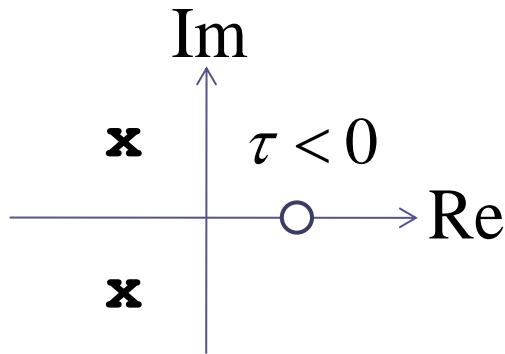


Ragionamenti di questo tipo saranno alla base di una parte delle metodologie di progetto che vedremo più avanti («**Sintesi diretta**» e «**Sintesi mediante Luogo delle Radici**»)

Sistema con due poli complessi coniugati e uno zero reale

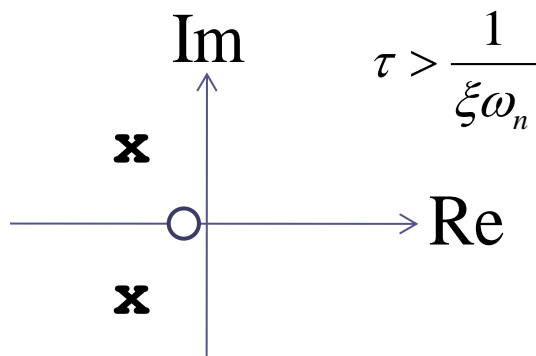
$$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2(\tau s + 1)}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$\omega_n > 0 \quad |\xi| < 1$$

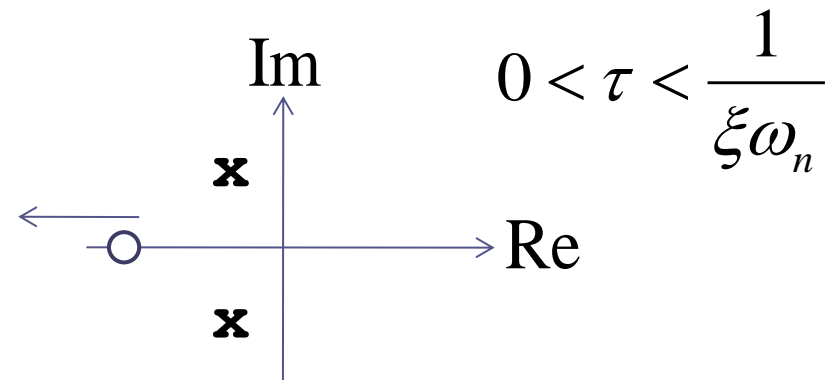


A. Zero nel semipiano destro:
undershooting e successive oscillazioni smorzate verso il regime

B. Zero reale negativo la cui parte reale è più in bassa frequenza rispetto alla coppia di poli CC. Incremento della sovraelongazione.



C. Zero in alta frequenza: progressivamente ininfluyente



A. Zero nel semipiano destro

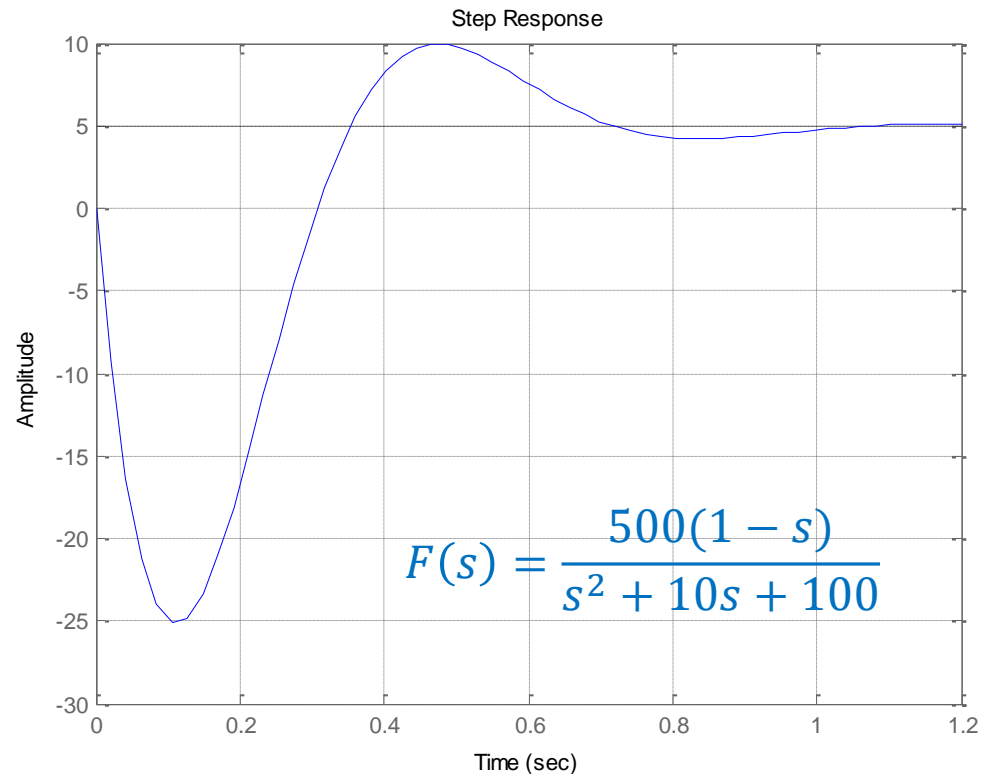
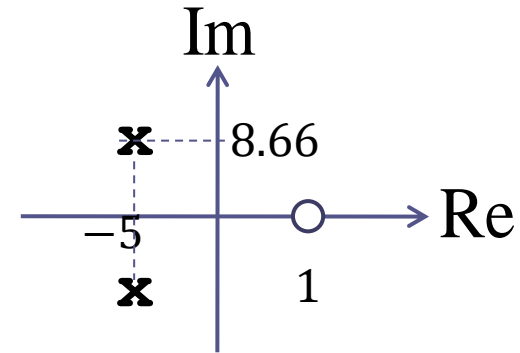
Consideriamo un sistema del secondo ordine avente guadagno statico pari a 5, uno zero in 1, ed una coppia di poli complessi coniugati con i seguenti valori per lo smorzamento e la pulsazione naturale

$$\xi = 0.5 \quad \omega_n = 10$$

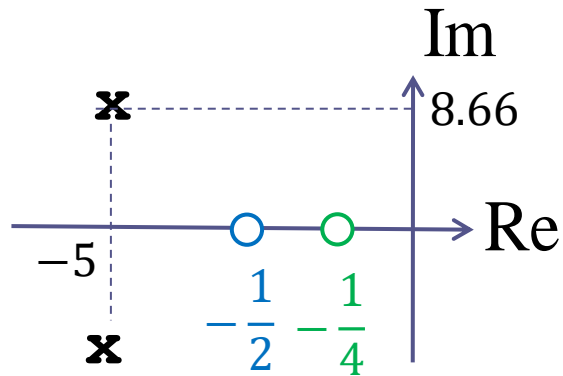
Le parti reale e immaginaria della coppia di poli CC sono

$$a = -\xi\omega_n = -5$$

$$b = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 8.66$$

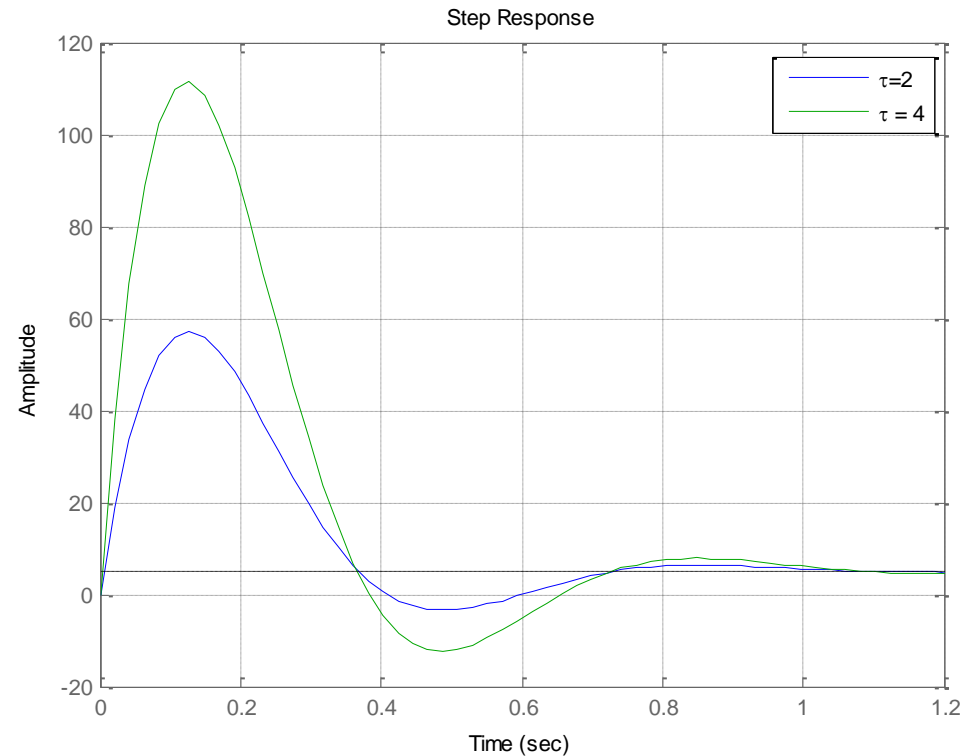


B. Zero reale negativo la cui parte reale è più in bassa frequenza rispetto alla coppia di poli CC



Stesso guadagno statico (5) e stessa coppia di poli CC del precedente esempio.

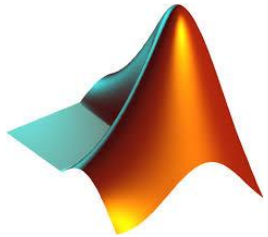
Consideriamo due distinte collocazioni per lo zero in bassa frequenza



$$F(s) = \frac{500(1 + 2s)}{s^2 + 10s + 100} \quad F(s) = \frac{500(1 + 4s)}{s^2 + 10s + 100}$$

Lo zero più vicino all'origine induce una sovraelongazione maggiore, e ben più grande di quella (pari al massimo al 100%) del sistema avente solo i due poli CC

Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente

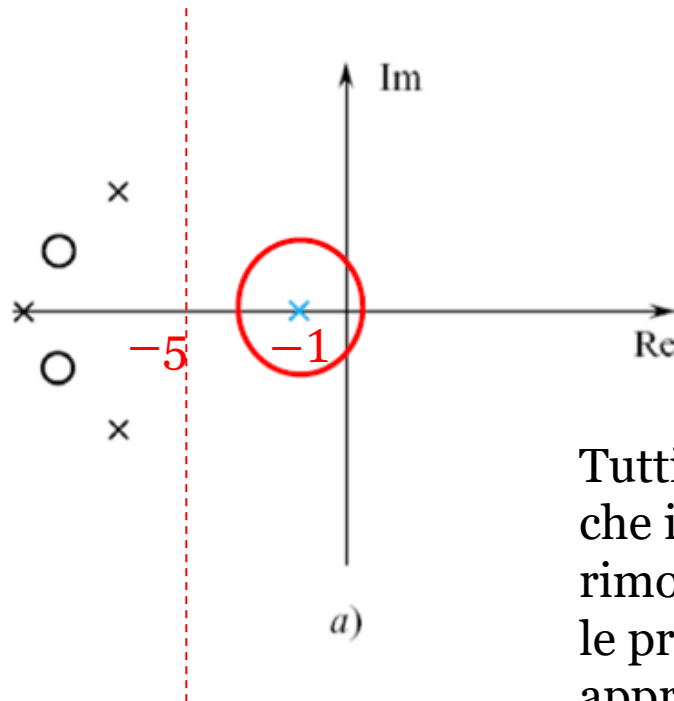


```
close all
clear all
tau=2;
xi=0.5;
omegan=10;
mu=5;
F1=tf(mu*omegan^2*[tau 1],[1 2*xi*omegan omegan^2]);
tau=4;
F2=tf(mu*omegan^2*[tau 1],[1 2*xi*omegan omegan^2]);
step(F1,F2),grid
legend('\tau=2','\tau = 4')
```

Poli dominanti in presenza di poli complessi coniugati

In presenza di poli complessi coniugati, per determinare se tale coppia di poli sia dominante, o possa essere trascurata, **si deve fare riferimento alla loro parte reale** (o, in altri termini, alla loro costante di tempo equivalente) e successivamente applicare analoghe considerazioni rispetto a quelle viste nel caso dei poli reali.

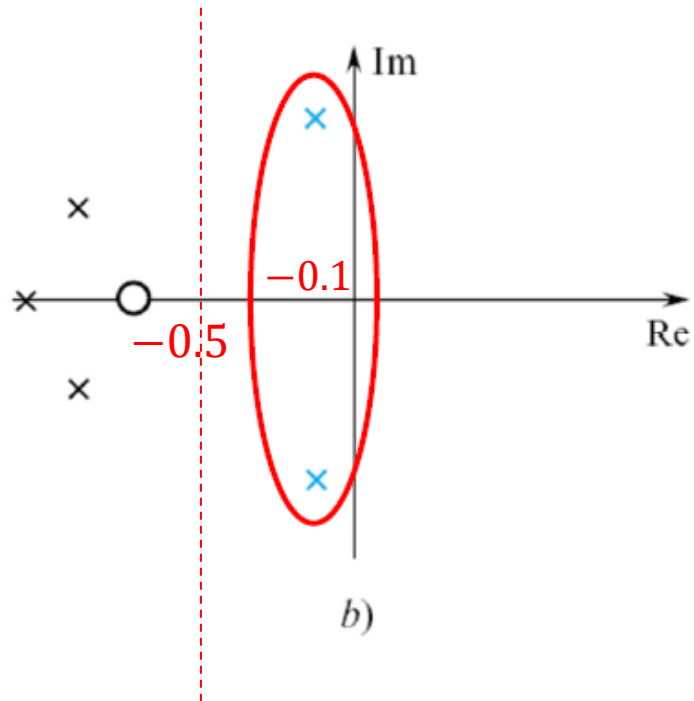
«RETTA LIMITE»



Il polo reale in -1 risulta essere dominante.

Tutti i poli e gli zeri alla sinistra della «retta limite» che interseca l'asse reale in -5 possono essere rimossi dalla FdT senza che la risposta al gradino e le principali caratteristiche dinamiche risultino apprezzabilmente modificate

RETTA LIMITE



La coppia di poli CC avente parte reale -0.1 risulta essere dominante.

Tutti i poli e gli zeri alla sinistra della «retta limite» che interseca l'asse reale in -0.5 possono essere rimossi dalla FdT senza che le caratteristiche dinamiche principali della risposta al gradino risultino apprezzabilmente modificate

ESEMPIO

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(0.002s^2 + 0.02s + 1)(s^2 + 0.1s + 1)} \quad \mu = G(0) = 1$$


 Polo reale negativo in -10

Analisi del termine $0.002s^2 + 0.02s + 1 = 0.002(s^2 + 10s + 500)$

Poiché il Δ dell'equazione di secondo grado $s^2 + 10s + 500$ è negativo, la coppia di radici è complessa coniugata

Imponiamo l'uguaglianza membro a membro del polinomio $s^2 + 10s + 500$ con la forma generale $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ del termine trinomio

da cui si desume

$$\begin{array}{l} \omega_n^2 = 500 \\ 2\xi\omega_n = 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{500} = 22.36 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \xi = \frac{5}{\omega_n} = 0.22 \end{array}$$

Parte reale: $a = -\xi\omega_n = -5$

Parte immaginaria: $b = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 21.8$

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(0.002s^2 + 0.02s + 1)(s^2 + 0.1s + 1)}$$

Polo reale negativo in -10

Analisi del termine $s^2 + 0.1s + 1$

Calcoliamo le radici con la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado

$$\frac{-0.1 \pm \sqrt{0.01 - 4}}{2} = \frac{-0.1 \pm j\sqrt{3.99}}{2} = -0.05 \pm j0.99$$

$$a = -0.05$$

$$b = \pm 0.99$$

Determiniamo la pulsazione naturale e lo smorzamento

$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2} = 0.99$$

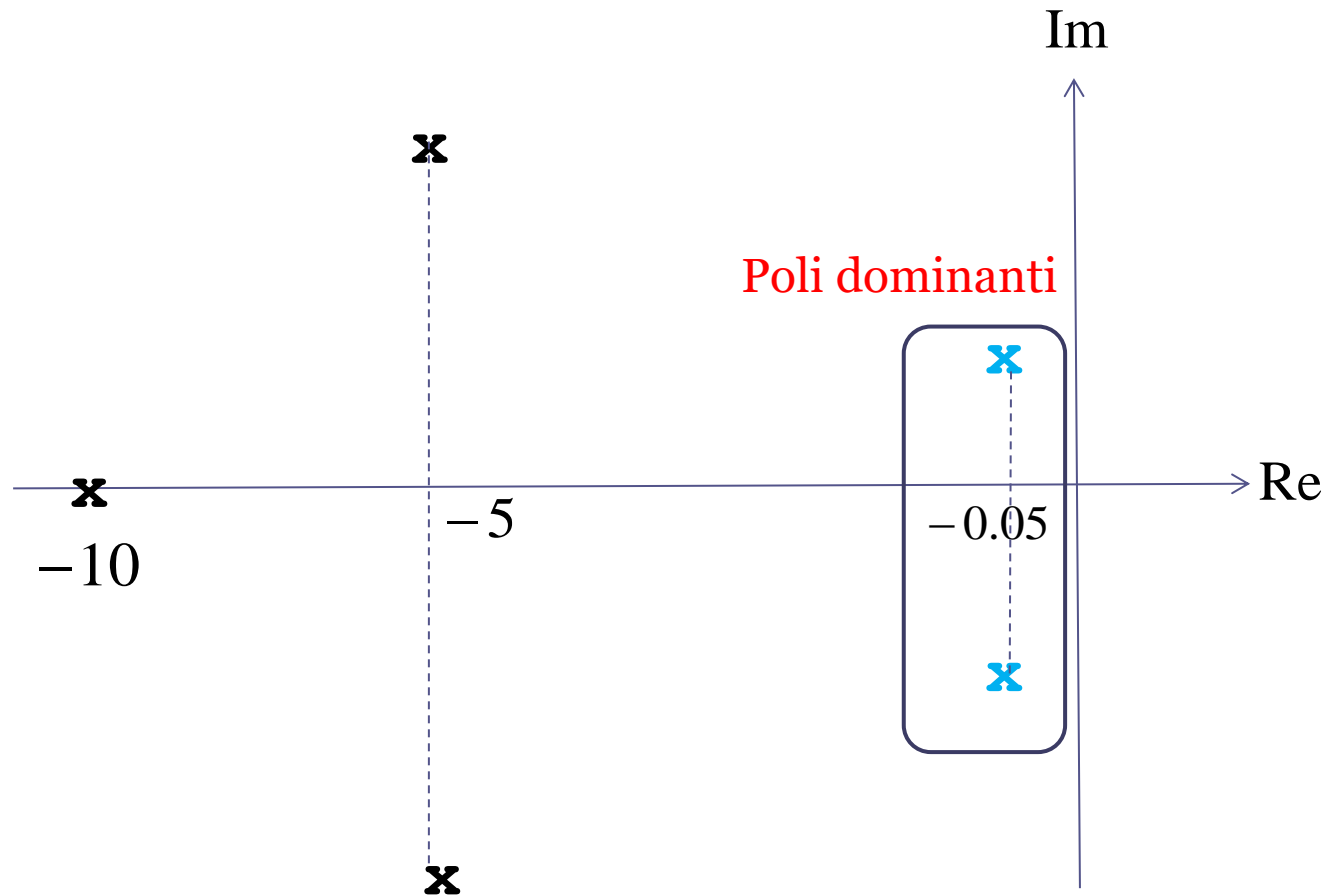
$$\xi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.05$$

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(0.002s^2 + 0.02s + 1)(s^2 + 0.1s + 1)}$$

-10

$-5 \pm j21.8$

$-0.05 \pm j0.99$



$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(0.002s^2 + 0.02s + 1)(s^2 + 0.1s + 1)}$$

$$\mu = G(0) = 1$$

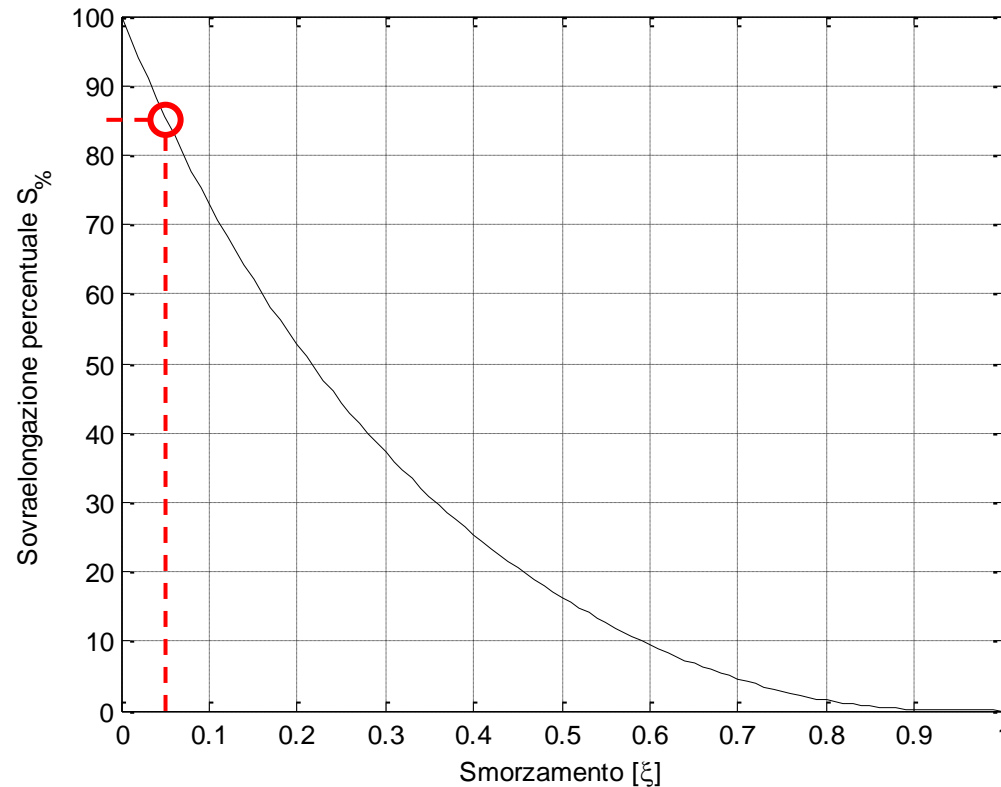
$$G_{appr}(s) = \frac{1}{s^2 + 0.1s + 1}$$

$$\omega_n = 0.99$$

$$\xi = 0.05$$



$$S_{\%} \approx 85$$



$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(0.002s^2 + 0.02s + 1)(s^2 + 0.1s + 1)} \quad \mu = G(0) = 1$$

$$G_{appr}(s) = \frac{1}{s^2 + 0.1s + 1} \quad \omega_n = 0.99$$

$$\xi = 0.05$$

$$S_{\%} \approx 85$$

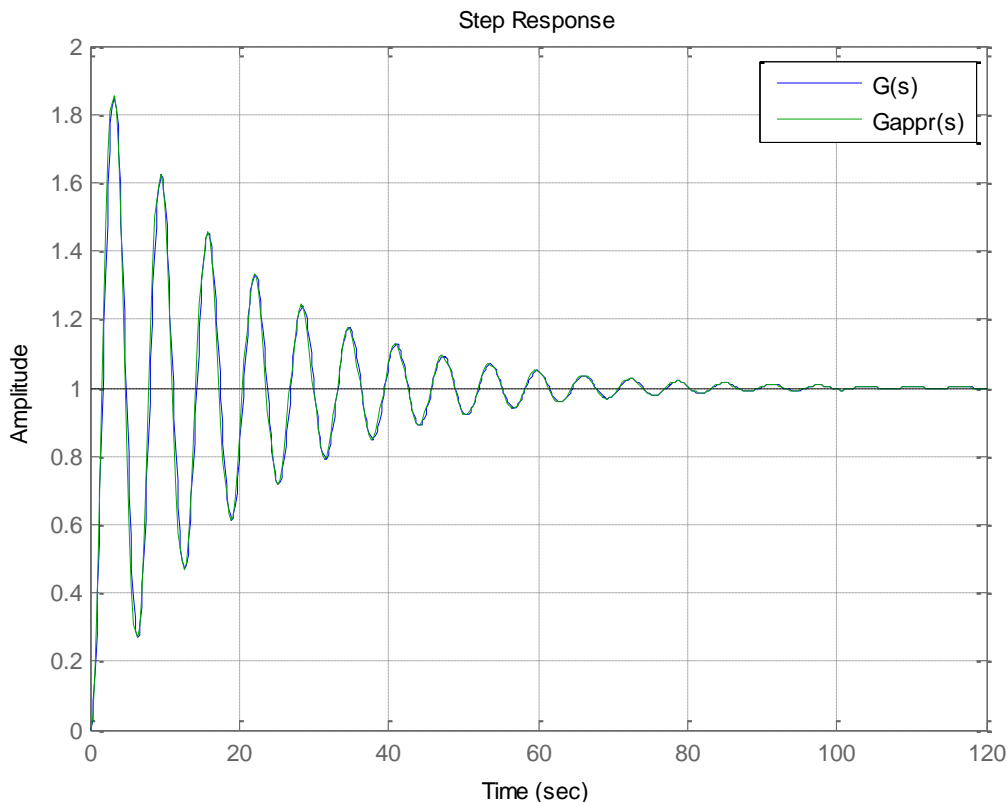
$$y_{max} = \mu \left(1 + \frac{S_{\%}}{100} \right) = 1.85$$

$$T_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n} = 20s$$

$$T_{a1\%} \approx 5T_{eq} = 100s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 6.3 s$$

$$t_{max} = \frac{T}{2} = 3.15s$$



```
denG=conv([0.1 1],[.002 .02 1]);
denG=conv(denG,[1 0.1 1]);
G=tf(1,denG);
Gappr=tf(1,[1 0.1 1]);
step(G,Gappr),grid
legend('G(s)','Gappr(s)')
```

ESERCIZIO

Un servomeccanismo elettrico in corrente continua è descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita sotto forma di equazione differenziale

$$\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\theta}(t) = 4V(t)$$

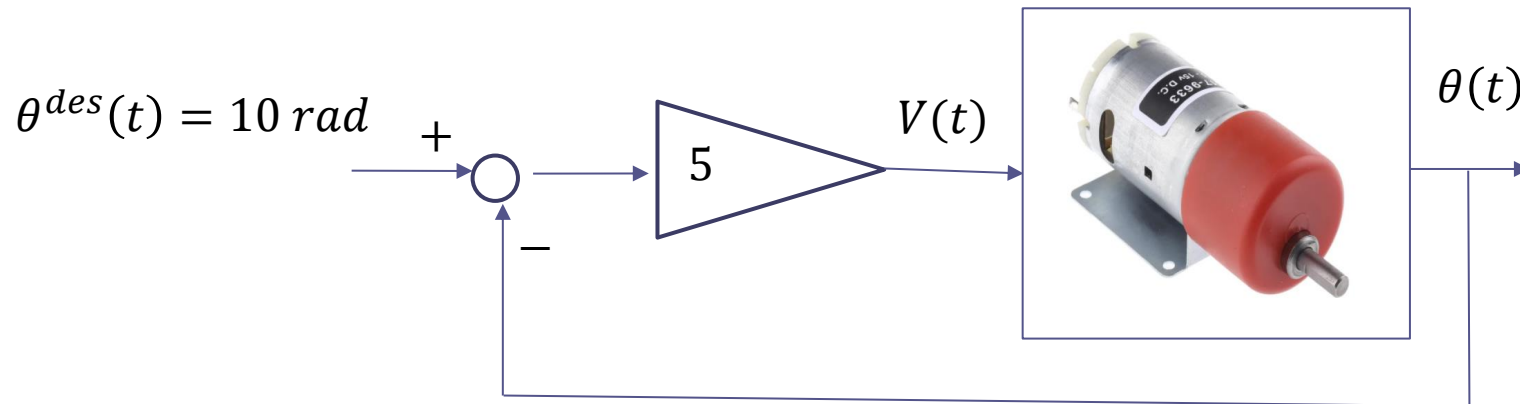


in cui $\theta(t)$ denota la posizione angolare dell'albero del motore (espressa in radianti), e $V(t)$ la tensione di alimentazione (espressa in Volt).

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta a ciclo chiuso con un set point costante $\theta^{\text{des}}(t)=10$ rad nel caso si impieghi un regolatore proporzionale con guadagno $k=5$.

Per il processo a ciclo chiuso, si scriva la relazione ingresso-uscita sotto forma di equazione differenziale (ingresso: $\theta^{\text{des}}(t)$, uscita: $\theta(t)$).

TRACCIA SOLUZIONE



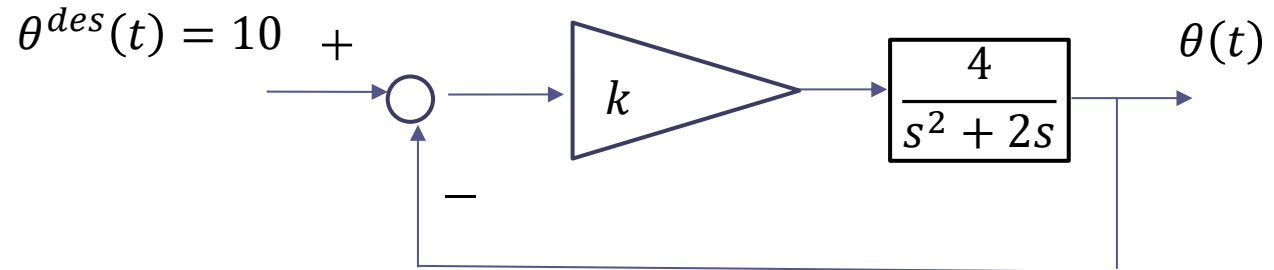
Deduciamo la FdT del servomotore partendo dalla relazione ingresso-uscita

$$\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\theta}(t) = 4V(t) \quad \longrightarrow \quad G_V^\theta(s) = \frac{4}{s^2 + 2s}$$

FdT fra la tensione applicata e la posizione angolare dell'albero

TRACCIA SOLUZIONE

$$G_v^\theta(s) = \frac{4}{s^2 + 2s}$$



$$G_{\theta^{des}}^\theta(s) = \frac{k \cdot \frac{4}{s^2 + 2s}}{1 + k \cdot \frac{4}{s^2 + 2s}} = \frac{4k}{s^2 + 2s + 4k}$$

Sistema di controllo sempre as. stabile a ciclo chiuso per qualunque valore positivo di k (regola di Cartesio)

Il guadagno statico della FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita è pari ad 1 (indipendentemente dal valore attribuito al guadagno k del controllore). Ciò significa che applicando un set point costante la posizione angolare tende asintoticamente al valore del set point.

$$k = 5 \quad G_{\theta^{des}}^\theta(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 20}$$

Equazione differenziale che mette in relazione il set point e la posizione angolare del motore

$$\ddot{\theta}(t) + 2 \dot{\theta}(t) + 20 \theta(t) = 20 \theta^{des}(t)$$

TRACCIA SOLUZIONE

Calcolo dei parametri caratteristici della risposta al gradino di ampiezza **10**

$$G_{\theta^{des}}(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 20}$$

$$\mu = 1$$

$$P_{car}(s) = s^2 + 2s + 20$$

$$\omega_n^2 = 20$$

$$\omega_n = \sqrt{20} \cong 4.47 \text{ rad/s}$$

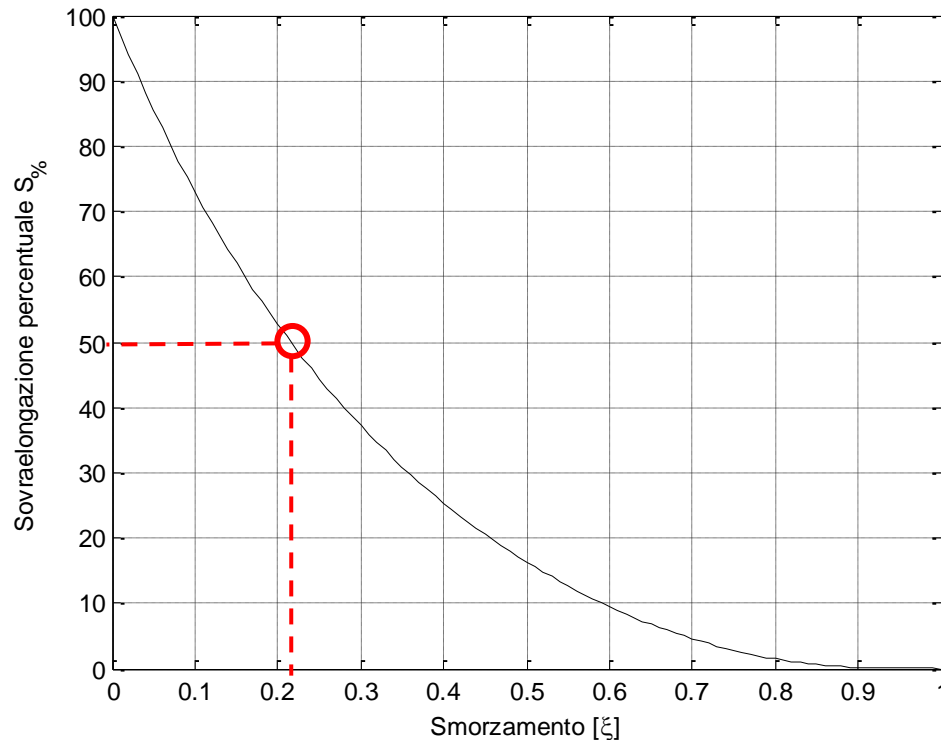
$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n} = 1 \text{ s}$$

$$2\xi \omega_n = 2$$

$$\xi = \frac{1}{\omega_n} \cong 0.22$$

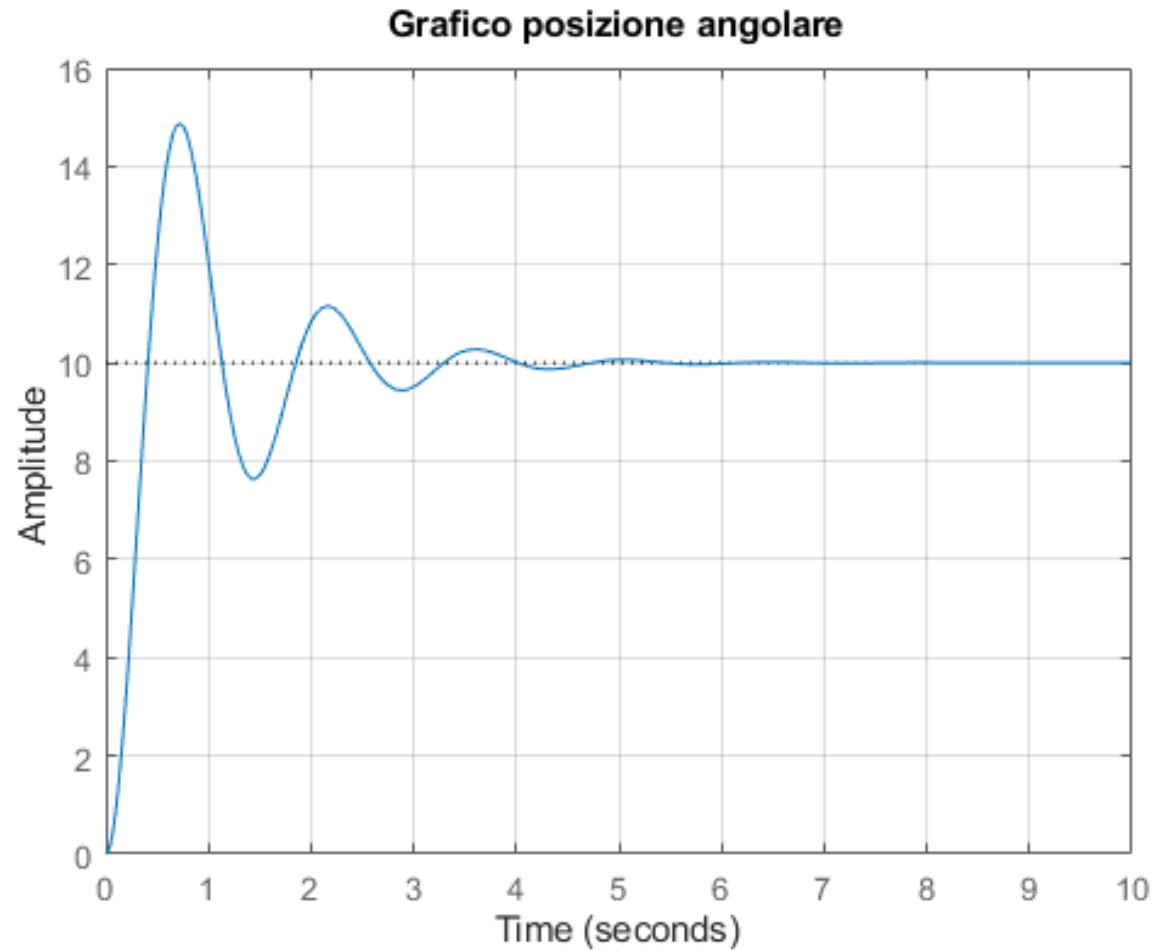
$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \cong 1.4 \text{ s}$$

Periodo della
oscillazione



$$S_{\%} \approx 50$$

$$y_{max} = 10 \cdot \mu \left(1 + \frac{S_{\%}}{100} \right) = 15$$



```
s=tf('s');
G=20/(s^2+2*s+20);
step(10*G,0:0.01:10),grid
ylim([0 16])
title('Grafico posizione angolare')
```