Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Problemi classici

Esercizi

1) Con riferimento al funzionale $F[u]$ dato da:

$$F[u] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{|u(x)|}}\, dx,$$

dove b è una costante positiva, svolgere i seguenti esercizi. (a) Calcolare $F[u_m]$, essendo u_m la funzione $u_m(x) = mx$, ed m un parametro negativo. (b) Stabilire se il valore numerico di $F[u_m]$ è monotono rispetto ad m. (c) Trovare il limite di $F[u_m]$ per $m \to -\infty$. (d) Dare un'interpretazione fisica degli esercizi precedenti, riconducendoli al problema della brachistocrona.

(continua a fianco)

2) Con riferimento al funzionale $G[u]$ dato da:

$$G[u] = \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{1 + (u'(\rho))^2},$$

dove R è una costante positiva, svolgere i seguenti esercizi. (a) Calcolare $G[u_h]$, essendo u_h la funzione $u_h(\rho) = h\rho/R$, e h un parametro positivo. (b) Stabilire se il valore numerico di $G[u_h]$ è monotono rispetto ad h. (c) Trovare il limite di $G[u_h]$ per $h \to +\infty$. (d) Dare un'interpretazione fisica degli esercizi precedenti, riconducendoli al problema del corpo di minima resistenza di Newton.

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Definizioni elementari

Esercizi

1) Indicata con R una costante positiva, determinare l'estremo inferiore, e, se esistono, il valore minimo ed i minoranti del funzionale

$$G[u] = \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{1 + (u'(\rho))^2}$$

al variare di u nella classe $C^1([0, R])$.

(continua a fianco)

2) Con riferimento al funzionale $G[u]$ dell'esercizio 1, trovare una successione di funzioni $u_n(\rho)$ appartenenti alla classe $C^1([0, R])$ e tali che il limite $\lim_{n\to+\infty} G[u_n]$ sia uguale all'estremo inferiore di G determinato precedentemente.

3) Determinare l'estremo superiore, e, se esistono, il valore massimo ed i maggioranti del funzionale $G[u]$ dell'esercizio 1 al variare di u nella classe $C^1([0, R])$.

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Disuguagl. isoperim.

Esercizi

1) Dico che esistono un esponente $\alpha \neq 2$ ed una costante $c \in \mathbb{R}$ tali che per ogni figura piana Ω, limitata e regolare, risulta:

$$|\Omega| \leq c\,|\partial\Omega|^{\alpha}.$$

Confutare questa affermazione.

(continua a fianco)

2) Sapendo che fra tutti i solidi limitati $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la cui frontiera $\partial\Omega$ è una superficie regolare a pezzi ed ha area assegnata quello di volume massimo è la sfera, determinare una costante c in modo tale che risulti

$$|\Omega| \leq c\,|\partial\Omega|^{\frac{3}{2}}$$

per qualunque solido limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la cui frontiera è una superficie regolare a pezzi.

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Problemi elementari

Esercizi

1) Si consideri un generico triangolo avente un lato di lunghezza assegnata b_0, e perimetro assegnato $L > 2\,b_0$. Determinare gli altri due lati in modo tale che l'area sia la più grande possibile.

2) Determinare l'angolo α tra due segmenti consecutivi OP e PQ di lunghezza data, in modo tale che l'area del triangolo OPQ sia la più grande possibile.

(continua a fianco)

3) Verificare che la funzione $f(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{t}$ è strettamente crescente sull'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$. Suggerimento: scrivere $\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$ e sfruttare il fatto che $\operatorname{sen} \alpha < \alpha$ per ogni $\alpha > 0$.

4) (a) Per ogni $L \in (0, +\infty)$ ed ogni intero $N \geq 3$, trovare l'area A_N del poligono regolare con N lati e perimetro L. (b) Calcolare il limite

$$\lim_{N \to +\infty} A_N.$$

(c) Indicata con A l'area del cerchio la cui circonferenza ha lunghezza L, stabilire per quali interi $N \geq 3$ risulta $A_N < A$.

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Lunghezza del grafico

Esercizi

Indicate con b ed u_b due costanti reali, di cui $b > 0$, si consideri il funzionale $J[u]$ dato da

$$J[u] = \int_0^b \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx$$

dove u varia nell'insieme X delle funzioni di classe $C^1([0, b])$ tali che $u(0) = 0$ e $u(b) = u_b$.

(continua a fianco)

1) Dare un'interpretazione geometrica di $J[u]$.

2) Posto $u_b = 0$, trovare il minimo di $J[u]$.

3) Fissato arbitrariamente $u_b \in \mathbb{R}$, trovare il minimo di $J[u]$. Suggerimento: qualunque funzione convessa e derivabile $f(t)$, della variabile $t \in \mathbb{R}$, soddisfa la disuguaglianza $f(t) \ge f(t_0) + f'(t_0)\,(t - t_0)$ per ogni $t, t_0 \in \mathbb{R}$. Ponendo $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$, $t = u'(x)$ e $t_0 = u_b/b$ si ricava...

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Equazione di Eulero

Esercizi

1) Fissato un intervallo limitato $(a, b) \neq \emptyset$, scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange dei seguenti funzionali:

$$F[u] = \int_a^b (u'(x))^2\, dx; \quad J[u] = \int_a^b \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx.$$

2) Trovare le estremali (cioè le soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange) dei funzionali dell'esercizio 1.

3) Fissate due costanti $u_a, u_b \in \mathbb{R}$, trovare, fra le suddette estremali, quelle che soddisfano le condizioni $u(a) = u_a$ e $u(b) = u_b$.

(continua a fianco)

4) Considerata una funzione $A(x)$, continua sull'intervallo limitato $[a, b]$, indichiamo con $\overline{A}$ la sua media integrale, e supponiamo che risulti

$$\int_a^b A(x)\, \eta'(x)\, dx = 0 \tag{1}$$

per ogni $\eta \in C^1([a, b])$ tale che $\eta(a) = \eta(b) = 0$.
(a) Verificare che la funzione $\eta_0(x)$ data da

$$\eta_0(x) = \int_a^x (A(t) - \overline{A})\, dt$$

è di classe $C^1([a, b])$ e si annulla agli estremi. (b) Verificare che $A(x) = \overline{A}$ per ogni $x \in [a, b]$. Suggerimento: integrare l'uguaglianza $(A(x) - \overline{A})^2 = A(x)\, \eta_0'(x) - \overline{A}\, \eta_0'(x)$ sull'intervallo (a, b) e sfruttare l'ipotesi (1).

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Problemi al contorno

Esercizi

1) Fissato un intervallo limitato $(a, b) \neq \emptyset$, e indicata con f una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ tale che $f''(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange del seguente funzionale:

$$F[u] = \int_a^b f(u'(x))\, dx.$$

(continua a fianco)

2) Trovare le estremali (cioè le soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange) del funzionale dell'esercizio 1.

3) Fissate due costanti $u_a, u_b \in \mathbb{R}$, trovare, fra le suddette estremali, quelle che soddisfano le condizioni $u(a) = u_a$ e $u(b) = u_b$.

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Probl. isoperimetrici

Esercizi

1) Trovare la base b e l'altezza a di un rettangolo in modo tale che la sua area sia 1, ed il perimetro sia il più piccolo possibile.

2) Trovare, se esistono, la base b e l'altezza a di un rettangolo in modo tale che la sua area sia 1, ed il perimetro sia il più grande possibile.

(continua a fianco)

3) Fissata una costante $L \in (2, \pi)$, verificare che se esiste una funzione u_0 che massimizza il funzionale $F[u]$ dato da

$$F[u] = \int_{-1}^{1} u(x)\, dx$$

nell'insieme delle funzioni $u \in C^2([-1, 1])$ tali che $u(-1) = u(1) = 0$ e

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx = L,$$

allora u_0 ha per grafico un arco di circonferenza.