

Joseph-Louis Lagrange
(1736–1813)



Leonhard Euler
(1707–1783)

Metodi classici del calcolo delle variazioni
SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

PROF. ANTONIO GRECO

<http://people.unica.it/antoniogreco>

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

11-11-2018

Indice

[101]	Problemi classici	3
[102]	Definizioni elementari	6
[103]	Disuguaglianze isoperimetriche	8
[104]	Problemi elementari	9
[105]	Lunghezza del grafico	12
[106]	Equazione di Eulero	14
[107]	Problemi al contorno	16
[108]	Problemi isoperimetrici	17

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[101]

PROBLEMI CLASSICI

1) CON RIFERIMENTO AL FUNZIONALE $F[u]$ DATO DA:

$$F[u] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{|u(x)|}} dx,$$

DOVE b È UNA COSTANTE POSITIVA, SVOLGERE I SEGUENTI ESERCIZI.

1) (a) CALCOLARE $F[u_m]$, ESSENDO u_m LA FUNZIONE $u_m(x) = mx$, ED m UN PARAMETRO NEGATIVO.

ESSENDO $u'_m(x) = m$, SI TROVA

$$F[u_m] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{|m|x}} dx.$$

POICHÉ m È COSTANTE, POSSIAMO SCRIVERE

$$\begin{aligned} F[u_m] &= \sqrt{\frac{1 + m^2}{|m|}} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}} dx \\ &= \sqrt{\frac{1 + m^2}{|m|}} 2\sqrt{b}. \end{aligned} \quad (1)$$

1) (b) STABILIRE SE IL VALORE NUMERICO DI $F[u_m]$ È MONOTONO RISPETTO AD m .

OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE LA RADICE QUADRATA

$$\sqrt{\frac{1 + m^2}{|m|}}$$

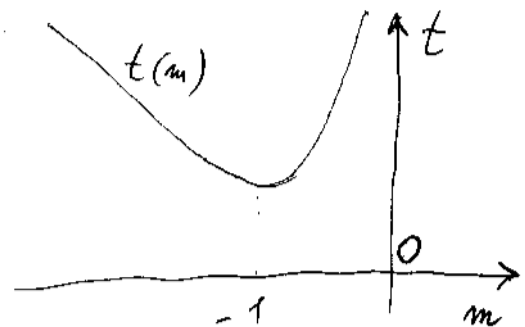
È UNA FUNZIONE STRETTAMENTE CRESCENTE RISPETTO AL RADICANDO

$$t(m) = \frac{1 + m^2}{|m|},$$

QUINDI STUDIAMO LA MONOTONIA DI QUEST'ULTIMO PER $m \in (-\infty, 0)$. ESSENDO

$$t'(m) = \frac{1 - m^2}{m^2},$$

SI DEDUCE CHE $t(m)$ È DECRESCENTE PER $m \in (-\infty, -1)$ E CRESCENTE PER $m \in (-1, 0)$.



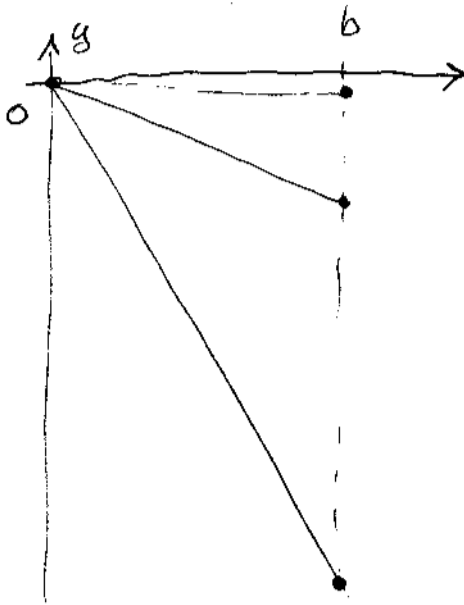
LO STESSO SI PUÒ DIRE DELLA FUNZIONE $\varphi(m) = F[u_m]$.

1) (c) TROVARE IL LIMITE DI $F[u_m]$ PER $m \rightarrow -\infty$.

DALLA (1) SEGUE IMMEDIATAMENTE CHE $\lim_{m \rightarrow -\infty} F[u_m] = +\infty$.

1) (d) DARE UN'INTERPRETAZIONE FISICA DEGLI ESERCIZI PRECEDENTI, RICONDUCENDOLI AL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA.

GLI ESERCIZI PERMETTONO DI CONFRONTARE FRA LORO I TEMPI DI TRANSITO DI DIVERSI PIANI INCLINATI, SCHEMATIZZABILI CON DEI SEGMENTI AVENTI UN ESTREMO NELL'ORIGINE E L'ALTRO ESTREMO DI ASCISSA b .



SI TROVA CHE IL TEMPO DI TRANSITO TENDE ALL'INFINITO QUANDO IL PIANO TENDE A DIVENTARE ORIZZONTALE, IN ACCORDO COL FATTO CHE LA VELOCITÀ TENDE A ZERO.

IL TEMPO DI TRANSITO TENDE ALL'INFINITO ANCHE QUANDO IL PIANO TENDE A DIVENTARE VERTICALE, IN ACCORDO COL FATTO CHE IL PERCORSO DIVENTA INFINITAMENTE LUNGO.

IL TEMPO DI TRANSITO È MINIMO QUANDO L'INCLINAZIONE È DI 45° .

2) CON RIFERIMENTO AL FUNZIONALE $G[u]$ DATO DA:

$$G[u] = \int_0^R \frac{\rho d\rho}{1 + (u'(\rho))^2},$$

DOVE R È UNA COSTANTE POSITIVA, SVOLGERE I SEGUENTI ESERCIZI.

2) (a) CALCOLARE $G[u_h]$, ESSENDO u_h LA FUNZIONE $u_h(\rho) = h\rho/R$, E h UN PARAMETRO POSITIVO.

ESSENDO $u'_h(\rho) = h/R$, SI TROVA

$$G[u_h] = \int_0^R \frac{\rho d\rho}{1 + (h/R)^2}.$$

POICHÉ h/R È COSTANTE, POSSIAMO SCRIVERE

$$\begin{aligned} G[u_h] &= \frac{R^2}{R^2 + h^2} \int_0^R \rho d\rho \\ &= \frac{R^4}{2(R^2 + h^2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

2) (b) STABILIRE SE IL VALORE NUMERICO DI $G[u_h]$ È MONOTONO RISPETTO AD h .

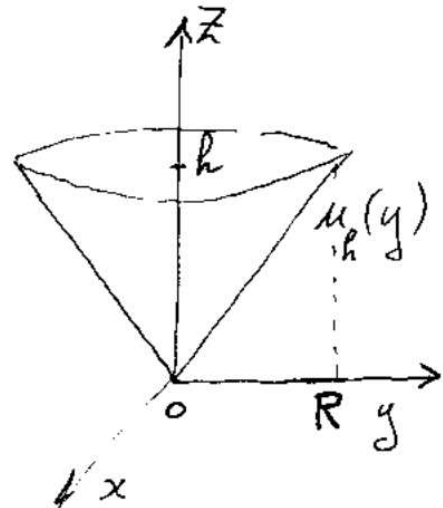
POICHÉ IL DENOMINATORE NELLA (2) È POSITIVO E CRESCE CON $h > 0$, E POICHÉ IL NUMERATORE È POSITIVO, IL VALORE NUMERICO DI $G[u_h]$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE PER $h \in [0, +\infty)$.

2) (c) TROVARE IL LIMITE DI $G[u_h]$ PER $h \rightarrow +\infty$.

DALLA (2) SI RICA VA IMMEDIATAMENTE CHE $\lim_{h \rightarrow +\infty} G[u_h] = 0$.

2) (d) DARE UN'INTERPRETAZIONE FISICA DEGLI ESERCIZI PRECEDENTI, RICONDUCENDOLI AL PROBLEMA DEL CORPO DI MINIMA RESISTENZA DI NEWTON.

GLI ESERCIZI PERMETTONO DI CONFRONTARE FRA LORO LE RESISTENZE ALL'AVANZAMENTO INCONTRATE DA DIVERSI CONI AVENTI LO STESSO RAGGIO DI BASE R .



SI TROVA CHE LA RESISTENZA È TANTO MINORE QUANTO PIÙ IL CONO È APPUNTITO.

STANDO A QUESTO MODELLO, SI POTREBBE COSTRUIRE UN CONO CARATTERIZZATO DA UNA RESISTENZA ARBITRARIAMENTE PICCOLA FACENDOLO DI ALTEZZA h SUFFICIENTEMENTE GRANDE.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[102]

DEFINIZIONI ELEMENTARI

1) INDICATA CON R UNA COSTANTE POSITIVA, DETERMINARE L'ESTREMO INFERIORE, E, SE ESISTONO, IL VALORE MINIMO ED I MINORANTI DEL FUNZIONALE

$$G[u] = \int_0^R \frac{\rho d\rho}{1 + (u'(\rho))^2}$$

AL VARIARE DI u NELLA CLASSE $C^1([0, R])$.

LA DETERMINAZIONE DELL'ESTREMO INFERIORE DEL FUNZIONALE DATO SI BASA SULLE SEGUENTI DUE CONSIDERAZIONI.

LA PRIMA È CHE, ESSENDO POSITIVA LA FUNZIONE INTEGRANDA, POSSIAMO SCRIVERE

$$G[u] \geq 0 \text{ PER OGNI } u \in C^1([0, R]). \quad (3)$$

LA SECONDA CONSIDERAZIONE È CHE PONENDO $u_n(\rho) = n\rho$ RISULTA

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G[u_n] = 0$$

(V. ESERCIZIO 2 DELLA SERIE [101]). DALLE DUE CONSIDERAZIONI APPENA FATTE SEGUE CHE

$$\inf_{u \in C^1([0, b])} = 0$$

E PERCIÒ I MINORANTI SONO IN NUMERI $m \in (-\infty, 0]$.

PER DETERMINARE L'EVENTUALE VALORE MINIMO DEL FUNZIONALE DATO, FACCIAMO UNA TERZA CONSIDERAZIONE, CHE MIGLIORA LA (3):

$$G[u] > 0 \text{ PER OGNI } u \in C^1([0, R]),$$

CIOÈ NON ESISTE NESSUNA $u \in C^1([0, b])$ TALE CHE $G[u] = 0$. CONCLUDIAMO CHE IL FUNZIONALE DATO NON AMMETTE MINIMO.

2) CON RIFERIMENTO AL FUNZIONALE $G[u]$ DELL'ESERCIZIO 2, TROVARE UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $u_n(\rho)$ APPARTENENTI ALLA CLASSE $C^1([0, R])$ E TALI CHE IL LIMITE $\lim_{n \rightarrow +\infty} G[u_n]$ SIA UGUALE ALL'ESTREMO INFERIORE DI G DETERMINATO PRECEDENTEMENTE.

LE FUNZIONI $u_n(\rho) = n\rho$ DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE HANNO LA PROPRIETÀ RICHIESTA.

3) DETERMINARE L'ESTREMO SUPERIORE, E, SE ESISTONO, IL VALORE MASSIMO ED I MAGGIORANTI DEL FUNZIONALE $G[u]$ DELL'ESERCIZIO 1 AL VARIARE DI u NELLA CLASSE $C^1([0, R])$.

LA DETERMINAZIONE DEL VALORE MASSIMO DEL FUNZIONALE SI BASA SULLE SEGUENTI DUE CONSIDERAZIONI.

LA PRIMA È CHE, ESSENDO $(u'(\rho))^2 \geq 0$ PER OGNI $\rho \in [0, R]$, SI HA

$$\begin{aligned} G[u] &= \int_0^R \frac{\rho d\rho}{1 + (u'(\rho))^2} \\ &\leq \int_0^R \rho d\rho = \frac{1}{2} R^2 \end{aligned}$$

QUALUNQUE SIA LA FUNZIONE $u \in C^1([0, R])$. LA SECONDA CONSIDERAZIONE È CHE, POSTO $u_0(\rho) \equiv 0$, SI VEDE PER SOSTITUZIONE CHE $G[u_0] = \frac{1}{2} R^2$.

DALLE DUE CONSIDERAZIONI APPENA SVOLTE SEGUE CHE LA FUNZIONE u_0 È UNA MASSIMANTE, E CHE

$$\max_{u \in C^1([0, b])} G[u] = \frac{1}{2} R^2.$$

DI CONSEGUENZA RISULTA ANCHE

$$\sup_{u \in C^1([0, b])} G[u] = \frac{1}{2} R^2$$

ED I MAGGIORANTI DEL FUNZIONALE G SONO I NUMERI REALI $M \in [\frac{1}{2} R^2, +\infty)$.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[103]

DISUGUAGLIANZE ISOPERIMETRICHE

1) DICO CHE ESISTONO UN ESPO-
NENTE $\alpha \neq 2$ ED UNA COSTANTE $c \in \mathbb{R}$
TALI CHE PER OGNI FIGURA PIANA Ω ,
LIMITATA E REGOLARE, RISULTA:

$$|\Omega| \leq c |\partial\Omega|^\alpha. \quad (4)$$

CONFUTARE QUESTA AFFERMAZIONE.

PER CONFUTARE L’AFFERMAZIONE BA-
STA OSSERVARE CHE, SE FOSSE VERA,
LA SI POTREBBE APPLICARE ANCHE AL
CASO IN CUI

$$\Omega = B_R$$

ESSENDO B_R UN QUALUNQUE CERCHIO
DI RAGGIO $R > 0$. SAPENDO CHE

$$|B_R| = \pi R^2$$

E

$$|\partial B_R| = 2\pi R$$

SOSTITUENDO NELLA (4) SI TROVEREB-
BE

$$c \geq \frac{\pi}{(2\pi)^\alpha} R^{2-\alpha}. \quad (5)$$

SE $\alpha < 2$, IL SECONDO MEMBRO DEL-
LA (5) TENDE A $+\infty$ PER $R \rightarrow +\infty$,
DUNQUE NON ESISTE ALCUNA COSTAN-
TE c CHE LA SODDISFI.

SE, INVECE, $\alpha > 2$, ALLORA IL SE-
CONDO MEMBRO DELLA (5) TENDE A
 $+\infty$ PER $R \rightarrow 0$. IN CONCLUSIONE
LA (5) NON PUÒ VALERE, E QUINDI NON
VALE NEMMENO LA (4), PER $\alpha \neq 2$.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LA (4) VA-
LE CON $\alpha = 2$ E $c = \frac{1}{4\pi}$.

2) SAPENDO CHE FRA TUTTI I SOLI-
DI LIMITATI $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ LA CUI FRONTIE-
RA $\partial\Omega$ È UNA SUPERFICIE REGOLARE A
PEZZI ED HA AREA ASSEGNATA QUELLO
DI VOLUME MASSIMO È LA SFERA, DE-
TERMINARE UNA COSTANTE c IN MODO
TALE CHE RISULTI

$$|\Omega| \leq c |\partial\Omega|^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

PER QUALUNQUE SOLIDO LIMITATO $\Omega \subset$
 \mathbb{R}^3 LA CUI FRONTIERA È UNA SUPERFI-
CIE REGOLARE A PEZZI.

RICORDIAMO CHE IL VOLUME DELLA
SFERA B_R DI RAGGIO $R > 0$ È $|B_R| =$
 $\frac{4}{3}\pi R^3$, MENTRE L’AREA DELLA SFERA È
 $|\partial B_R| = 4\pi R^2$, E PERCIÒ SUSSISTE L’U-
GUAGLIANZA

$$|B_R| = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} |\partial B_R|^{\frac{3}{2}}.$$

PRESO UN QUALUNQUE SOLIDO LIMITA-
TO Ω LA CUI FRONTIERA È UNA SUPER-
FICIE REGOLARE A PEZZI, DETERMINIA-
MO IL RAGGIO R IN MODO TALE CHE
RISULTI

$$|\partial B_R| = |\partial\Omega|.$$

SOTTO QUESTA CONDIZIONE SAPPIAMO
CHE

$$|\Omega| \leq |B_R|$$

E PERCIÒ

$$|\Omega| \leq \frac{1}{6\sqrt{\pi}} |\partial B_R|^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} |\partial\Omega|^{\frac{3}{2}}.$$

DUNQUE POSSIAMO FISSARE ARBITRA-
RIAMENTE $c \in [\frac{1}{6\sqrt{\pi}}, +\infty)$ E LA (6) VA-
LE PER OGNI SOLIDO LIMITATO Ω LA CUI
FRONTIERA È UNA SUPERFICIE REGOLA-
RE A PEZZI.

SOSTITUENDO $\Omega = B_R$ NELLA (6)
SI TROVA CHE IL PIÙ PICCOLO VALORE
POSSIBILE PER c È PROPRIO $\frac{1}{6\sqrt{\pi}}$, DET-
TO “COSTANTE ISOPERIMETRICA NELLO
SPAZIO”.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[104]

PROBLEMI ELEMENTARI

1) SI CONSIDERI UN GENERICO TRIANGOLO AVENTE UN LATO DI LUNGHEZZA ASSEGNATA b_0 , E PERIMETRO ASSEGNATO $L > 2b_0$. DETERMINARE GLI ALTRI DUE LATI IN MODO TALE CHE L'AREA SIA LA PIÙ GRANDE POSSIBILE.

ESSENDO b_0 FISSATO, L'AREA $\frac{1}{2} b_0 h$ È MASSIMA QUANDO LO È L'ALTEZZA h RISPETTO AL LATO b_0 .

INDICATI CON a E c GLI ALTRI DUE LATI DEL TRIANGOLO, LA CONDIZIONE $a + b_0 + c = L$ SI PUÒ RISCRIVERE NELLA FORMA

$$a + c = L - b_0. \quad (7)$$

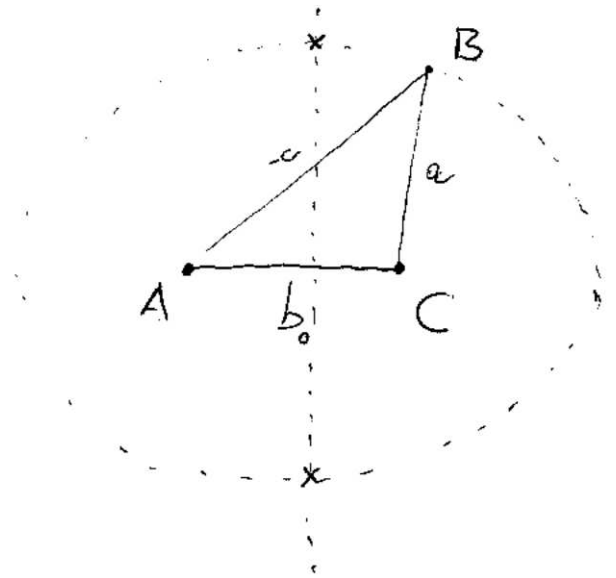
INDICATO CON B IL VERTICE OPPOSTO AL LATO b_0 , LA CONDIZIONE (7) MOSTRA CHE LA SOMMA $a + c$ DELLE DISTANZE DEL VERTICE B DAGLI ALTRI DUE VERTICI A E C HA UN VALORE ASSEGNATO.

MA IL LUOGO DEI PUNTI DEL PIANO PER I QUALI È COSTANTE LA SOMMA DELLE DISTANZE DA DUE PUNTI FISSI È L'ELLISSE.

QUINDI IL VERTICE B APPARTIENE A UN'ELLISSE DI FUOCHI A E C .

DI CONSEGUENZA, LA MASSIMA DISTANZA DI B DAL LATO b_0 SI RAGGIUNGE QUANDO B SI TROVA SULL'ASSE DI TALE LATO, E CIOÈ QUANDO

$$a = c = \frac{L - b_0}{2}. \quad (8)$$



PER I PIÙ ESIGENTI, VEDIAMO UNO SVOLGIMENTO ANALITICO DELLO STESSO ESERCIZIO.

FISSATI I PUNTI $A = (-b_0/2, 0)$ E $C = (b_0/2, 0)$, INDICHIAMO CON (x_B, y_B) LE COORDINATE DEL PUNTO B . PER IL TEOREMA DI PITAGORA, SI HA

$$h^2 + \left(x_B - \frac{b_0}{2}\right)^2 = a^2$$

E

$$h^2 + \left(x_B + \frac{b_0}{2}\right)^2 = c^2,$$

DOVE $c = \overline{AB}$, $a = \overline{BC}$, E $h = |y_B|$. SOMMANDO LE DUE RELAZIONI SI TROVA

$$2h^2 + 2x_B^2 + \frac{b_0^2}{2} = a^2 + c^2. \quad (9)$$

SOTTRAENDO, INVECE, LA SECONDA DALLA PRIMA SI OTTIENE

$$(a + c)(a - c) = 2b_0 x_B.$$

QUEST'ULTIMA, INSIEME ALLA CONDIZIONE $a + c = L - b_0$, PERMETTE DI RICAVARE LE ESPRESSIONI

$$\begin{cases} 2a = L - b_0 + \frac{2b_0 x_B}{L - b_0} \\ 2c = L - b_0 - \frac{2b_0 x_B}{L - b_0} \end{cases} \quad (10)$$

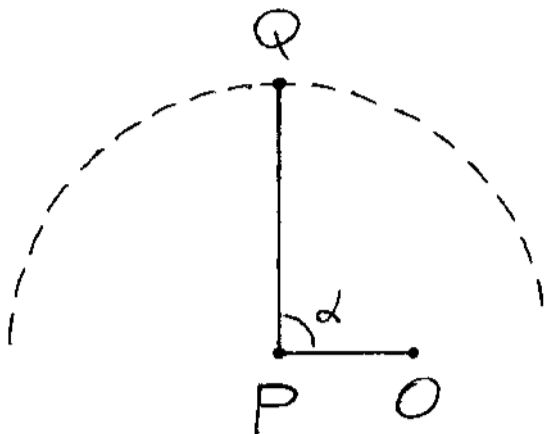
CHE, SOSTITUITE NELLA (9), PORTANO A

$$2h^2 = \frac{L}{2} (L - 2b_0) \left(1 - \frac{4x_B^2}{(L - b_0)^2} \right)$$

DA CUI RISULTA CHE IL MASSIMO VALORE DI h SI HA PER $x_B = 0$. SOSTITUENDO $x_B = 0$ NELLE (10) SI OTTIENE NUOVAMENTE LA (8).

2) DETERMINARE L'ANGOLO α TRA DUE SEGMENTI CONSECUTIVI OP E PQ DI LUNGHEZZA DATA, IN MODO TALE CHE L'AREA DEL TRIANGOLO OPQ SIA LA PIÙ GRANDE POSSIBILE.

POICHÉ IL SEGMENTO OP HA UNA LUNGHEZZA DATA, L'AREA $\frac{1}{2}OPh$ DEL TRIANGOLO È MASSIMA QUANDO LO È L'ALTEZZA $h = PQ \sin \alpha$.



POICHÉ ANCHE IL SEGMENTO PQ HA UNA LUNGHEZZA DATA, L'ALTEZZA h È MASSIMA PER $\alpha = 90^\circ$.

LA FIGURA METTE IN EVIDENZA IL FATTO CHE, FISSATO IL SEGMENTO OP , IL PUNTO Q APPARTIENE AD UNA CIRCONFERENZA CENTRATA IN P .

3) VERIFICARE CHE LA FUNZIONE $f(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{t}$ È STRETTAMENTE CRESCENTE SULL'INTERVALLO $(0, \frac{\pi}{2})$. SUGGERIMENTO: SCRIVERE $\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos} t}$ E SFRUTTARE IL FATTO CHE $\operatorname{sen} \alpha < \alpha$ PER OGNI $\alpha > 0$.

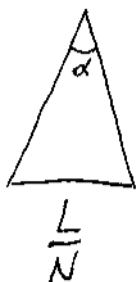
PER VERIFICARE CHE LA FUNZIONE f È STRETTAMENTE CRESCENTE, VERIFICHIAMO CHE LA SUA DERIVATA È POSITIVA NELL'INTERVALLO $(0, \frac{\pi}{2})$. SI HA

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{t \cos^2 t - (\operatorname{sen} t)(\operatorname{cos} t - t \operatorname{sen} t)}{t^2 \cos^2 t} \\ &= \frac{2t - \operatorname{sen} 2t}{2t^2 \cos^2 t}. \end{aligned}$$

POICHÉ $\operatorname{sen} \alpha < \alpha$ PER $\alpha = 2t > 0$, NE SEGUE CHE $f'(t) > 0$ PER $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

4) (a) PER OGNI $L \in (0, +\infty)$ ED OGNI INTERO $N \geq 3$, TROVARE L'AREA A_N DEL POLIGONO REGOLARE CON N LATI E PERIMETRO L .

L'AREA A_N DEL POLIGONO REGOLARE CON N LATI SI TROVA MOLTIPLICANDO PER N L'AREA DI UN TRIANGOLO ISOSCELE AVENTE PER BASE IL LATO $\ell = L/N$ DEL POLIGONO, E PER ALTEZZA L'APOTEMA a .



A SUA VOLTA L'APOTEMA a SI RICAVA DAL SEMILATO $\ell/2$ TRAMITE LA RELAZIONE $\ell/2 = a \operatorname{tg}(\alpha/2)$, ESSENDO $\alpha = \frac{2\pi}{N}$. DUNQUE

$$\begin{aligned} a &= \frac{\ell/2}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{N})} \\ &= \frac{L}{2N \operatorname{tg}(\frac{\pi}{N})} \end{aligned}$$

E DI CONSEGUENZA

$$\begin{aligned} A_N &= \frac{L^2}{4N \operatorname{tg}(\frac{\pi}{N})} \\ &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{\pi/N}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{N})}. \end{aligned} \quad (11)$$

4) (b) CALCOLARE IL LIMITE

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} A_N.$$

RICORDANDO IL LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1,$$

DALLA (11) SI RICAVA

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} A_N = \frac{L^2}{4\pi}. \quad (12)$$

4) (c) INDICATA CON A L'AREA DEL CERCHIO LA CUI CIRCONFERENZA HA LUNGHEZZA L , STABILIRE PER QUALI INTERI $N \geq 3$ RISULTA $A_N < A$.

IL RAGGIO r DELLA CIRCONFERENZA DI LUNGHEZZA L MISURA $r = \frac{L}{2\pi}$, QUINDI L'AREA A VALE

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \frac{L^2}{4\pi}, \end{aligned}$$

E PERCIÒ LA (12) SI PUÒ RISCRIVERE COME SEGUE:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} A_N = A.$$

SAPPIAMO INOLTRE DALL'ESERCIZIO 3 CHE LA FUNZIONE $f(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{t}$ È STRETTAMENTE CRESCENTE SULL'INTERVALLO $(0, \frac{\pi}{2})$. QUINDI, PONENDO $t = \pi/N$, LA FORMULA (11) MOSTRA CHE L'AREA A_N DEL POLIGONO REGOLARE DI PERIMETRO L È STRETTAMENTE CRESCENTE RISPETTO AL NUMERO N DEI LATI.

MA ALLORA CIASCUN TERMINE A_N È STRETTAMENTE MINORE DEL LIMITE DI TALE SUCCESIONE: CIOÈ SI HA $A_N < A$ PER OGNI $N \geq 3$.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[105]

LUNGHEZZA DEL GRAFICO

INDICATE CON b ED u_b DUE COSTANTI REALI, DI CUI $b > 0$, SI CONSIDERI IL FUNZIONALE $J[u]$ DATO DA

$$J[u] = \int_0^b \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$$

DOVE u VARIA NELL'INSIEME X DELLE FUNZIONI DI CLASSE $C^1([0, b])$ TALI CHE $u(0) = 0$ E $u(b) = u_b$.

1) DARE UN'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI $J[u]$.

IL VALORE NUMERICO DI $J[u]$ ESPRIME LA LUNGHEZZA DELLA CURVA CHE È IL GRAFICO DELLA FUNZIONE u .

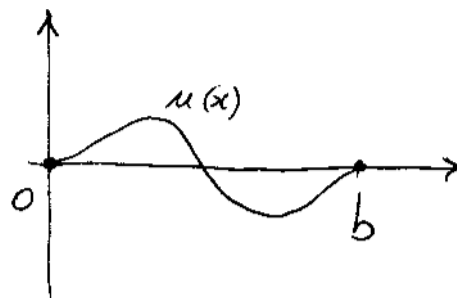
2) POSTO $u_b = 0$, TROVARE IL MINIMO DI $J[u]$.

VISTA L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL FUNZIONALE J , E SAPENDO CHE LA LINEA PIÙ BREVE TRA DUE PUNTI DATI È IL SEGMENTO, CI ASPETTIAMO CHE IL MINIMO DI $J[u]$ SIA LA LUNGHEZZA DELL'INTERVALLO $[0, b]$, E CIOÈ

$$\min_{u \in X} J[u] = b. \quad (13)$$

PER VERIFICARE QUESTA TESI BASTA FARE LE SEGUENTI DUE CONSIDERAZIONI. LA PRIMA È CHE, ESSENDO $(u'(x))^2 \geq 0$ PER OGNI $x \in [0, b]$, SI HA

$$J[u] \geq \int_0^b dx = b \text{ PER OGNI } u \in X.$$

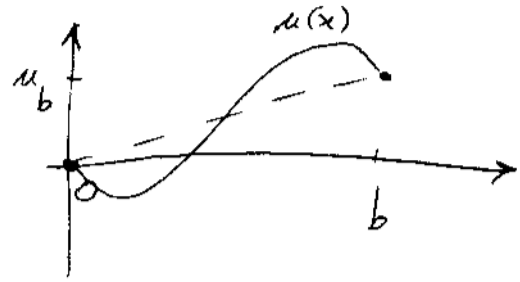


LA SECONDA CONSIDERAZIONE È CHE, INDICATA CON $u_0 \in X$ LA FUNZIONE $u_0(x) \equiv 0$, SI TROVA PER SOSTITUZIONE $J[u_0] = b$. IN DEFINITIVA, RISULTA

$$J[u_0] = b \leq J[u] \text{ PER OGNI } u \in X,$$

IL CHE IMPLICA LA (13).

3) FISSATO ARBITRARIAMENTE $u_b \in \mathbb{R}$, TROVARE IL MINIMO DI $J[u]$. SUGGERIMENTO: QUALUNQUE FUNZIONE CONVESSA E DERIVABILE $f(t)$, DELLA VARIABILE $t \in \mathbb{R}$, SODDISFA LA DISUGUAGLIANZA $f(t) \geq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ PER OGNI $t, t_0 \in \mathbb{R}$. PONENDO $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, $t = u'(x)$ E $t_0 = u_b/b$ SI RICAVA...



VISTA L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL FUNZIONALE J , CI ASPETTIAMO CHE IL MINIMO DI $J[u]$ SIA LA LUNGHEZZA DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE $u_0(x) = u_b x/b$, CHE È IL SEGMENTO AVENTE PER ESTREMI L'ORIGINE ED IL PUNTO (b, u_b) . DUNQUE

$$\min_{u \in X} J[u] = J[u_0] = \sqrt{b^2 + u_b^2}. \quad (14)$$

VERIFICHIAMO QUESTA TESI SEGUENDO IL SUGGERIMENTO NEL TESTO. SOSTITUENDO $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, $t = u'(x)$ E $t_0 = u_b/b$ NELLA DISUGUAGLIANZA

$$f(t) \geq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

SI OTTIENE

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (u'(x))^2} &\geq \sqrt{1 + (u_b/b)^2} \\ &+ f'(u_b/b) \left(u'(x) - \frac{u_b}{b} \right). \end{aligned}$$

INTEGRANDO AMBO I MEMBRI SULL'INTERVALLO $(0, b)$ SI TROVA

$$\begin{aligned} J[u] &\geq J[u_0] \\ &+ f'(u_b/b) \int_0^b \left(u'(x) - \frac{u_b}{b} \right) dx \end{aligned}$$

QUALUNQUE SIA $u \in X$. PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE, E SICCOME $u(b) = u_b$, L'INTEGRALE È NULLO E LA (14) SEGUE.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[106]

EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

1) FISSATO UN INTERVALLO LIMITATO $(a, b) \neq \emptyset$, SCRIVERE L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE DEI SEGUENTI FUNZIONALI:

$$F[u] = \int_a^b (u'(x))^2 dx;$$

$$J[u] = \int_a^b \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx.$$

LA LAGRANGIANA DEL FUNZIONALE F È LA FUNZIONE $f(x, u, u') = (u')^2$, RISULTA DUNQUE $\partial f / \partial u' = 2u'$, E PERTANTO L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE È

$$\frac{d}{dx} 2u'(x) = 0,$$

CHE SI PUÒ SCRIVERE SEMPLICEMENTE $u''(x) = 0$. LA LAGRANGIANA DEL FUNZIONALE J , INVECE, È LA FUNZIONE $f(x, u, u') = \sqrt{1 + (u')^2}$, RISULTA DUNQUE

$$\frac{\partial f}{\partial u'}(x, u(x), u'(x)) = \frac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}},$$

E PERTANTO L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE È

$$\frac{d}{dx} \frac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} = 0.$$

SVOLGENDO LA DERIVATA, L'EQUAZIONE SI PUÒ RISCRIVERE NELLA FORMA

$$\frac{u''(x)}{(1 + (u'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

QUESTA EQUAZIONE EQUIVALE, ANCORRA UNA VOLTA, A $u''(x) = 0$.

2) TROVARE LE ESTREMALI (CIOÈ LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE) DEI FUNZIONALI DELL'ESERCIZIO 1.

L'ESERCIZIO SI RIDUCE A TROVARE L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE

$$u'' = 0.$$

SI CONCLUDE CHE LE ESTREMALI DI ENTRAMBI I FUNZIONALI SONO I POLINOMI DI PRIMO GRADO, CIOÈ LE FUNZIONI $u(x) = mx + q$ CON m E q PARAMETRI REALI.

3) FISSATE DUE COSTANTI $u_a, u_b \in \mathbb{R}$, TROVARE, FRA LE SUDETTE ESTREMALI, QUELLE CHE SODDISFANO LE CONDIZIONI $u(a) = u_a$ E $u(b) = u_b$.

L'ESERCIZIO SI RIDUCE A TROVARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER I DUE PUNTI (a, u_a) E (b, u_b) .

ESISTE DUNQUE UN'UNICA ESTREMALE SODDISFACENTE LE CONDIZIONI DATE, ED È LA FUNZIONE

$$u(x) = \frac{u_b - u_a}{b - a} (x - a) + u_a.$$

4) CONSIDERATA UNA FUNZIONE A , CONTINUA SULL'INTERVALLO LIMITATO $[a, b]$, INDICHIAMO CON \bar{A} LA SUA MEDIA INTEGRALE, E SUPPONIAMO CHE RISULTI

$$\int_a^b A(x) \eta'(x) dx = 0 \quad (15)$$

PER OGNI $\eta \in C^1([a, b])$ TALE CHE $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

4) (a) VERIFICARE CHE LA FUNZIONE $\eta_0(x)$ DATA DA

$$\eta_0(x) = \int_a^x (A(t) - \bar{A}) dt$$

È DI CLASSE $C^1([a, b])$ E SI ANNULLA AGLI ESTREMI.

LA FUNZIONE $\eta_0(x)$ È DI CLASSE $C^1([a, b])$ PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE, ESSENDO CONTINUA PER IPOTESI LA FUNZIONE INTEGRANDA $A(t) - \bar{A}$. RISULTA

$$\begin{aligned} \eta_0(a) &= \int_a^a (A(t) - \bar{A}) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

PER LA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE. SI HA, INOLTRE,

$$\begin{aligned} \eta_0(b) &= \int_a^b (A(t) - \bar{A}) dt \\ &= \int_a^b A(t) dt - (b - a) \bar{A}. \end{aligned}$$

POICHÉ LA MEDIA INTEGRALE \bar{A} È, PER DEFINIZIONE, DATA DA

$$\bar{A} = \frac{1}{b - a} \int_a^b A(t) dt,$$

SI CONCLUDE CHE $\eta_0(b) = 0$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

4) (b) VERIFICARE CHE $A(x) = \bar{A}$ PER OGNI $x \in [a, b]$. SUGGERIMENTO: INTEGRARE L'UGUAGLIANZA $(A(x) - \bar{A})^2 = A(x) \eta'_0(x) - \bar{A} \eta'_0(x)$ SULL'INTERVALLO (a, b) , E SFRUTTARE L'IPOTESI (15).

L'UGUAGLIANZA SUGGERITA NEL TESTO SI SPIEGA OSSERVANDO CHE

$$\begin{aligned} (A(x) - \bar{A})^2 &= (A(x) - \bar{A})(A(x) - \bar{A}) \\ &= (A(x) - \bar{A}) \eta'_0(x). \end{aligned}$$

INTEGRANDO SULL'INTERVALLO (a, b) , E SFRUTTANDO LA (15), TROVIAMO

$$\begin{aligned} \int_a^b (A(x) - \bar{A})^2 dx &= -\bar{A} \int_a^b \eta'_0(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

PERCHÉ η_0 È NULLA AGLI ESTREMI. MA ALLORA LA FUNZIONE CONTINUA $A(x) - \bar{A}$ DEVE ESSERE IDENTICAMENTE NULLA, E DA CIÒ SEGUE CHE $A(x) = \bar{A}$ IN TUTTO L'INTERVALLO $[a, b]$.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[107]

PROBLEMI AL CONTORNO

1) INDICATA CON f UNA FUNZIONE DI CLASSE $C^2(\mathbb{R})$ TALE CHE $f''(t) > 0$ PER OGNI $t \in \mathbb{R}$, SCRIVERE L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE DEL SEGUENTE FUNZIONALE:

$$F[u] = \int_a^b f(u'(x)) dx; .$$

L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE DEL FUNZIONALE F È

$$\frac{d}{dx} f'(u'(x)) = 0,$$

LA QUALE AMMETTE L'INTEGRALE PRIMO

$$f'(u'(x)) = \text{COSTANTE}. \quad (16)$$

VERIFICHIAMO CHE SE $u \in C^1([-1, 1])$ ALLORA LA (16) EQUIVALE A

$$u'(x) = \text{COSTANTE}. \quad (17)$$

SE, INFATTI, u' ASSUMESSE DUE VALORI DISTINTI $t_1 < t_2$, ALLORA PER CONTINUITÀ ASSUMEREBBE ANCHE TUTTI I VALORI NELL'INTERVALLO (t_1, t_2) .

DI CONSEGUENZA, PER LA (16) SI AVREBBE $f'(t) = \text{COSTANTE}$ PER $t \in (t_1, t_2)$, IL CHE È IMPOSSIBILE PERCHÉ $f''(t) > 0$ PER IPOTESI.

DUNQUE L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE DEL FUNZIONALE F , INTESA IN SENSO CLASSICO, SI PUÒ SCRIVERE NELLA FORMA (17).

2) TROVARE LE ESTREMALI (CIOÈ LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE) DEI FUNZIONALI DELL'ESERCIZIO 1.

LE ESTREMALI $u \in C^1([-1, 1])$ DEL FUNZIONALE F , CIOÈ LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE (17), SONO LE FUNZIONI

$$u(x) = mx + q$$

CON m E q PARAMETRI REALI.

3) FISSATE DUE COSTANTI $u_a, u_b \in \mathbb{R}$, TROVARE, FRA LE SUDETTE ESTREMALI, QUELLE CHE SODDISFANO LE CONDIZIONI $u(a) = u_a$ E $u(b) = u_b$.

QUALUNQUE SIANO u_a E u_b ESISTE UNA E UNA SOLA ESTREMALE u DEL FUNZIONALE F TALE CHE $u(a) = u_a$ E $u(b) = u_b$, ED È LA FUNZIONE

$$u(x) = \frac{u_b - u_a}{b - a} (x - a) + u_a.$$

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[108]

PROBLEMI ISOPERIMETRICI

1) TROVARE LA BASE b E L'ALTEZZA a DI UN RETTANGOLO IN MODO TALE CHE LA SUA AREA SIA 1, ED IL PERIMETRO SIA IL PIÙ PICCOLO POSSIBILE.

DI QUESTO CLASSICO PROBLEMA SONO NOTE NUMEROSE SOLUZIONI. AD ESEMPIO, PARTENDO DALLA DISUGUAGLIANZA ISOPERIMETRICA

$$A \leq \frac{L^2}{16},$$

DOVE A È L'AREA DI UN QUALUNQUE RETTANGOLO E L IL SUO PERIMETRO, E SAPENDO CHE L'UGUAGLIANZA VALE PER I QUADRATI E SOLO PER ESSI, SI CONCLUDE CHE LA BASE b E L'ALTEZZA a VANNO PRESI UGUALI FRA LORO. DUNQUE

$$a = b = 1.$$

2) TROVARE, SE ESISTONO, LA BASE b E L'ALTEZZA a DI UN RETTANGOLO IN MODO TALE CHE LA SUA AREA SIA 1, ED IL PERIMETRO SIA IL PIÙ GRANDE POSSIBILE.

I RETTANGOLI DI BASE b QUALUNQUE ED ALTEZZA $a = 1/b$ HANNO AREA 1, E PERIMETRO $L = 2(a + b) > b$. POICHÉ DUNQUE

$$\sup_{b \in (0, +\infty)} L = +\infty,$$

QUESTO PROBLEMA NON AMMETTE SOLUZIONE.

3) FISSATA UNA COSTANTE $L \in (2, \pi)$, VERIFICARE CHE SE ESISTE UNA FUNZIONE u_0 CHE MASSIMIZZA IL FUNZIONALE $F[u]$ DATO DA

$$F[u] = \int_{-1}^1 u(x) dx$$

NELL'INSIEME DELLE FUNZIONI $u \in C^2([-1, 1])$ TALI CHE $u(-1) = u(1) = 0$ E

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx = L,$$

ALLORA u_0 HA PER GRAFICO UN ARCO DI CIRCONFERENZA.

SOTTO LE CONDIZIONI INDICATE, UN'EVENTUALE MASSIMANTE u_0 SODDISFA L'EQUAZIONE

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}(u(x), u'(x)) \\ = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u(x), u'(x)) \end{aligned} \quad (18)$$

DOVE $\mathcal{L}(u, u') = f(u) - \lambda g(u')$, $f(u) = u$, $g(u') = \sqrt{1 + (u')^2}$, E λ È UN PARAMETRO INCOGNITO. POICHÉ LE DERIVATE DI \mathcal{L} HANNO LE SEGUENTI ESPRESSIONI:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, u') &= 1, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}(u, u') &= \frac{-\lambda u'}{\sqrt{1 + (u')^2}}, \end{aligned}$$

L'EQUAZIONE (18) SI SCRIVE

$$\frac{d}{dx} \frac{-\lambda u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} = 1,$$

E PERCIÒ IL PARAMETRO λ DEVE ESSERE DIVERSO DA ZERO. QUINDI POSSIAMO ANCHE SCRIVERE

$$\frac{d}{dx} \frac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} = -\frac{1}{\lambda}. \quad (19)$$

INTEGRANDO AMBO I MEMBRI TROVIAMO

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} = -\frac{x - x_0}{\lambda}, \quad (20)$$

DOVE x_0 DENOTA UNA COSTANTE DI INTEGRAZIONE, E IL SECONDO MEMBRO $s = -(x - x_0)/\lambda$ DEVE ASSUMERE VALORI NELL'INTERVALLO $(-1, 1)$ AFFINCHÉ L'EQUAZIONE SIA SODDISFATTA.

PIÙ ESATTAMENTE, x_0 DENOTA UN PUNTO DELL'INTERVALLO $(-1, 1)$ DOVE $u'(x_0) = 0$. L'ESISTENZA DI UN TALE PUNTO DISCENDE DAL TEOREMA DI ROLLE.

POICHÉ LA FUNZIONE $s(t) = t/\sqrt{1 + t^2}$ È INVERTIBILE, E LA SUA INVERSA È $t(s) = s/\sqrt{1 - s^2}$, $s \in (-1, 1)$, DALLA (20) RICAVIAMO

$$u'(x) = \frac{-\frac{x-x_0}{\lambda}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right)^2}}.$$

INTEGRANDO ANCORA UNA VOLTA OTTENIAMO FINALMENTE

$$u(x) - u(x_0) + \lambda = \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right)^2}.$$

ELEVANDO AMBO I MEMBRI AL QUADRATO SI RICONOSCE CHE IL GRAFICO DI u È UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI RAGGIO $R = |\lambda|$ CENTRATO NEL PUNTO $C = (x_0, u(x_0) - \lambda)$, E LA VERIFICA PUÒ DIRSI CONCLUSA.

CALCOLO DEI PARAMETRI

TROVIAMO IL VALORE NUMERICO DEI PARAMETRI x_0 E λ , NON RICHiesto DALL'ESERCIZIO.

POICHÉ $u(-1) = u(1)$, OCCORRE CHE $x_0 = 0$, DUNQUE

$$u(x) - u(0) + \lambda = \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}. \quad (21)$$

INOLTRE, PER LA MASSIMANTE u_0 DOVRÀ AVERSI $\lambda = R > 0$, E PERCIÒ

$$u_0(x) = u_0(0) - R + \sqrt{R^2 - x^2}$$

CON $R \geq 1$ AFFINCHÉ u_0 SIA DEFINITA SULL'INTERVALLO $[-1, 1]$.

SI NOTI CHE CON $\lambda = -R$ IL GRAFICO DI $u(x)$ È UN ARCO DI CIRCONFERENZA CHE RIVOLGE LA CONCAVITÀ VERSO IL BASSO, DUNQUE $u(x)$ NON PUÒ ESSERE UNA MASSIMANTE PER F .

INFINE, AFFINCHÉ u_0 SIA NULLA AGLI ESTREMI OCCORRE CHE $u_0(0) = R - \sqrt{R^2 - 1}$, QUINDI

$$u_0(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - 1}.$$

IL VALORE DI R SI PUÒ RICAVARE RISOLVENDO L'EQUAZIONE $2R \arcsen \frac{1}{R} = L$ CON I METODI DELL'ANALISI NUMERICA.