Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Fisica

Analisi Matematica II

prof. Antonio Greco

Terza parte

Anno accademico 2024/25

LU 04 NOV 2024

DERIVATE DIREZIONALI

CONSIDERIAMO UNA $f: \Omega \to \mathbb{R}$ CON $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ED UN PUNTO (x_0, y_0) INTERNO AD Ω. LE RETTE PASSANTI PER (x_0, y_0) SI POSSONO RAPPRESENTARE COSÌ:

$$\begin{cases} x = x_0 + h e_x \\ y = y_0 + h e_y \end{cases} \quad \text{DOVE } h \in \mathbb{R} \text{ ED } \hat{e} = (e_x, e_y)$$

È IL VERSORE DIRETTORE. SE ESISTE FINITO IL LIMITE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h e_x,\ y_0 + h e_y) - f(x_0, y_0)}{h}$$

LA f SI DICE DERIVABILE NELLA DIREZIONE DI $\hat{e}$ NEL PUNTO (x_0, y_0), ED IL VALORE DEL LIMITE SI DENOTA CON $\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}(x_0, y_0)$.

CHE SUCCEDE SE PONIAMO $\hat{e} = \hat{\imath}$ VERSORE DELL'ASSE x? LA RETTA DI CUI SOPRA DIVENTA

$$\begin{cases} x = x_0 + h \\ y = y_0 \end{cases}$$

QUINDI LA DERIVATA $\frac{\partial f}{\partial \hat{\imath}}(x_0, y_0)$ È IL LIMITE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

SE ESISTE FINITO. DUNQUE

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\imath}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

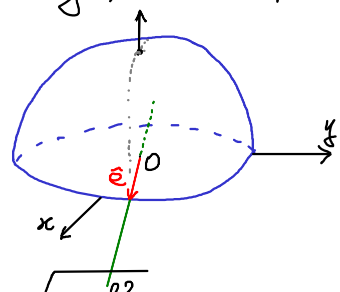
SIMILMENTE SI TROVA

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\jmath}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

ESEMPIO: $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\Omega = \overline{B}_1(0,0)$

$(x_0, y_0) = (0,0)$.

$$\begin{cases} x = h e_x \\ y = h e_y \end{cases}$$



$$\frac{f(h e_x, h e_y) - f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{1 - h^2} - 1}{h} \longrightarrow 0$$

ESERCIZIO: DETERMINARE $\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}(x_0, y_0)$ CON $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ E $0 < x_0^2 + y_0^2 < 1$.

ESEMPIO: CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f(x,y)$ DATA DA

$$f(x,y) = \begin{cases} x e^{\frac{y}{x}}, & \text{SE } x \neq 0 \\ 0, & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

$(e_x \neq 0)$

E PONIAMO $(x_0, y_0) = (0,0)$. FISSATO $\hat{e} \neq \pm \hat{\jmath}$ CALCOLIAMO $\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}(0,0)$. SI HA CHE

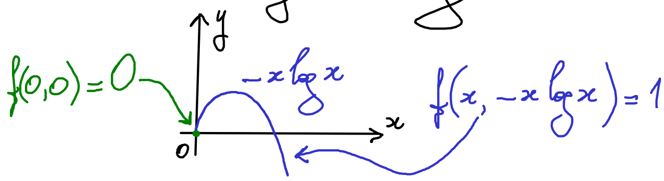
$$\frac{f(h e_x, h e_y) - f(0,0)}{h} = \frac{h e_x e^{\frac{e_y}{e_x}}}{h}$$

$$= e_x e^{\frac{e_y}{e_x}} \xrightarrow[h \to 0]{} e_x e^{\frac{e_y}{e_x}}$$

DUNQUE

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}(0,0) = \begin{cases} e_x e^{\frac{e_y}{e_x}}, & \text{SE } e_x \neq 0 \\ 0, & \text{SE } e_x = 0 \end{cases}$$

VERIFICHIAMO CHE f È DISCONTINUA IN $(0,0)$ STUDIANDO LA LINEA DI LIVELLO $f(x,y) = 1$, CIOÈ $x e^{\frac{y}{x}} = 1$. SI AVRÀ $x > 0$ E $y = -x \log x$.



LU 04 NOV 2024

FORMULA DEL GRADIENTE

LA DERIVATA $\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}$ SI TROVA DALLE DERIVATE PARZIALI TRAMITE LA FORMULA DEL GRADIENTE:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}(x_0,y_0) = e_x\, f_x(x_0,y_0) + e_y\, f_y(x_0,y_0)$$

CHE SI PUÒ ANCHE SCRIVERE

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}(x_0,y_0) = \hat{e} \cdot \nabla f(x_0,y_0), \quad \text{ESSENDO}$$

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0) \right).$$

AFFINCHÈ VALGA LA FORMULA È SUFFICIENTE CHE f SIA DIFFERENZIABILE NEL PUNTO (x_0,y_0),

CIOÈ CHE $f(x,y) - f(x_0,y_0) =$

$$= f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$ OVVERO CHE

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

IN TAL CASO, SI DEFINISCE IL DIFFERENZIALE $df(x_0,y_0)$ COME L'APPLICAZIONE LINEARE L CHE AL VETTORE $v=(v_x, v_y)$ ASSOCIA IL NUMERO $f_x(x_0,y_0)\, v_x + f_y(x_0,y_0)\, v_y$,

E LA DIFFERENZIABILITÀ È ESPRESSA DA

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-L(x-x_0,\ y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

ESERCIZIO: LE APPLICAZIONI LINEARI SONO DIFFERENZIABILI, E COINCIDONO IN $(0,0)$ CON IL PROPRIO DIFFERENZIALE.

MA 05 NOV 2024

ESEMPIO: $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $\Omega = \overline{B}_1(0,0)$

$(x_0,y_0) = (0,0)$. SI TROVA $f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

E $f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ PER $x^2+y^2<1$ E QUINDI

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. RICAVIAMO $Lv = 0$

PER OGNI $v \in \mathbb{R}^2$ E QUINDI

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-L(x-x_0,\ y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ CONVIENE PORRE $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ E DIVENTA $\frac{\sqrt{1-\rho^2}-1}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$

QUINDI f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

ESEMPI DI FUNZIONI NON DIFFERENZIABILI

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (10/10) NON È DERIVABILE IN $(0,0)$ QUINDI NON È DIFFERENZIABILE.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

È DERIVABILE PARZIALMENTE IN $(0,0)$ MA NON È DIFFERENZIABILE

$$f(x,y) = \begin{cases} x\, e^{\frac{y}{x}}, & \text{SE } x\neq 0 \\ 0, & \text{SE } x=0 \end{cases}$$ AMMETTE

TUTTE LE DERIVATE DIREZIONALI IN $(0,0)$ MA NON È DIFFERENZIABILE.

MA 05 NOV 2024

LA DIFFERENZIABILITÀ IMPLICA LA CONTINUITÀ

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO CHE $f(x,y)$ SIA DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0). PER VEDERE CHE È CONTINUA, CALCOLIAMO $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

SAPPIAMO CHE $f(x,y) = f(x_0,y_0) +$

$$+ f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+ o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$ E QUINDI TROVIAMO

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$ C.V.D.

LA DIFFERENZIABILITÀ IMPLICA LA FORMULA DEL GRADIENTE

AMMETTIAMO CHE $f(x,y)$ SIA DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO (x_0,y_0). PRENDIAMO $\hat{e} = (e_x, e_y)$

E STUDIAMO $\dfrac{f(x_0+he_x,\ y_0+he_y) - f(x_0,y_0)}{h}$.

PER IPOTESI SI HA CHE

$$f(x_0+he_x,\ y_0+he_y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= f_x(x_0,y_0)\cdot he_x + f_y(x_0,y_0)\cdot he_y + o(h)$$

QUINDI $\dfrac{f(x_0+he_x,\ y_0+he_y) - f(x_0,y_0)}{h} =$

$$= f_x(x_0,y_0)\cdot e_x + f_y(x_0,y_0)\cdot e_y + \frac{o(h)}{h}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} f_x(x_0,y_0)\cdot e_x + f_y(x_0,y_0)\cdot e_y$$

SE INVECE DELLA RETTA $\begin{cases} x = x_0 + he_x \\ y = y_0 + he_y \end{cases}$ PRENDIAMO

$\begin{cases} x = x(h) \\ y = y(h) \end{cases}$ CON $x(h), y(h)$ DERIVABILI IN $h=0$

E TALI CHE $x(0) = x_0$ E $y(0) = y_0$ SI TROVA CHE

SE $f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0) LA FUNZIONE COMPOSTA $f(x(h),\ y(h))$ È DERIVABILE IN $h=0$

E $\dfrac{d}{dh} f(x(h),\ y(h))\Big|_{h=0} =$

$$= f_x(x_0,y_0)\cdot x'(0) + f_y(x_0,y_0)\cdot y'(0)$$

$$= \gamma'(0)\cdot\nabla f(x_0,y_0)$$ ESSENDO $\gamma(h) = (x(h), y(h))$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA.

NOTA: SE $x(h) = x_0 + he_x$ E $y(h) = y_0 + he_y$

ALLORA $x'(0) = e_x$, $y'(0) = e_y$ E QUINDI

$$\frac{d}{dh} f(x_0+he_x,\ y_0+he_y)\Big|_{h=0} =$$

$$= f_x(x_0,y_0)\cdot e_x + f_y(x_0,y_0)\cdot e_y.$$

IL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO (x_0,y_0)

SE f È DIFFERENZIABILE, IL PIANO TANGENTE HA EQUAZIONE

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

E LA DIFFERENZIABILITÀ CONSISTE NEL FATTO CHE

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$+ o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

MA 05 NOV 2024

COME VEDO RAPIDAMENTE CHE UNA DATA $f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE ?

SE $f_x(x,y)$ E $f_y(x,y)$ ESISTONO IN UN INTORNO DI (x_0,y_0), E SONO CONTINUE IN (x_0,y_0), ALLORA f È DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0).

ESEMPIO: SE $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ SI TROVA

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

PER $x^2+y^2<1$. TRATTANDOSI DI FUNZIONI CONTINUE, LA f È DIFFERENZIABILE IN $B_1(0,0)$.

PIANO TANGENTE IN $(x_0,y_0)\in B_1(0,0)$:

$$z=\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}-\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}\cdot(x-x_0)-\frac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}\cdot(y-y_0)$$

SE $(x_0,y_0)=(0,0)$ SI RIDUCE A $z=1$.

E SE $(x_0,y_0)=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ COSA SI OTTIENE ?

GI 07 NOV 2024

OTTIMIZZAZIONE

MASSIMI E MINIMI SI DEFINISCONO COME IL 3/10.

STUDIAMO IL LEGAME CON LE DERIVATE PARZIALI.

TEOREMA: SE Q È UN PUNTO DI MASSIMO INTERNO AL DOMINIO DI UNA FUNZIONE $f(x,y)$ E SE ESISTE $\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}(x_Q,y_Q)$ ALLORA

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}(x_Q,y_Q)=0.$$

COROLLARIO: SE $f(x,y)$ È DERIVABILE PARZIALMENTE IN UN PUNTO DI MASSIMO Q INTERNO AL DOMINIO, ALLORA $\nabla f(x_Q,y_Q)=0$.

~~EQUIVOCO: DICESI PUNTO DI MASSIMO UN PUNTO~~ ~~Q TALE CHE $\nabla f(x_Q,y_Q)=0$.~~

DEFINIZIONE: I PUNTI (x,y) NEI QUALI f È DIFFERENZIABILE E SODDISFA $\nabla f(x_Q,y_Q)=0$ SI DICONO PUNTI CRITICI.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: VOGLIO VERIFICARE CHE $\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}(x_Q,y_Q)=0$ SAPENDO CHE $\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}$ ESISTE, CIOÈ CHE ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_Q+he_x,y_Q+he_y)-f(x_Q,y_Q)}{h},$$

DUNQUE SAPENDO CHE I LIMITI DESTRO E SINISTRO SONO UGUALI. PER $h>0$ SI HA

$$f(x_Q+he_x,y_Q+he_y)-f(x_Q,y_Q)\leq 0$$

E QUINDI

$$\frac{f(x_Q+he_x,y_Q+he_y)-f(x_Q,y_Q)}{h}\leq 0$$

INVECE PER $h<0$ SI TROVA

$$\frac{f(x_Q+he_x, y_Q+he_y)-f(x_Q,y_Q)}{h} \geq 0$$

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO SI HA

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_Q+he_x, y_Q+he_y)-f(x_Q,y_Q)}{h} \leq 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_Q+he_x, y_Q+he_y)-f(x_Q,y_Q)}{h} \geq 0$$

E SICCOME I DUE LIMITI SONO UGUALI PER IPOTESI, VUOL DIRE CHE HANNO IL VALORE NULLO.

NOTA BENE: IL TEOREMA VALE ANCHE PER I PUNTI DI MINIMO.

ESEMPIO: IL PUNTO $P=(1,0)$ È UN PUNTO DI MINIMO PER $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(3/10)$.

QUALI SONO I PUNTI CRITICI? SAPPIAMO CHE

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad E \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

PER $(x,y)\in B_1(0,0)$, QUINDI L'UNICO PUNTO CRITICO È $(x_Q, y_Q)=(0,0)$.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA: SE (x_0,y_0) È UN PUNTO CRITICO DI f, ALLORA IL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f IN TALE PUNTO HA EQUAZIONE $z=f(x_0,y_0)$ (È ORIZZONTALE!)

ESERCIZIO: TROVARE GLI EVENTUALI PUNTI DI MASSIMO, MINIMO E/O CRITICI DELLE FUNZIONI $f(x,y)=xy$, $f(x,y)=x^2+y^2$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

GI 07 NOV 2024

DERIVATE SECONDE

DEFINIZIONE: SE ESISTE $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ IN UN INTORNO DI UN PUNTO INTERNO (x_0,y_0), E SE TALE FUNZIONE È DERIVABILE PARZIALMENTE IN (x_0,y_0) RESTANO DEFINITE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ E $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ CHE SI POSSONO ANCHE INDICARE CON f_{xx} f_{yx}.

ANALOGAMENTE, SE ESISTE $\frac{\partial f}{\partial y}$ IN UN INTORNO DI (x_0,y_0), E RISULTA DERIVABILE IN (x_0,y_0), RESTANO DEFINITE $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ E $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$.

IL DIFFERENZIALE SECONDO

SUPPONIAMO CHE f SIA DIFFERENZIABILE IN UN INTORNO DI UN PUNTO (x_0,y_0) INTERNO AL DOMINIO. QUINDI ESISTONO f_x, f_y IN TALE INTORNO. SE SONO DIFFERENZIABILI IN (x_0,y_0) SI DICE CHE f È DUE VOLTE DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0) E SI DEFINISCE IL DIFFERENZIALE SECONDO $d^2f(x_0,y_0)$ COME IL POLINOMIO OMOGENEO DI SECONDO GRADO NELLE INDETERMINATE V_x, V_y DATO DA

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} V_x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} V_x V_y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} V_y^2$$

NOTA: LA DIFFERENZIABILITÀ SECONDA IMPLICA $f_{xy}=f_{yx}$

GI 07 NOV 2024

ESEMPIO: $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad \text{E} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{x^2}{\left(1-x^2-y^2\right)^{3/2}}\right)=$$

$$=-\frac{1-y^2}{\left(1-x^2-y^2\right)^{3/2}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{x^2-1}{\left(1-x^2-y^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{-xy}{\left(1-x^2-y^2\right)^{3/2}}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

NEL PUNTO $(x_0,y_0)=(0,0)$ SI TROVA:

$$f_{xx}(0,0)=-1=f_{yy}(0,0), \quad f_{xy}(0,0)=$$

$=f_{yx}(0,0)=0$ QUINDI IL DIFFERENZIALE SECONDO È $d^2f(0,0):(v_x,v_y)\longmapsto -v_x^2-v_y^2$

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $\sqrt{1-x^2-y^2}=$

$$=1+\frac{1}{2}d^2f(0,0)(x,y)+o(x^2+y^2)=$$

$=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)$ CIOÈ CHE

$$\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}-1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

OVVERO $$\frac{\sqrt{1-\rho^2}-1}{\rho^2}\xrightarrow[\rho\to 0]{}-\frac{1}{2}$$

O ANCHE $$\frac{\sqrt{1-h}-1}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}-\frac{1}{2}.$$

MA 12 NOV 2024

$$\boxed{\text{FORMULA DI TAYLOR AL SECONDO ORDINE CON IL RESTO DI PEANO}}$$

IN GENERALE, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE $f:\Omega\to\mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE DUE VOLTE IN UN PUNTO (x_0,y_0) INTERNO AD Ω, ALLORA

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+$$
$$+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)+$$
$$+o\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)$$

NOTA: IL DIFFERENZIALE SECONDO SI SCRIVE IN FORMA MATRICIALE

$$d^2f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)=$$

$$=(x-x_0,y-y_0)\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$

DOVE LA MATRICE $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ SI DICE MATRICE HESSIANA DI f

MA 12 NOV 2024

CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ UN PUNTO CRITICO (x_0, y_0) DI f SIA PUNTO DI MINIMO

SE f È DIFFERENZIABILE DUE VOLTE IN (x_0, y_0) E SE LA MATRICE HESSIANA $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ È IVI DEFINITA POSITIVA, ALLORA (x_0, y_0) È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO. SE $H(x_0, y_0)$ È DEFINITA NEGATIVA, (x_0, y_0) È UN MASSIMO RELATIVO.

NOTA: UNA MATRICE H (simmetrica) È DEFINITA POSITIVA SE E SOLO SE PER OGNI $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ RISULTA $vHv^T > 0$. EQUIVALENTEMENTE, SE I SUOI AUTOVALORI $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ SONO POSITIVI. ESISTE UN CAMBIAMENTO DI COORDINATE (UNA ROTAZIONE) $v \longmapsto w$, $v = Aw$, $A \in SO(n)$, TALE CHE

$$vHv^T = w \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} w^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2$$

SE H È DEFINITA POSITIVA, RISULTA

$$vHv^T \geq \lambda_1 \|w\|^2 > 0 \text{ PER OGNI } w \neq 0.$$

DIMOSTRAZIONE DELL'ASSERTO. SAPPIAMO DALLA FORMULA DI TAYLOR CHE

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{1}{2} d^2 f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \longrightarrow 0$$

QUINDI

$$\frac{\left|f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{1}{2} d^2 f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)\right|}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon$$

IN UNA $B_\delta(x_0, y_0)$ QUINDI IN TALE PALLA

$$\left|f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{1}{2} d^2 f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)\right| <$$

$$< \varepsilon (x-x_0)^2 + \varepsilon (y-y_0)^2,$$ DA CUI

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{1}{2} d^2 f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) >$$

$$> -\varepsilon (x-x_0)^2 - \varepsilon (y-y_0)^2$$ E INFINE

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &> \frac{1}{2} d^2 f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) \\ &\quad - \varepsilon\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\lambda_1 \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right) \\ &\quad - \varepsilon\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\lambda_1 - \varepsilon\right)\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

PER $(x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$ SCEGLIENDO $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\lambda_1\right)$.

COME STABILIRE SE UNA MATRICE SIMMETRICA 2×2 È DEFINITA POSITIVA.

1) IL DETERMINANTE È INVARIANTE PER ROTAZIONI: SE LA MATRICE DATA H DIVENTA $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ALLORA $\det H = \lambda_1 \lambda_2$

2. SE $\det H > 0$ ALLORA GLI AUTOVALORI SONO CONCORDI, DUNQUE SI AVRÀ $vHv^T > 0$ PER OGNI $v \neq 0$, OPPURE $vHv^T < 0$.

3. SE $f_{xx} > 0$ o $f_{yy} > 0$ SIAMO NEL PRIMO CASO, ALTRIMENTI SIAMO NEL SECONDO.

GI 14 NOV 2024

RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLE CURVE

UNA CURVA PIANA SI RAPPRESENTA PARAMETRICAMENTE NELLA FORMA $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ CON $t \in I$ (INTERVALLO) E LE FUNZIONI $x(t)$, $y(t)$ SONO CONTINUE. SI POSSONO OTTENERE CURVE PATOLOGICHE COME LA CURVA DI PEANO:

[redacted]

SI DEFINISCONO REGOLARI LE CURVE $\bar{z} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ LE CUI COMPONENTI $x_1(t), \dots, x_n(t)$ SONO DI CLASSE $C^1([a,b])$ E INOLTRE LA DERIVATA $\bar{z}'(t) = \underbrace{(x_1'(t), \dots, x_2'(t))}_{\bar{z}'(t) \text{ VELOCITÀ DELLA CURVA}} \neq 0$ PER OGNI $t \in [a,b]$.

ESEMPIO: DA $\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \end{cases}$ SI RICAVA $\bar{z}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (v_x, v_y)$ QUINDI LA CURVA È REGOLARE (ED È UNA RETTA) SE E SOLO SE $\bar{v} = (v_x, v_y) \neq 0$.

ESEMPIO: SE $\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\text{sen}\, t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

TROVIAMO $\bar{z}'(t) = -R\hat{\imath}\,\text{sen}\, t + R\hat{\jmath}\cos t$

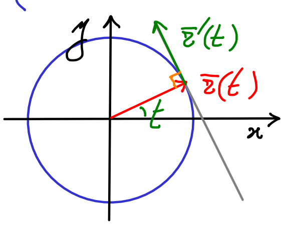
DA CUI $\|\bar{z}'(t)\| = R > 0$, QUINDI LA CURVA È REGOLARE (È UNA CIRCONFERENZA).

OSSERVAZIONE: $\bar{z}(t) \cdot \bar{z}'(t) =$

$= (R\hat{\imath}\cos t + R\hat{\jmath}\,\text{sen}\, t) \cdot (-R\hat{\imath}\,\text{sen}\, t + R\hat{\jmath}\cos t)$

$= R^2(\hat{\imath}\cos t + \hat{\jmath}\,\text{sen}\, t) \cdot (-\hat{\imath}\,\text{sen}\, t + \hat{\jmath}\cos t)$

$= R^2(-\cos t\,\text{sen}\, t + \text{sen}\, t \cos t) = 0$



RETTA TANGENTE: SE HO UNA CURVA REGOLARE $\bar{z}(t)$ POSSO SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE NEL PUNTO $\bar{z}(t_0)$, $t \in (a,b)$:

$$\begin{cases} x = x(t_0) + h\, x'(t_0) \\ y = y(t_0) + h\, y'(t_0) \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R}$$

IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $y = f(x)$ SI PUÒ RAPPRESENTARE IN FORMA PARAMETRICA:

$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ E LA VELOCITÀ È $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = f'(t) \end{cases}$

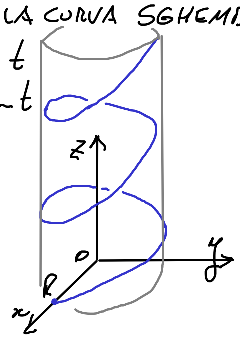
QUINDI OTTENIAMO UNA CURVA REGOLARE A CONDIZIONE CHE $f \in C^1([a,b])$.

ESEMPIO: LA SINUSOIDE, GRAFICO DI $y = \text{sen}\, x$, È LA CURVA DI EQUAZIONI PARAMETRICHE

$\begin{cases} x = t \\ y = \text{sen}\, t \end{cases}$ CON VELOCITÀ $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = \cos t \end{cases}$

ESEMPIO: L'ELICA CILINDRICA È LA CURVA SGHEMBA DI EQUAZIONI $\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\text{sen}\, t \\ z(t) = m t \end{cases}$

CON $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



UNA CURVA $\bar{z} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ SI DICE CURVA CHIUSA SE $\bar{z}(a) = \bar{z}(b)$, SI DICE CURVA SEMPLICE SE NON HA AUTOINTERSEZIONI, CIOÈ SE RISULTA $\bar{z}(t_1) \neq \bar{z}(t_2)$ PER OGNI $t_1, t_2 \in (a,b)$ CON $t_1 \neq t_2$ E INOLTRE $\bar{z}(a) \neq \bar{z}(t)$ E $\bar{z}(t) \neq \bar{z}(b)$ PER OGNI $t \in (a,b)$.

GI 14 NOV 2024

ASCISSA CURVILINEA: DATA $\bar{\gamma}(t)$ CURVA REGOLARE, SI DEFINISCE L'ASCISSA CURVILINEA s PONENDO

$$s(t) = \int_a^t \|\bar{\gamma}'(t)\| \, dt$$

LUNGHEZZA DELL'ARCO $\bar{\gamma} = \gamma(\tau)$ PER $\tau \in [a, t]$.

LUNGHEZZA L DI TUTTA LA CURVA:

$$L = \int_a^b \|\bar{\gamma}'(t)\| \, dt = s(b).$$

DERIVANDO LA DEFINIZIONE DI $s(t)$ SI TROVA

$$s'(t) = \|\bar{\gamma}'(t)\| > 0$$

PERCHÉ $\bar{\gamma}'(t)$ È CONTINUA.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE: SE $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ È CONTINUA IN $[a,b]$, ALLORA 1) f È INTEGRABILE SULL'INTERVALLO $[a,t]$ PER OGNI $t \in (a, b]$, E 2) SI PUÒ DEFINIRE LA FUNZIONE INTEGRALE

$$F(t) = \int_a^t f(\tau) \, d\tau \quad \text{PER OGNI } t \in [a,b]$$

LA QUALE RISULTA DERIVABILE PER OGNI $t \in [a,b]$ E SODDISFA L'UGUAGLIANZA $F'(t) = f(t)$ PER OGNI $t \in [a,b]$.

TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA: SE UNA FUNZIONE $s: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ È DERIVABILE PER OGNI $t \in [a,b]$ E RISULTA $s'(t) > 0$ PER OGNI $t \in [a,b]$ ALLORA $s(t)$ È INVERTIBILE, CIOÈ ESISTE UNA FUNZIONE $t = \sigma(s)$ AVENTE PER DOMINIO L'INTERVALLO $[s(a), s(b)]$ E TALE CHE $\sigma(s(t)) = t$ PER OGNI $t \in [a, b]$, E INOLTRE $\sigma(s)$ È DERIVABILE E RISULTA $\sigma'(s(t)) = \dfrac{1}{s'(t)}$ PER OGNI $t \in [a, b]$.

LU 19 NOV 2024

NE SEGUE CHE IL PARAMETRO t SI PUÒ RICAVARE DA s TRAMITE $t = \sigma(s)$ SOLITAMENTE SCRITTA $t = t(s)$ E SI HA

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\bar{\gamma}'(t)\|}.$$

IN PARTICOLARE, LA CURVA REGOLARE γ DI EQUAZIONI

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b],$$

CON IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE $t = \sigma(s)$ SI PUÒ ANCHE RAPPRESENTARE COME SEGUE:

$$\begin{cases} x = x(\sigma(s)) \\ y = y(\sigma(s)) \\ z = z(\sigma(s)) \end{cases}, \quad s \in [s(a), s(b)] = [0, L]$$

ADESSO LA VELOCITÀ È $\left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right) = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \dfrac{d\sigma}{ds}$ E IL SUO MODULO

$$\left\| \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \right\| = \|\bar{\gamma}'\| \cdot \frac{1}{\|\bar{\gamma}'\|} = 1$$

APPLICAZIONE: CONSIDERIAMO L'ELICA CILINDRICA

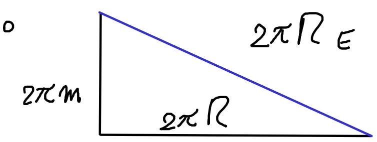
$$\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \\ z(t) = m t \end{cases} \quad \text{PER } t \in [0, 2\pi]. \text{ SI HA}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -R \sin t \\ y'(t) = R \cos t \\ z'(t) = m \end{cases} \quad \text{QUINDI } \|\bar{\gamma}'(t)\| = \sqrt{R^2 + m^2} > 0$$

SI TRATTA DI UNA CURVA REGOLARE DI LUNGHEZZA

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + m^2} \, d\tau = 2\pi \sqrt{R^2 + m^2}$$

DEL RESTO, L'ELICA SI PUÒ SVILUPPARE SULL'IPOTENUSA DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO I CUI CATETI MISURANO $2\pi R$ E $z(2\pi) = 2\pi m$



IN GENERALE, SI TROVA $s(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 + m^2}\, d\tau$
$= t\sqrt{R^2+m^2}$ DA CUI

$$t = \alpha(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}} \quad \text{PER } s \in \left[0, 2\pi\sqrt{R^2+m^2}\right]$$

E LA MEDESIMA CURVA SI PUÒ ANCHE RAPPRESENTARE NELLA FORMA

$$\begin{cases} x = R\cos\dfrac{s}{\sqrt{R^2+m^2}} \\ y = R \operatorname{sen} \dfrac{s}{\sqrt{R^2+m^2}} \qquad s \in \left[0, 2\pi\sqrt{R^2+m^2}\right] \\ z = \dfrac{ms}{\sqrt{R^2+m^2}} \end{cases}$$

IN GENERALE POSSIAMO PORRE $t = \varphi(\tau)$ CON UNA φ DERIVABILE E TALE CHE $\varphi'(\tau) \neq 0$ PER OGNI τ (DUNQUE O $\varphi'(\tau) > 0$ PER OGNI τ, OPPURE $\varphi'(\tau) < 0$ PER OGNI τ)

E RISCRIVERE LA STESSA CURVA NELLA FORMA

$$\begin{cases} x = x(\varphi(\tau)) \\ y = y(\varphi(\tau)) \\ z = z(\varphi(\tau)) \end{cases} \quad \text{CON VELOCITÀ} \quad \frac{d\Sigma}{d\tau} = \frac{d\Sigma}{dt}\varphi'(\tau)$$

AD ESEMPIO SI PONE SPESSO $s = L\tau$ CON $\tau \in [0,1]$. NEL CASO DELL'ELICA ($L = 2\pi\sqrt{R^2+m^2}$) SI OTTIENE

$$\begin{cases} x = R\cos 2\pi\tau \\ y = R \operatorname{sen} 2\pi\tau \\ z = 2\pi m \tau \end{cases}$$

PER $\tau \in [0,1]$.