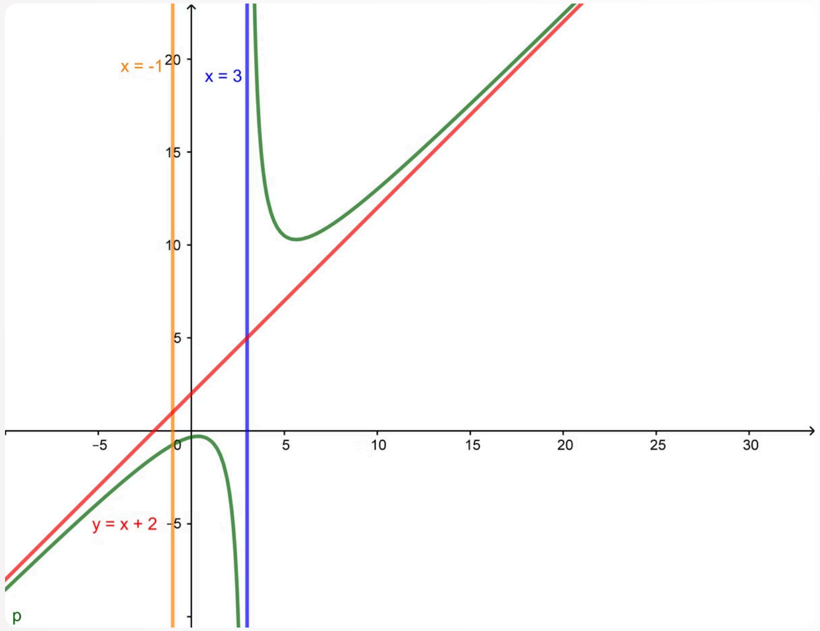


CALCOLO DIFFERENZIALE:

I LIMITI

Il calcolo differenziale è una branca fondamentale della matematica che studia i tassi di variazione e le tangenti a una curva. Questa disciplina permette di analizzare il comportamento e le proprietà delle funzioni, aprendo la strada a numerose applicazioni in fisica, ingegneria e altre scienze.

Lo studio del calcolo differenziale è di grande importanza per comprendere come le funzioni si comportano e come cambiano nel tempo o nello spazio. Attraverso l'analisi dei tassi di variazione e delle tangenti, è possibile ottenere informazioni preziose sulla forma e sull'andamento di una funzione, nonché sulle sue proprietà matematiche.

Grazie al calcolo differenziale, gli esperti in vari campi possono modellare e prevedere fenomeni complessi, ottimizzare processi e prendere decisioni informate. Questa branca della matematica è quindi fondamentale per lo sviluppo scientifico e tecnologico, rendendo possibili numerose innovazioni e scoperte.

Definizione di limite

1 Limite finito

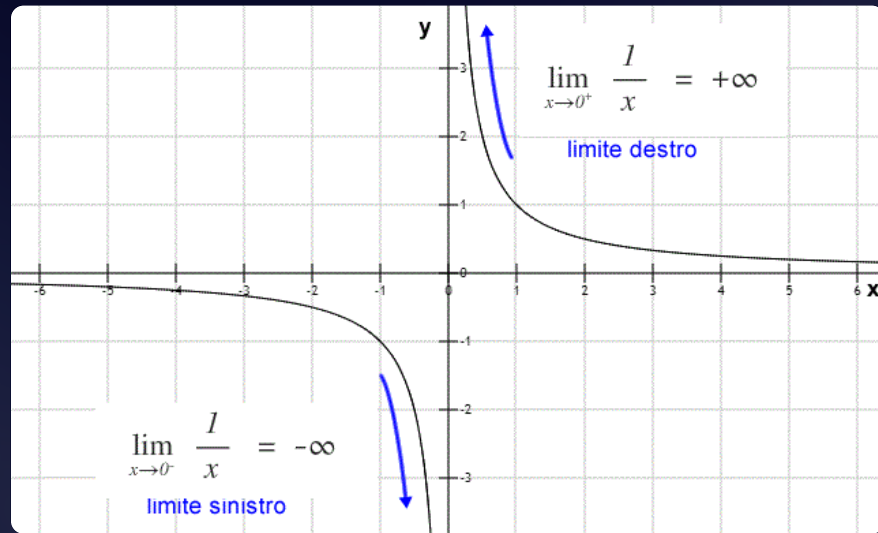
Il limite finito di una funzione f(x) quando x tende a un valore a è il valore L a cui f(x) si avvicina sempre più al tendere di x ad a.

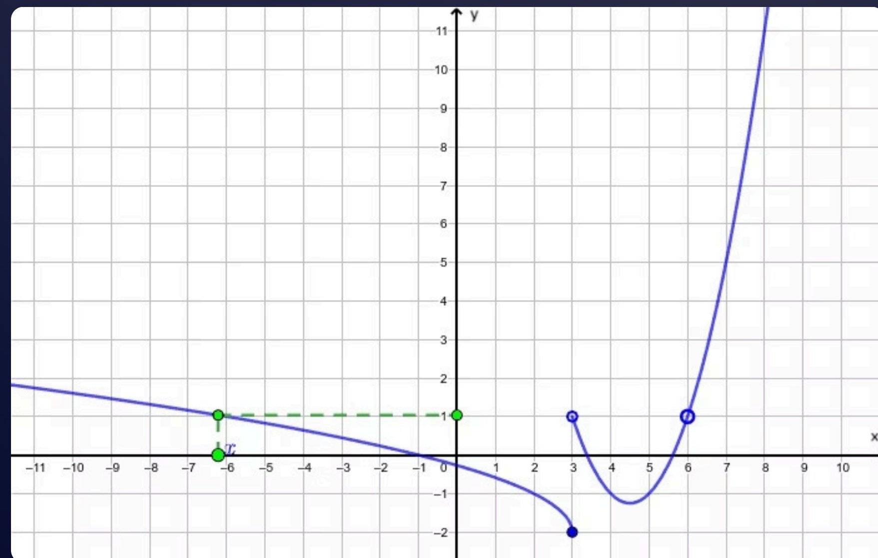
2 Limite infinito

Il limite infinito di una funzione f(x) quando x tende a un valore a è il valore ±∞ a cui f(x) si avvicina sempre più al tendere di x ad a.

3 Limite destro e sinistro

Il limite destro e sinistro di una funzione f(x) quando x tende a un valore a sono i limiti calcolati avvicinandosi ad a rispettivamente dal lato destro e dal lato sinistro.





Limiti per x che tende a infinito

1 **Limite finito**

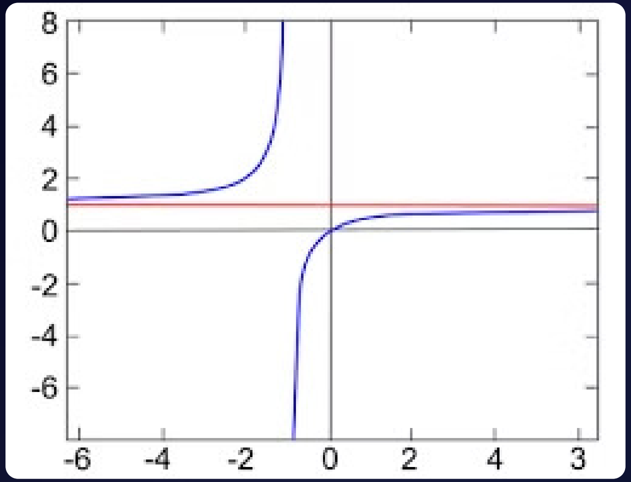
Quando il limite di una funzione f(x) per x che tende a +∞ o -∞ è un valore finito L, si dice che il limite esiste e vale L.

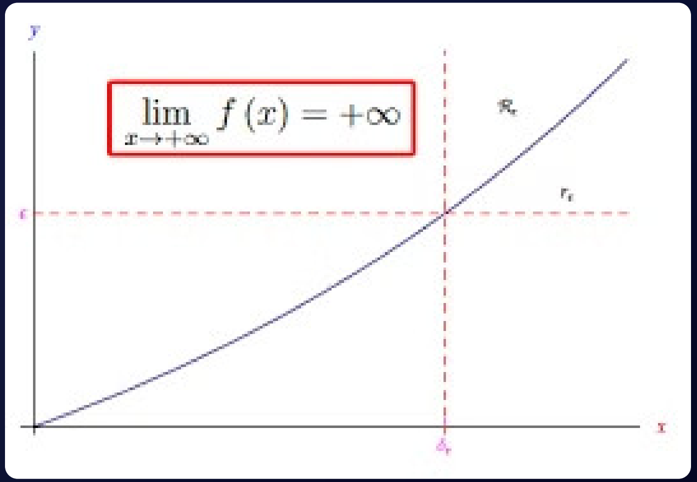
2 **Limite infinito**

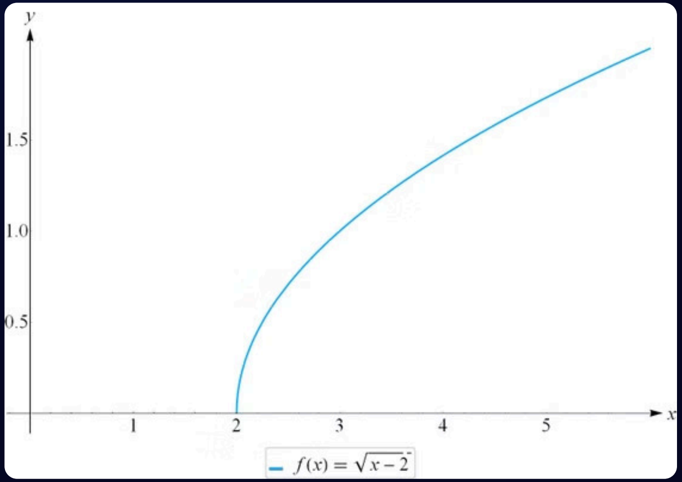
Quando il limite di una funzione f(x) per x che tende a +∞ o -∞ è +∞ o -∞, si dice che il limite esiste ed è infinito.

3 **Limite non esistente**

Quando il limite di una funzione f(x) per x che tende a +∞ o -∞ non può essere determinato, si dice che il limite non esiste.







Ordini di infinito e proprietà dei limiti

Le funzioni esponenziali crescono più velocemente di qualunque potenza di x, quindi hanno ordine di infinito superiore. Le funzioni di potenza possono avere ordine di infinito finito o infinito a seconda dell'esponente. Le funzioni logaritmiche hanno ordine di infinito infinitesimo, ovvero tendono a 0 più velocemente di qualunque potenza di x.

Nella figura a fianco, vengono riportate le proprietà fondamentali dei limiti.

1. $\lim_{x\to x_0} [kf(x)] = k \lim_{x\to x_0} f(x)$ con $k \neq 0$

2. $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

3. $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

4. $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^n$ con $n \in \mathbb{R}, n \neq 0$

5. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, tranne se esce fuori 0 diviso 0.

COSE DA RICORDARE!

$\frac{k}{\infty} = 0$ con $k \in \mathbb{R}$ ma diverso da infinito.

$\frac{k}{0} = \infty$ con $k \in \mathbb{R}$ ma diverso da zero.

$\frac{0}{\infty} = 0$

$\frac{\infty}{0} = \infty$

Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2x}{2-x^3}$$

Svolgimento

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2x}{2-x^3}=\frac{\infty}{\infty}$$

Forma indeterminata.
Si risolve mettendo in evidenza la x di grado massimo e semplificando

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}^{1}\left(\frac{5\cancel{x^3}^{1}}{\cancel{x^3}^{1}}+\frac{2\cancel{x}^{1}}{x^{\cancel{3}\,2}}\right)}{\cancel{x^3}^{1}\left(\frac{2}{x^3}-\frac{\cancel{x^3}^{1}}{\cancel{x^3}^{1}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\boxed{\frac{2}{x^2}}}{\boxed{\frac{2}{x^3}}-1}=-5$$

Tende a zero

Tende a zero

Forme indeterminate

0/0

Questa forma indeterminata si presenta quando il limite di una frazione ha numeratore e denominatore che tendono entrambi a 0.

∞/∞

Questa forma indeterminata si presenta quando il limite di una frazione ha sia numeratore che denominatore che tendono a ∞.

0 · ∞

Questa forma indeterminata si presenta quando il limite di un prodotto ha un fattore che tende a 0 e l'altro a ∞.

∞ - ∞

Questa forma indeterminata si presenta quando il limite di una differenza ha minuendo e sottraendo che tendono a ∞.

Asintoti matematici

1

Asintoti verticali

Rette verticali a cui una funzione matematica si avvicina senza mai raggiungerle. Sono un importante concetto per comprendere il comportamento di una funzione ai suoi estremi.

2

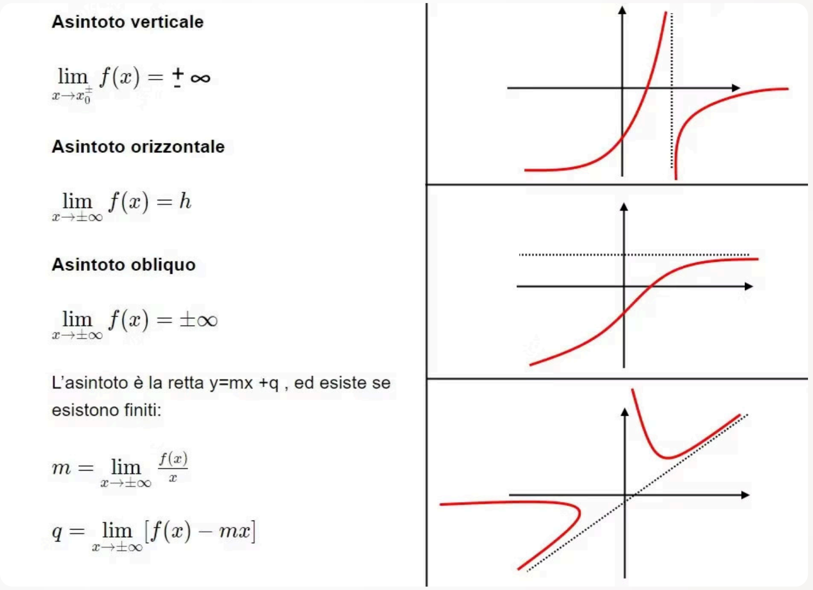
Asintoti orizzontali

Rette orizzontali a cui una funzione matematica si avvicina senza mai raggiungerle. Rappresentano il valore limite verso il quale la funzione tende all'infinito.

3

Asintoti obliqui

Rette oblique a cui una funzione matematica si avvicina senza mai raggiungerle. Descrivono il comportamento di una funzione che cresce o decresce in maniera lineare.



Esistenza e non esistenza del limite

Condizioni di esistenza

Affinché il limite di una funzione esista, deve essere soddisfatta la condizione di continuità, per cui il limite destro ed il limite sinistro in un punto devono essere uguali:

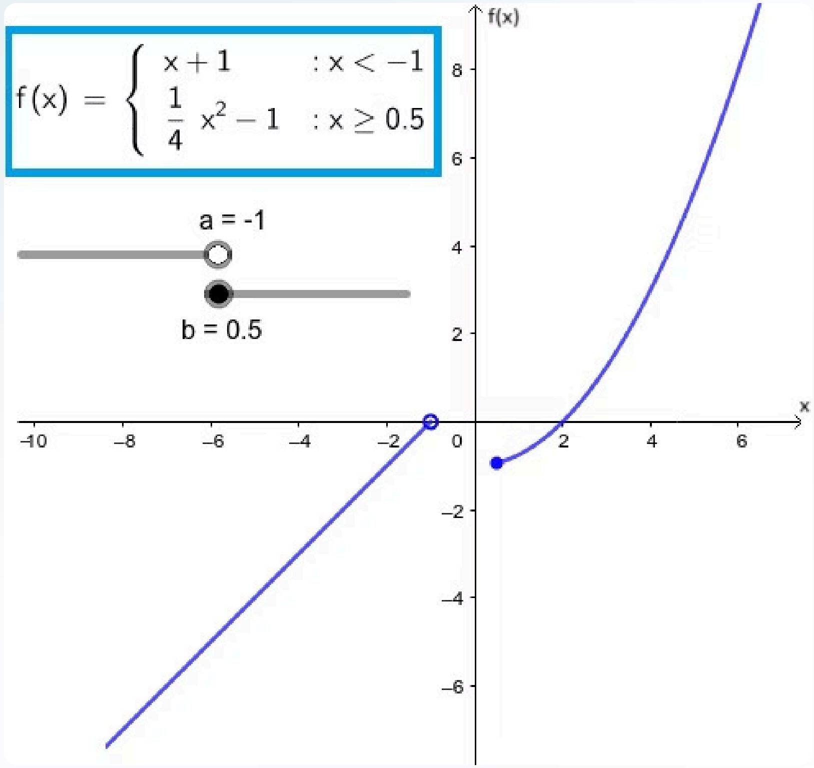
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Cause di non esistenza

Il limite può non esistere a causa di oscillazioni, salti, asintoti verticali o perché la funzione non è definita nel punto.

Verifica empirica

È possibile verificare empiricamente l'esistenza o meno di un limite attraverso il calcolo dei limiti destro e sinistro.



Punti di discontinuità

1 Discontinuità di prima specie

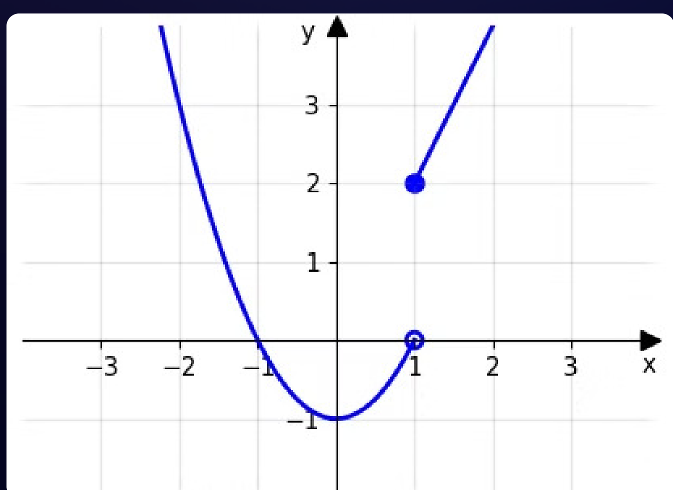
Detta anche discontinuità di salto, si verifica quando il limite destro e sinistro della funzione in un punto sono finiti, ma diversi tra loro.

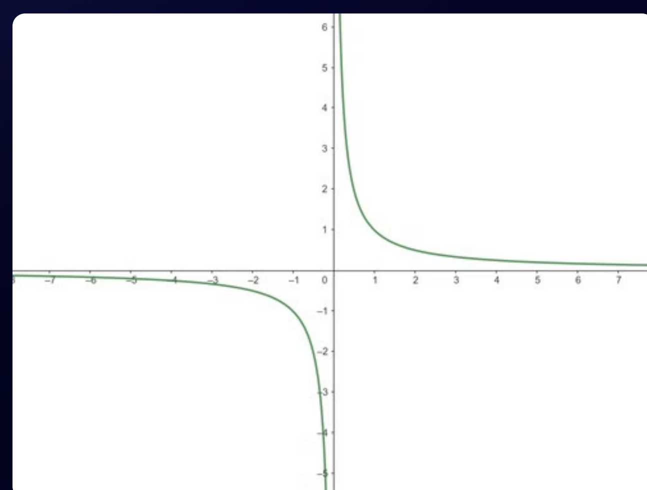
2 Discontinuità di seconda specie

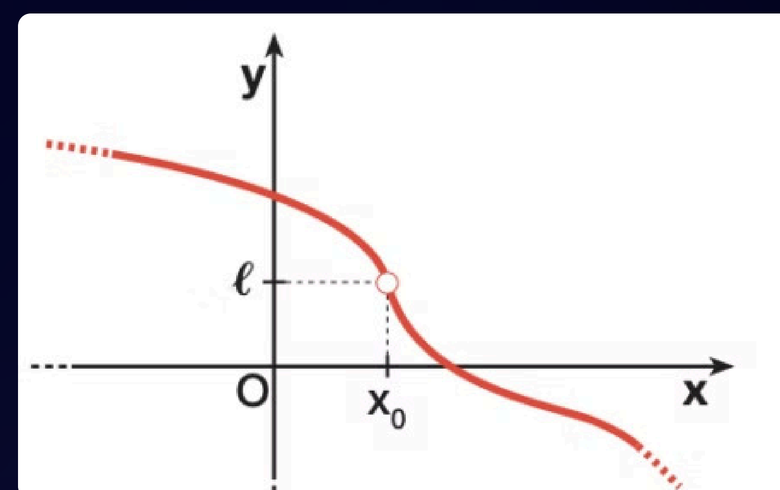
Si verifica quando almeno uno dei limiti destro o sinistro della funzione in un punto è infinito.

3 Discontinuità di terza specie

Detta anche discontinuità eliminabile, si verifica quando il limite destro e sinistro della funzione in un punto sono uguali, ma la funzione non è definita in quel punto.







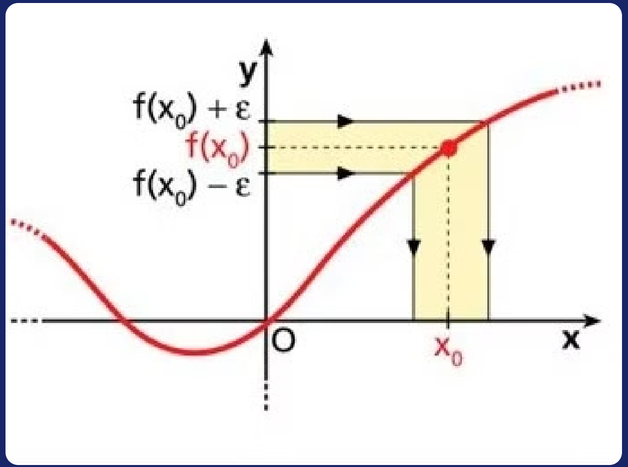
Funzioni continue

Continuità puntuale

Una funzione è continua in un punto se il suo valore in quel punto corrisponde al limite della funzione quando il punto si avvicina ad esso. In altre parole, la funzione non presenta salti o interruzioni in quel punto specifico.

Continuità in un intervallo

Perché una funzione sia continua in un intervallo, è necessario che essa sia continua in ogni singolo punto di quell'intervallo. Ciò significa che la funzione non presenta alcuna discontinuità all'interno dell'intervallo considerato.



Teoremi sulle funzioni continue

Esistono diversi teoremi fondamentali che descrivono il comportamento delle funzioni continue:

- **Teorema di Weierstrass**: una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato raggiunge il suo valore massimo e minimo in tale intervallo.
- **Teorema dei valori intermedi**: una funzione continua assume tutti i valori intermedi tra il suo valore massimo e minimo.
- **Teorema degli zeri**: il teorema degli zeri afferma che se una funzione continua ha segni opposti ai suoi estremi di un intervallo, allora esiste almeno un punto all'interno di tale intervallo in cui la funzione si annulla.

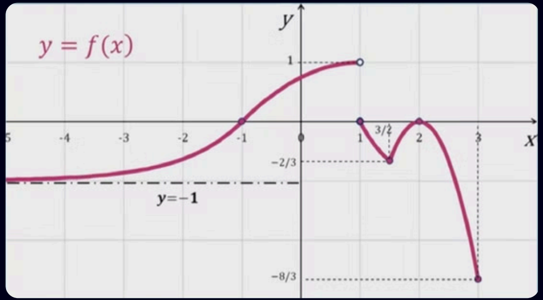
Metodi di risoluzione

Metodo intuitivo

Questo approccio si basa sull'interpretazione grafica e sull'analisi del comportamento della funzione per determinare il limite.

Metodo algebrico

Questo metodo utilizza le regole e le proprietà del calcolo dei limiti per risolvere in modo analitico espressioni che presentano forme indeterminate.



$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+3}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+10x^2}{x^7+6x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+10)}{x^3(x^4+6)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+10}{x(x^4+6)}=\frac{10}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

Limiti Notevoli: Tabella

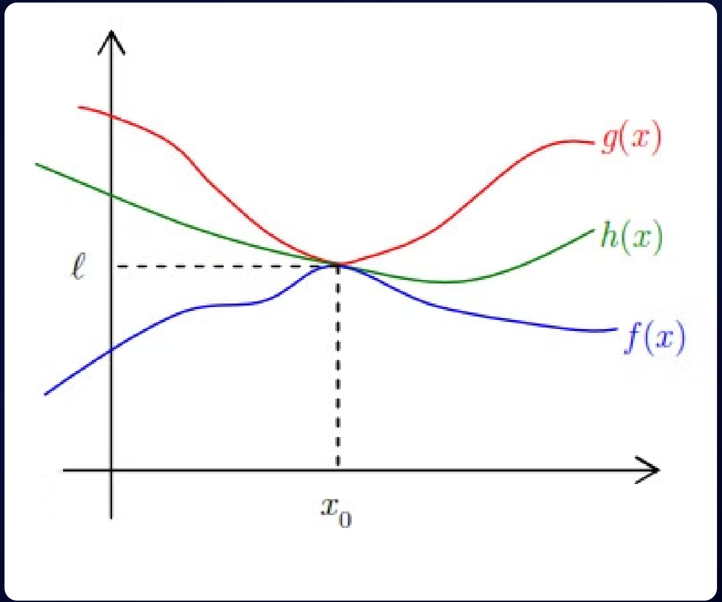
funzioni goniometriche	
$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\ x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\ x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ mx}{sen\ nx}=\frac{m}{n}$	$\lim_{x\to 1}\frac{(arc\cos x)^2}{1-x}=2$
funzioni esponenziali e logaritmiche	
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$	$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \quad (a>1)$
$\lim_{x\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+a^x}=\begin{cases}1 & se\ a<1\\ \frac{1}{2} & se\ a=1\\ 0 & se\ a>1\end{cases}$

Teorema del confronto o dei carabinieri

Questo teorema afferma che se due funzioni f(x) e g(x) convergono allo stesso limite quando x tende a un determinato valore, allora anche la funzione h(x) tale che f(x) ≤ h(x) ≤ g(x) converge allo stesso limite.

In altre parole, se si riesce a dimostrare che una funzione h(x) è compresa tra f(x) e g(x) e le due funzioni f(x) e g(x) hanno lo stesso limite, allora anche h(x) avrà lo stesso limite.

Questo teorema è utile per risolvere limiti di funzioni complicate attraverso il confronto con funzioni più semplici.



Esempi ed esercizi proposti

Calcolare il seguente limite $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^3-8}\right)$	
Il limite si presenta in forma indeterminata. Infatti, sostituendo 2 alla x si ottiene la forma $\frac{0}{0}$	$\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^3-8}\right) = \frac{4-4}{8-8} = \frac{0}{0}$
Questo tipo di indeterminazione, si può risolvere scomponendo numeratore e denominatore, cercando di semplificare poi i termini simili. In questo caso, il numeratore è stato scomposto come differenza di quadrati, il denominatore come differenza di cubi	$\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^3-8}\right) = \lim_{x \to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$ $\lim_{x \to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}^1}{\cancel{(x-2)}^1(x^2+2x+4)}$
Fatta la semplificazione, si sostituisce nuova mente 2 alla x. Come si può constatare, il limite non si presenta più in forma indeterminata e il risultato è $\frac{1}{3}$	$\lim_{x \to 2}\frac{(x+2)}{(x^2+2x+4)} = \frac{2+2}{4+4+4} = \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{12}^3} = \frac{1}{3}$

Esercizi proposti sul calcolo dei limiti

$$\lim_{x \to 3}\left(2x^3 - 5x^2 - 4x + 2\right)$$

$$\lim_{x \to 2}\left(2x^3 - 5x^2 + 4\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(2x^3 - 5x^2 + 4\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(2x^3 - 5x^2 + 4\right)$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{2}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2}\frac{2}{x-2}$$

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{2}{x-2}$$

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{2x^2}{x-2}$$

$$\lim_{x \to -\infty}\frac{2x^2+18x}{x^2-2}$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{2x^2+18x}{x^2-2x}$$

$$\lim_{x \to 0^-}\frac{2x^2+18x}{x^2}$$