

Joseph-Louis Lagrange
(1736–1813)



Leonhard Euler
(1707–1783)

METODI CLASSICI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

PROF. ANTONIO GRECO

<http://people.unica.it/antoniogreco>

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

6-4-2026

XXXIV CONVEGNO NAZIONALE DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI
RICCIONE, 10–14 FEBBRAIO 2025

<https://sites.google.com/uniroma1.it/cncdv-2025>

Indice generale

PROBLEMI CLASSICI

Il calcolo delle variazioni	5
Il problema della brachistocrona	5
Il corpo di minima resistenza	9
I funzionali	12
Il problema isoperimetrico	13
Il problema di Didone	13
Area di un poligono	14
Il problema della catenaria	15
Il problema di Plateau	16
Il funzionale di Dirichlet	16
Il problema delle geodetiche	17

CONCETTI ELEMENTARI

Definizioni	19
Massimanti e minimanti	21
Teorema di Fermat	21
Teorema di Weierstrass	22

PROBLEMI ISOPERIMETRICI

nella classe dei triangoli	24
nella classe dei rettangoli	25
nella classe degli ennagoni	26
nella classe delle figure piane	33
La soluzione di Peter Lax	35
Il caso N -dimensionale	36

METODI CLASSICI

Premessa	38
L'equazione di Eulero-Lagrange	39
Come la si usa	39
Il lemma fondamentale	40
Ricavare l'equazione di Eulero	41
Forma integrale dell'equazione	42
Un teorema di regolarità	43
Una condizione sufficiente	44
I problemi isoperimetrici	45
Il metodo dei moltiplicatori	46

APPLICAZIONE ALLA BRACHISTOCRONA

La cicloide	48
Legge oraria del moto	48
Equazione di Eulero	49
Il bootstrap	49
Soluzione dell'equazione di Eulero	50
Interpretazione ottica	50
Omotetia	51
Unicità	51
Condizioni sufficienti	51
Un funzionale convesso	52

APPLICAZIONE AL PROBLEMA DI NEWTON

Le funzioni ammissibili	54
Valori agli estremi	55
Equazione di Eulero-Lagrange	55
Esistenza della soluzione	56
Condizione di trasversalità	56
Cambiamento di variabile	56
Generalizzaz. del metodo classico	57
Regolarità della soluzione	57
Espressione della soluzione	58
Unicità della soluzione	58

APPLICAZIONE ALLA CATENARIA

Equazione di Eulero	60
Convessità della catenaria	60
Simmetria	60
Integrazione dell'equazione	61

APPLICAZIONE AL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

Formulazione del problema	63
Un problema ausiliario	63
Conclusione	63

Indice generale

APPLICAZIONE AL PROBL. DELLE GEO- DETTICHE

Il semipiano iperbolico	65
Lunghezza di una curva	65
Scelta del parametro	65
Equazioni di Eulero-Lagrange .	66
Geodetiche del semipiano iper- bolico	66
Curve di minima lunghezza . .	67

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Integrali multipli	70
Equazioni notevoli	70
Problemi connessi	71
Rovesciamento del punto di vista	71

APPENDICE

Successione di triangoli	73
Convessificazione di un poligono	74
Funzioni iperboliche	76

BIBLIOGRAFIA	79
--------------	----

PROBLEMI CLASSICI

OGGETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI CONSISTE NELLO STUDIO DEI MINIMI DI FUNZIONI IL CUI DOMINIO È UN INSIEME DI... FUNZIONI!

I PROBLEMI PIÙ ANTICHI SONO STATI IL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA ED IL PROBLEMA DI NEWTON DEL CORPO DI MINIMA RESISTENZA.

VEDIAMO IN CHE COSA CONSISTONO I DUE PROBLEMI SUDDETTI, AD UN DUPLICE SCOPO:

1. PRECISARE MEGLIO L'OGGETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI;
2. MOSTRARE LE ORIGINI DI UNA BRANCA DELLA MATEMATICA, CONTRASTANDO LA TESI CHE ATTRIBUISCE LO SVILUPPO DELLA NOSTRA DISCIPLINA ESCLUSIVAMENTE ALLA VOLONTÀ DI GENERALIZZARE ED ORGANIZZARE LE CONOSCENZE PRECEDENTI.

UN'INTERESSANTE INTRODUZIONE SI PUÒ TROVARE, AD ESEMPIO, NEL PRIMO VOLUME DEL TRATTATO DI TONELLI [25]. VEDERE ANCHE IL LIBRO DI MORREY [18], IL COURANT-HILBERT [5] E LA STORIA DELLA MATEMATICA DI KLINE [14].

IN PARTICOLARE, IL NOME DI "CALCOLO DELLE VARIAZIONI" SI ISPIREREBBE AD UN'OPERA DI EULERO DEL 1764 INTITOLATA "ELEMENTA CALCULI VARIATIONUM": VEDERE [14, PAG. 680].

UNA BREVE SINTESI, RIVOLTA AGLI STUDENTI, SI PUÒ TROVARE IN [1] ED IN [19].

IL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA

GALILEO GALILEI STUDIÒ IL PIANO INCLINATO (SCHEMATIZZABILE CON UN SEGMENTO INCLINATO) E LO CONFRONTÒ CON L'ARCO DI CIRCONFERENZA, GIUNGENDO ALLA CONCLUSIONE CHE

"brevissimo sopra tutti i tempi sarà quello della caduta per l'arco".

GLI STUDI DI GALILEO FURONO ESTESI PRENDENDO IN CONSIDERAZIONE ANCHE ALTRE CURVE.

IL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA FU POSTO COME UNA SFIDA AI SUOI COLLEGHI DAL MATEMATICO JOHANN BERNOULLI, NEL SEICENTO.

FISSATI DUE PUNTI A E B IN UN PIANO VERTICALE, IL PROBLEMA CONSISTE NEL TROVARE, FRA TUTTE LE CURVE AVENTI PER ESTREMI I DUE PUNTI SUDDETTI, QUELLA CHE OFFRE IL MINIMO TEMPO DI PERCORRENZA (TRASCURANDO I RALLENTAMENTI DERIVANTI DALL'ATTRITO).

TALE CURVA VIENE DETTA BRACHISTOCRONA, DAL GRECO BRÀCHISTOS (IL PIÙ BREVE) E CRONOS (TEMPO).

IMPORTANZA DEL PROBLEMA

IL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA È ANCORA ATTUALE PERCHÉ LA SUA FORMULAZIONE ED I SUOI METODI RISOLUTIVI SI APPLICANO A PROBLEMI APPARENTEMENTE DIVERSI, COME LA PROPAGAZIONE DELLE ONDE RADIO.

IL PROBLEMA È IMPORTANTE ANCHE PERCHÉ HA DATO ORIGINE AL CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

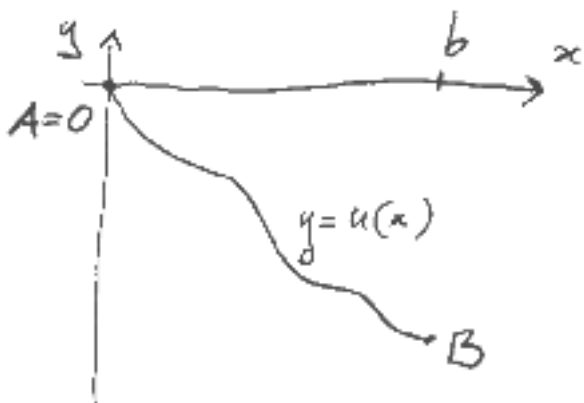
UN MODELLO MATEMATICO

COLLOCHIAMO L'ORIGINE DEL PIANO xy NEL PRIMO ESTREMO A , E CONSIDERIAMO UNA CURVA PIANA γ GRAFICO DI UNA FUNZIONE $u \in C^1([0, b])$, ESSENDO $b > 0$ L'ASCISSA DEL SECONDO ESTREMO B .

OSSERVIAMO, PER INCISO, CHE LA LETTERA u UTILIZZATA PER DENOTARE LA FUNZIONE INCOGNITA È L'INIZIALE DELLA PAROLA INGLESE *unknown*.

SUPPONENDO $u(x) < 0$ PER $x \in (0, b]$, VOGLIAMO ESPRIMERE LA DURATA DEL MOTO DI UNA PARTICELLA IN CADUTA DAL PUNTO A AL PUNTO B .

IN QUESTA FASE NON C'È UN TEOREMA DA DIMOSTRARE. ILLUSTRIAMO, INVECE, UN TIPICO MODELLO DEL PROBLEMA CONSIDERATO.



VELOCITÀ DELLA PARTICELLA

LA VELOCITÀ v DURANTE IL MOTO SI RICAVA DAL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$K + U = \text{cost.} \quad (1)$$

DOVE $K = \frac{1}{2}mv^2$ È L'ENERGIA CINETICA, $U = mgy$ L'ENERGIA POTENZIALE, m LA MASSA DELLA PARTICELLA E g L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ.

ESSENDO $v = 0$ NEL PUNTO $A = (0, 0)$, SI DEDUCE CHE LA COSTANTE NELLA (1) È NULLA, E PERCIÒ RISULTA

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = 0$$

DURANTE TUTTO IL MOTO. DA QUI SI OTTIENE

$$v = \sqrt{-2gy} = \sqrt{2g|y|}. \quad (2)$$

INDICATI CON $t = 0$ E $t = T$ L'ISTANTE INIZIALE E L'ISTANTE FINALE DEL MOTO, PENSIAMO L'ASCISSA CURVILINEA s LUNGO LA CURVA γ COME UNA FUNZIONE DEL TEMPO t DI CLASSE $C^1([0, T])$ LA CUI DERIVATA $v = ds/dt$ È DATA DALLA (2).

LA (2) MOSTRA CHE $ds/dt > 0$ NEI PUNTI DI γ DOVE $y < 0$, CIOÈ IN TUTTI I PUNTI TRANNE A .

PERCIÒ, PER IL TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA, LA VARIABILE t È UNA FUNZIONE DI s TALE CHE

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2g|y|}} \text{ PER } s > 0. \quad (3)$$

TEMPO DI TRANSITO

L'ASCISSA CURVILINEA s È LA LUNGHEZZA DELLA PARTE DI γ TRA IL PRIMO ESTREMO A ED IL GENERICO PUNTO $P = (x, u(x))$ DEL GRAFICO DI u .

SAPPIAMO CHE s È UNA FUNZIONE DI x SODDISFACENTE LA RELAZIONE

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (u'(x))^2}.$$

RICORDANDO LA (3), ED ESSENDO $y = u(x)$, SI DEDUCE CHE LA DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA $t(s(x))$ È DATA DA

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2g|u(x)|}} \text{ PER } x > 0,$$

E PERCIÒ, PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE, IL TEMPO DI TRANSITO T È DATO DA

$$T = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2g|u(x)|}} dx. \quad (4)$$

IL TEMPO DI TRANSITO T DIPENDE DALLA FUNZIONE u , PERCIÒ SI PUÒ SCRIVERE COME $T(u)$, O ANCHE $T[u]$ PER EVITARE CONFUSIONE CON LA FUNZIONE COMPOSTA DI DUE FUNZIONI DI VARIABILE REALE.

MODELLIZZAZIONE DEL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA

IL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA SI TRADUCE NEL TROVARE, FRA TUTTE LE FUNZIONI $u \in C^1([0, b])$ TALI CHE: $u(x) < 0$ PER $x \in (0, b]$, $u(0) = 0$ E $u(b) =$ L'ORDINATA DEL SECONDO ESTREMO B , QUELLA FUNZIONE u_0 (SE ESISTE) TALE CHE

$$T[u_0] \leq T[u] \text{ PER OGNI } u. \quad (5)$$

NOTAZIONE DI LEIBNIZ

SOLITAMENTE L'ESPRESSIONE (4) DEL TEMPO DI TRANSITO T SI RICAVA CON PIÙ DISINVOLTURA E MENO CALCOLI. SCRIVIAMO LA (2) COME

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g|u(x)|}.$$

TRATTANDO I DIFFERENZIALI COME SE FOSSERO QUANTITÀ ALGEBRICHE, RICAVIAMO

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g|u(x)|}}. \quad (6)$$

PER IL TEOREMA DI PITAGORA, SI HA $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. DA QUI, ESSENDO $y = u(x)$, SEGUE $ds = \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$. SOSTITUENDO NELLA (6) OTTENIAMO

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2} dx}{\sqrt{2g|u(x)|}}.$$

INFINE, INTEGRANDO AMBO I MEMBRI SI RICAVA LA (4).

L'EFFICACIA DI PROCEDIMENTI COME QUESTO STA ALLA BASE DEL SUCCESSO DELLA NOTAZIONE DI LEIBNIZ.

ALLO STESSO TEMPO, LA DEBOLEZZA DI TALI PROCEDIMENTI SUL PIANO DEL RIGORE HA MOTIVATO LO SVILUPPO DELLA TEORIA.

AD ESEMPIO, L'INTEGRALE NELLA (4) SI PUÒ ESPRIMERE COME UN INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE:

$$T = \int_{\gamma} \frac{ds}{v}.$$

LO SI VEDE APPLICANDO LA DEFINIZIONE DI QUEST'ULTIMO INTEGRALE.

LA CONVERGENZA DELL'INTEGRALE (4)

L'INTEGRALE (4), CHE ESPRIME IL TEMPO DI TRANSITO T , NON PUÒ ESSERE INTESO NEL SENSO DI RIEMANN SE LA FUNZIONE $u \in C^1([0, b])$, CHE STA AL DENOMINATORE, SI ANNULLA NELL'ORIGINE.

TUTTAVIA, ESSENDO LA FUNZIONE INTEGRANDA CONTINUA E NON NEGATIVA IN $(0, b]$, L'INTEGRALE (4) È BEN DEFINITO NEL SENSO IMPROPRIO, DETTO ANCHE GENERALIZZATO.

INOLTRE L'INTEGRALE (4) È BEN DEFINITO ANCHE NEL SENSO DI LEBESGUE, ED IL SUO VALORE COINCIDE CON QUELLO DELL'INTEGRALE IMPROPRIO.

AFFINCHÉ L'INTEGRALE (4) ABBAIA UN VALORE FINITO, È SUFFICIENTE CHE $u'(0) < 0$. IN TAL CASO, INFATTI, POSSIAMO DEFINIRE $\varepsilon_0 = |u'(0)|/2 > 0$ E POICHÉ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u(x)}{x} = u'(0)$$

ESISTE $r > 0$ TALE CHE PER OGNI $x \in (0, r)$ ABBIAMO

$$\frac{|u(x)|}{x} > \varepsilon_0. \quad (7)$$

PERCIÒ SCRIVIAMO INNANZITUTTO

$$T = \int_0^r \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2g|u(x)|}} dx + \int_r^b \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2g|u(x)|}} dx$$

E DA QUI, POSTO $M_r = \max_{[0, r]} |u'(x)|$, OTTENIAMO

$$T \leq \int_0^r \frac{\sqrt{1 + M_r^2}}{\sqrt{2g\varepsilon_0 x}} dx + \int_r^b \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2g|u(x)|}} dx.$$

ORA L'ULTIMO INTEGRALE PUÒ INTENDERSI NEL SENSO DI RIEMANN, MENTRE IL PRECEDENTE È UN NOTO INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGENTE.

PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO, CONCLUDIAMO CHE $T < +\infty$.

ALLA STESSA CONCLUSIONE SI PERVIENE ANCHE SE u NON È DERIVABILE NELL'ORIGINE, PURCHÉ ESISTANO $\varepsilon_0 > 0$ ED $r > 0$ TALI CHE VALGA LA (7) NELL'INTERVALLO $(0, r)$.

SE, INVECE, $u'(0) = 0$, L'INTEGRALE (4) PUÒ ANCORA AVERE UN VALORE FINITO, COME AD ESEMPIO NEL CASO IN CUI $|u(x)| = x^{3/2}$ PER x VICINO A 0.

IN QUESTO CASO, PERÒ, IL PUNTO MATERIALE, COLLOCATO NELL'ORIGINE A RIPOSO, SI TROVA IN EQUILIBRIO E PERCIÒ NON SI METTE IN MOTO.

PER MANTENERE IL SIGNIFICATO FISICO DEL PROBLEMA, POSSIAMO CONSIDERARE FUNZIONI $u \in C^1([0, b])$ TALI CHE: $u(x) < 0$ PER $x \in (0, b]$, $u'(0) < 0$, $u(0) = 0$ E $u(b) = L$ L'ORDINATA DEL SECONDO ESTREMO B .

VEDREMO PIÙ AVANTI CHE IL PROBLEMA NON AMMETTE SOLUZIONE IN TALE CLASSE: UNA FUNZIONE u_0 SODDISFACENTE LA (5) SI POTRÀ TROVARE SOSTITUENDO LO SPAZIO $C^1([0, b])$ CON $C^1((0, b]) \cap C^0([0, b])$ (PAG. MC51).

IL PROBLEMA DI NEWTON DEL CORPO DI MINIMA RESISTENZA

NEI *Principia* NEWTON SI POSE IL PROBLEMA DI TROVARE LA FORMA DA DARE ALL'ESTREMITÀ DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE PER MINIMIZZARE LA RESISTENZA ALL'AVANZAMENTO IN UN FLUIDO.

ESAMINIAMO UN MODELLO MATEMATICO DEL SUDDETTO PROBLEMA PER GLI SCOPI INDICATI A PAG. Mc5 CON IL N. 1 E 2, SENZA LA PRETESA DI TRARRE INDICAZIONI COSTRUTTIVE VALIDE PER L'INDUSTRIA MODERNA.

UTILizzerEMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE CON IL CORPO, LA CUI SUPERFICIE D'IMPATTO SARÀ RAPPRESENTATA COME UNA SUPERFICIE REGOLARE A PEZZI E GRAFICO DI UNA FUNZIONE RADIALE $u(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

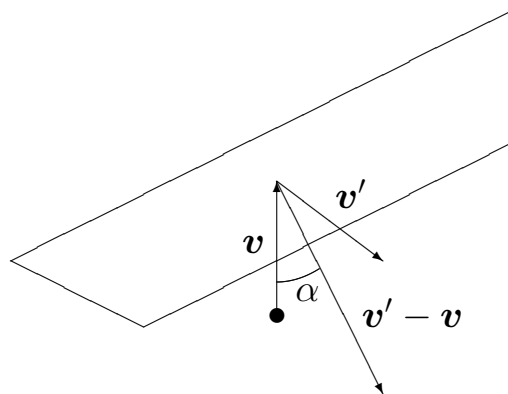
INIZIALMENTE, RAPPRESENTIAMO IL FLUIDO INTORNO AL CORPO COME UN INSIEME DI PARTICELLE IN MOTO RETTILINEO UNIFORME NELLA DIREZIONE DELL'ASSE DEL CORPO STESSO.

INFINE PASSEREMO AD UN MODELLO CONTINUO, OTTENENDO LA CLASSICA ESPRESSIONE (11).

LE LEGGI FISICHE ALLA BASE DEL RAGIONAMENTO SONO LA SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA NEWTONIANA (O MEGLIO IL TEOREMA DELL'IMPULSO) E LA LEGGE DI SNELL DELLA RIFLESSIONE.

URTO DI UNA SINGOLA PARTICELLA

CONSIDERIAMO IL CASO DI UNA SUPERFICIE PIANA E LIMITATA NELLO SPAZIO xyz , URTATA DA UNA SINGOLA PARTICELLA DI MASSA m CHE PROCEDE CON VELOCITÀ $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{k}}$, ESSENDO $\hat{\mathbf{k}}$ IL VERSORE DELL'ASSE z , E $v > 0$ UNA COSTANTE.



LA VARIAZIONE $\Delta \mathbf{p}$ DELLA QUANTITÀ DI MOTO DELLA PARTICELLA A SEGUITO DELL'URTO È DATA DA $\Delta \mathbf{p} = m (\mathbf{v}' - \mathbf{v})$, ESSENDO \mathbf{v}' LA VELOCITÀ DELLA STESSA DOPO L'URTO.

PER LA LEGGE DI SNELL DELLA RIFLESSIONE, IL VETTORE $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$ È PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE.

INDICATO CON \mathbf{n} IL VERSORE NORMALE AVENTE VERSO OPPOSTO A $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$, E CON $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ L'ANGOLO TRA \mathbf{n} E LA VERTICALE, COSICCHÉ $\cos \alpha = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}} > 0$, RISULTA

$$\|\mathbf{v}' - \mathbf{v}\| = 2v \cos \alpha$$

E PERCIÒ LA COMPONENTE VERTICALE $\Delta \mathbf{p}_{\text{vert}}$ DI $\Delta \mathbf{p} = -2mv \mathbf{n} \cos \alpha$ È

$$\Delta \mathbf{p}_{\text{vert}} = -2mv \hat{\mathbf{k}} \cos^2 \alpha. \quad (8)$$

PASSIAMO ORA A CONSIDERARE GLI URTI DELLE ALTRE PARTICELLE.

GLI URTI NELL'INTERVALLO Δt

LA MASSA M DI TUTTE LE PARTICELLE CHE URTANO LA SUPERFICIE NELL'INTERVALLO DI TEMPO Δt È

$$M = \mu A v \Delta t, \quad (9)$$

ESSENDO μ LA DENSITÀ DEL FLUIDO ED A L'AREA DELLA PROIEZIONE DELLA SUPERFICIE STESSA SUL PIANO ORIZZONTALE.

PER VEDERLO, CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI LE PARTICELLE SONO LIBERE DI PASSARE ATTRAVERSO LA SUPERFICIE, GRAFICO DI UNA FUNZIONE $z = w(x, y)$ PER $(x, y) \in A$.

IN TAL CASO, NELL'INTERVALLO DI TEMPO Δt ESSE RIEMPIONO IL SOLIDO $\Omega = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in A, w(x, y) < z < w(x, y) + v \Delta t \}$, IL CUI VOLUME È

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \iint_A (w(x, y) + v \Delta t) dx dy \\ &- \iint_A w(x, y) dx dy = Av \Delta t, \end{aligned}$$

COME SI PUÒ ANCHE OTTENERE INVOCANDO IL PRINCIPIO DI CAVALIERI. ESSENDO $M = \mu |\Omega|$ SI VERIFICA LA (9).

SOSTITUENDO M AL POSTO DI m NELLA (8) SI TROVA LA COMPONENTE VERTICALE $\Delta \mathbf{P}_{\text{vert}}$ DELLA VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO DI TUTTE LE PARTICELLE CHE URTANO LA SUPERFICIE PIANA NELL'INTERVALLO Δt :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{P}_{\text{vert}} &= -2 M v \hat{\mathbf{k}} \cos^2 \alpha \\ &= -2 \mu A v^2 \Delta t \hat{\mathbf{k}} \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

DALLA SUPERFICIE PIANA A QUELLA DI ROTAZIONE

TRASPORTIAMO L'ESPRESSIONE (10) AL CASO DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE, GRAFICO DI UNA FUNZIONE RADIALE $w(x, y) = u(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, DI CLASSE C^1 NEL DISCO CHIUSO \bar{B}_R CENTRATO NELL'ORIGINE E DI RAGGIO $R > 0$.

SOSTITUENDO L'AREA A NELLA (10) CON L'ELEMENTO D'AREA $dx dy$ E INTEGRANDO, SI OTTIENE

$$\Delta \mathbf{P}_{\text{vert}} = -2 \mu v^2 \Delta t \hat{\mathbf{k}} \int_{B_R} (\cos^2 \alpha) dx dy.$$

DATA LA SIMMETRIA DELLA SUPERFICIE, LA COMPONENTE ORIZZONTALE DEL VETTORE $\Delta \mathbf{P}$ SI CONSIDERA NULLA PERCHÉ I CONTRIBUTI ORIZZONTALI DEGLI URTI DELLE DIVERSE PARTICELLE SI ANNULLANO SOMMANDOSI TRA LORO, DUNQUE $\Delta \mathbf{P} = \Delta \mathbf{P}_{\text{vert}}$.

PER L'IDENTITÀ $\cos^2 \alpha = (1 + \text{tg}^2 \alpha)^{-1}$, E POICHÉ PER IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA SI HA $|u'(\rho)| = |\text{tg} \alpha|$, PASSANDO A COORDINATE POLARI POSSIAMO SCRIVERE

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{P} &= -2 \mu v^2 \Delta t \hat{\mathbf{k}} \int_{B_R} \frac{dx dy}{1 + (u'(\rho))^2} \\ &= -4\pi \mu v^2 \Delta t \hat{\mathbf{k}} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{1 + (u'(\rho))^2}. \end{aligned}$$

PER LA SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA, LA FORZA COSTANTE \mathbf{F} DA APPLICARE AL CORPO PER MANTENERLO IN MOVIMENTO A VELOCITÀ v È DATA DA $\mathbf{F} = \Delta \mathbf{P} / \Delta t$, E CIOÈ

$$\mathbf{F} = -4\pi \mu v^2 \hat{\mathbf{k}} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{1 + (u'(\rho))^2}. \quad (11)$$

IL PROBLEMA VARIAZIONALE DI NEWTON

MENTRE LA DENSITÀ μ E LA VELOCITÀ v SI CONSIDERANO COSTANTI, L'INTEGRALE NELLA (11) DIPENDE DALLA FUNZIONE u : ESSO VIENE DETTO "FATTORE DI FORMA", E LO INDICHEREMO CON $G[u]$. PONIAMO DUNQUE

$$G[u] = \int_0^R \frac{\rho d\rho}{1 + (u'(\rho))^2}. \quad (12)$$

FRA TUTTE LE FUNZIONI $u \in C^1([0, R])$, CI DOMANDIAMO SE NE ESISTE UNA, CHE INDICHIAMO CON u_0 , TALE CHE

$$G[u_0] \leq G[u] \text{ PER OGNI } u.$$

LO STUDENTE PUÒ FARE QUALCHE OSSERVAZIONE IN MERITO SVOLGENDO GLI ESERCIZI GUIDATI DELLA SERIE [101].

NOTE SUL PROBLEMA DI NEWTON

NEL MODELLO TESTÉ SVILUPPATO SI PRESUPPONE CHE CIASCUNA PARTICELLA DEL FLUIDO URTI IL CORPO NON PIÙ DI UNA VOLTA.

OCCORRE DUNQUE CHE LA DENSITÀ μ DEL FLUIDO SIA SUFFICIENTEMENTE PICCOLA (FLUIDO RAREFATTO).

RESTA ESCLUSO, INOLTRE, IL CASO DI CORPI CON UNA RIENTRANZA SULLA PUNTA.

QUEST'ULTIMA CONDIZIONE SI TRADUCE MATEMATICAMENTE CON LA RICHIESTA CHE LA FUNZIONE $u(\rho)$ NELLA (12) SIA MONOTONA NON DECRESCENTE.

IN OGNI CASO IL MODELLO DI NEWTON NON TIENE CONTO DEI FENOMENI DI VORTICITÀ CHE SI MANIFESTANO SULLA PARTE POSTERIORE DEL CORPO.

LA FINALITÀ DELLO STUDIO DEL SUDDETTO MODELLO SONO QUELLE ELENATE A PAG. Mc5 CON I NN. 1 E 2.

I FUNZIONALI

IL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA ED IL PROBLEMA DI NEWTON DEL CORPO DI MINIMA RESISTENZA CONSISTONO NEL MINIMIZZARE UN'OPPORTUNA FUNZIONE $F[u]$ ESPRESSA TRAMITE UN INTEGRALE DEL TIPO

$$F[u] = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx,$$

DOVE f È UNA FUNZIONE DATA DETTA TALVOLTA “LAGRANGIANA”.

IN QUESTO TIPO DI PROBLEMI L'INCOGNITA È UNA FUNZIONE, ANZICHÉ UN NUMERO COME PER LE EQUAZIONI ALGEBRICHE.

INOLTRE LA FUNZIONE OBIETTIVO $F[u]$, CIOÈ LA FUNZIONE DA MINIMIZZARE, PRENDE COME ARGOMENTO UNA FUNZIONE u , E NON UNA VARIABILE REALE.

PERCIÒ F SI CHIAMA “FUNZIONALE” (INGL. “FUNCTIONAL”), O “FUNZIONALE INTEGRALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI”, OPPURE ANCORA “INTEGRALE VARIAZIONALE” (INGL. “VARIATIONAL INTEGRAL”).

IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

UNA DELLE PROPRIETÀ PIÙ NOTEVOLI DEL CERCHIO È QUELLA DI ESSERE LA FIGURA PIANA CON L'AREA PIÙ GRANDE A PARITÀ DI PERIMETRO.

TALE PROPRIETÀ, NOTATA FIN DALL'ANTICHITÀ, È STATA DIMOSTRATA SOLO NELLA PRIMA METÀ DEL NOVECEN-TO.

FRA LE DIVERSE FORMULAZIONI MATEMATICHE DEL PROBLEMA, UNA DELLE PIÙ SEMPLICI CONSISTE NEL CONSIDERARE SOTTOINSIEMI $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ IL CUI CONTORNO $\partial\Omega$ È UNA CURVA REGOLARE, SEMPLICE, CHIUSA, DI LUNGHEZZA L FISSATA, ESPRESSA IN FORMA PARAMETRICA DA

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \quad (13)$$

DOVE $s \in [0, L]$ È L'ASCISSA CURVILINEA. IN PARTICOLARE, Ω È SEMPLICEMENTE CONNESSO.

PER IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA NEL PIANO, L'AREA $|\Omega|$ SI PUÒ ESPRIMERE COME SEGUE:

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{r} \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, ds, \end{aligned} \quad (14)$$

DOVE \mathbf{r} È DATO DA $\mathbf{r}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$, E \mathbf{n} DENOTA IL VERSORE NORMALE USCENTE LUNGO LA FRONTIERA $\partial\Omega$.

SE AMMETTIAMO CHE IL VERSO DI PERCORRENZA DELLA CURVA $\partial\Omega$ DETERMINATO DALLE (13) SIA QUELLO ANTIORARIO, POSSIAMO SCRIVERE $\mathbf{n}(x, y) = y'(s) \hat{\mathbf{i}} - x'(s) \hat{\mathbf{j}}$.

PERCIÒ, VISTA LA (14), SIAMO CONDOTTI AL PROBLEMA DI MASSIMIZZARE IL FUNZIONALE

$$F[\mathbf{r}] = \frac{1}{2} \int_0^L (x(s) y'(s) - y(s) x'(s)) \, ds$$

FRA TUTTE LE APPLICAZIONI $\mathbf{r}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ DI CLASSE $C^1([0, L])$ TALI CHE $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(L)$ E

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1 \text{ PER } s \in [0, L].$$

IL PROBLEMA DI DIDONE

STRETTAMENTE LEGATO AL PROBLEMA ISOPERIMETRICO È IL PROBLEMA DI DIDONE, COSÌ CHIAMATO PERCHÉ LEGATO ALLA LEGGENDARIA FONDAZIONE DELLA CITTÀ DI CARTAGINE DA PARTE DELLA REGINA FENICIA.

CONSIDERIAMO UNA CURVA SEMPLICE E REGOLARE γ , RAPPRESENTATA IN FORMA PARAMETRICA DALLE (13) RISPETTO ALL'ASCISSA CURVILINEA $s \in [0, \pi]$ E TALE CHE

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

$$y(s) > 0 \text{ PER } s \in (0, \pi).$$

RIGUARDO L'ORIENTAZIONE DI γ , SUPPONIAMO CHE $x(\pi) < x(0)$.

IL PROBLEMA CONSISTE NEL MASSIMIZZARE L'AREA DELLA FIGURA PIANA Ω DELIMITATA DALLA CURVA γ E DALL'ASSE x , ESPRESSA DAL FUNZIONALE

$$\begin{aligned} F[\mathbf{r}] &= |\Omega| \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (x(s) y'(s) - y(s) x'(s)) \, ds. \end{aligned}$$

AREA DI UN POLIGONO SEMPLICEMENTE CONNESSO

APPLICHIAMO LA FORMULA (14) AL CASO IN CUI Ω È UN POLIGONO \mathcal{P} SEMPLICEMENTE CONNESSO DI VERTICI P_1, \dots, P_N , ENUMERATI PROCEDENDO IN VERSO ANTIORARIO. POSTO $P_0 = P_N$, SI TROVA

$$|\mathcal{P}| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (x_{j-1} y_j - x_j y_{j-1}) \quad (15)$$

DOVE $(x_j, y_j) = P_j$. INFATTI IL CONTORNO γ DEL POLIGONO \mathcal{P} È COSTITUITO DAGLI N SEGMENTI γ_j CHE VANNO DAL VERTICE P_{j-1} AL VERTICE P_j , $j = 1, \dots, N$, DUNQUE

$$\int_{\gamma} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n}_j ds. \quad (16)$$

IL SEGMENTO γ_j PUÒ ESSERE PARAMETRIZZATO COME SEGUE:

$$\mathbf{r}_j(t) = P_{j-1} + (P_j - P_{j-1})t,$$

CON $t \in [0, 1]$, E LA NORMALE USCENTE \mathbf{n}_j LUNGO γ_j È DATA DA

$$\mathbf{n}_j = \frac{(y_j - y_{j-1}, x_{j-1} - x_j)}{\|P_j - P_{j-1}\|}.$$

TENENDO CONTO CHE $(P_j - P_{j-1}) \cdot \mathbf{n}_j = 0$, E $ds = \|P_j - P_{j-1}\| dt$, SI TROVA

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n}_j ds &= \int_{\gamma_j} P_{j-1} \cdot \mathbf{n}_j ds \\ &= x_{j-1} (y_j - y_{j-1}) + y_{j-1} (x_{j-1} - x_j) \\ &= x_{j-1} y_j - x_j y_{j-1}. \end{aligned}$$

SOSTITUENDO NELLA (16) ED APPLICANDO IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA NEL PIANO SI OTTIENE LA (15).

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

INDICATO CON \times IL PRODOTTO VETTORIALE, LA FORMULA (15) SI PUÒ RISCRIVERE COME SEGUE:

$$|\mathcal{P}| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N P_{j-1} \times P_j \cdot \hat{\mathbf{k}}.$$

ESAMINIAMO LA FORMULA SUPPONENDO, PER SEMPLICITÀ, $P_0 = P_N = O$.

NEL CASO $N = 3$ LA (15) SI RIDUCE A

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}| &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= \frac{1}{2} P_1 \times P_2 \cdot \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

IN ACCORDO CON IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL PRODOTTO VETTORIALE.

NEL CASO $N > 3$, SE RISULTA $P_{j-1} \times P_j \cdot \hat{\mathbf{k}} > 0$ PER OGNI $j = 2, \dots, N-1$ ALLORA IL POLIGONO \mathcal{P} SI È COSTITUITO DAGLI $N-2$ TRIANGOLI $T_j = OP_{j-1}P_j$, E LA (15) ESPRIME IL FATTO CHE

$$|\mathcal{P}| = \sum_{j=2}^{N-1} |T_j|.$$

SE POI RISULTA $P_{j_0-1} \times P_{j_0} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ PER QUALCHE $j_0 \in \{2, \dots, N-1\}$, IL RISULTATO CONTINUA A VALERE PERCHÉ $|T_{j_0}| = 0$.

SE, INFINE, $P_{j_0-1} \times P_{j_0} \cdot \hat{\mathbf{k}} < 0$ PER QUALCHE $j_0 \in \{2, \dots, N-1\}$, COMPAIONO NELLA (15) TERMINI NEGATIVI CHE TUTTAVIA VENGONO NEUTRALIZZATI DA TERMINI POSITIVI RIDONDANTI.

SI NOTI CHE, NEL CASO PARTICOLARE IN CUI \mathcal{P} È UN POLIGONO CONVESSO, LA (15) È VALIDA. SE INOLTRE $P_0 = P_N = O$, SI HA ANCHE $P_{j-1} \times P_j \cdot \hat{\mathbf{k}} > 0$ PER OGNI $j = 2, \dots, N-1$.

IL PROBLEMA DELLA CATENARIA

IL CLASSICO PROBLEMA DELLA CATENARIA CONSISTE NEL TROVARE LA FORMA CHE UN FILO OMOGENEO E INESTENSIBILE γ (CATENA) ASSUME PER EFFETTO DELLA FORZA PESO QUANDO VIENE SOSPESO PER GLI ESTREMI.

SI SUOLE RAPPRESENTARE LA CATENA γ COME IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $u \in C^1([a, b])$, NEL QUAL CASO LA SUA LUNGHEZZA È DATA DA

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} ds \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx. \end{aligned} \quad (17)$$

INDICATA CON μ (COSTANTE) LA DENSITÀ LINEARE DI MASSA, LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO DELLA CATENA SI TROVA MINIMIZZANDO L'ENERGIA POTENZIALE U DATA DA

$$\begin{aligned} U[u] &= \int_{\gamma} \mu g y ds \\ &= \mu g \int_a^b \sqrt{1 + (u'(x))^2} u(x) dx. \end{aligned}$$

ANCHE QUESTO PROBLEMA VIENE DETTO ISOPERIMETRICO PERCHÉ LE FUNZIONI AMMISSIBILI u DEVONO SODDISFARRE LA CONDIZIONE (17) CON L DATO.

SI NOTI CHE L'ORDINATA y_G DEL BARICENTRO DI γ È DATA DA

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M} \int_{\gamma} \mu y ds \\ &= \frac{1}{Mg} U[u], \end{aligned}$$

DOVE $M = \mu L$ È LA MASSA DELLA CATENA, DUNQUE MINIMIZZARE $U[u]$ EQUIVALE A MINIMIZZARE y_G .

IL PROBLEMA DI PLATEAU

NEL CELEBRE PROBLEMA DI PLATEAU SI CONSIDERA L'INSIEME DELLE SUPERFICI NELLO SPAZIO AVENTI PER BORDO UNA DATA CURVA CHIUSA γ_0 .

FRA TUTTE LE SUPERFICI Σ TALI CHE $\partial\Sigma = \gamma_0$ SI VUOLE SAPERE SE NE ESISTE ALMENO UNA, CHE INDICHIAMO CON Σ_0 , LA CUI AREA $|\Sigma_0|$ SIA LA PIÙ PICCOLA POSSIBILE, TALE CIOÈ CHE

$$|\Sigma_0| \leq |\Sigma| \text{ PER OGNI } \Sigma.$$

PER PRECISARE I TERMINI DELLA QUESTIONE, CI RIFERIAMO AL CASO IN CUI LE SUPERFICI Σ SONO GRAFICI DI FUNZIONI.

PROBLEMA DI PLATEAU NON PARAMETRICO

DATO UN DOMINIO PIANO Ω LIMITATO E REGOLARE, SAPPIAMO CHE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $u \in C^1(\overline{\Omega})$ È UNA SUPERFICIE REGOLARE Σ LA CUI AREA È DATA DA

$$\begin{aligned} F[u] &= |\Sigma| \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u(x, y)|^2} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (18)$$

FISSATA UNA FUNZIONE $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, VOGLIAMO SAPERE SE ESISTE UNA FUNZIONE $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ SODDISFACENTE LA DISUGUAGLIANZA

$$F[u_0] \leq F[u]$$

PER OGNI FUNZIONE $u \in C^1(\overline{\Omega})$ TALE CHE $u(x, y) = \varphi(x, y)$ OGNIQUALVOLTA $(x, y) \in \partial\Omega$.

IN QUESTO CASO, LA CURVA γ_0 FISSATA NELLO SPAZIO È L'IMMAGINE DEL CONTORNO $\partial\Omega$ TRAMITE LA FUNZIONE DATA φ .

IL FUNZIONALE DI DIRICHLET

SI PUÒ PENSARE CHE SE IL GRADIENTE $\nabla\varphi$ DELLA FUNZIONE DATA φ È PICCOLO, LA RICERCA DELLA FUNZIONE u_0 SI POSSA RESTRINGERE ALL'INSIEME DELLE FUNZIONI u AVENTI GRADIENTE PICCOLO.

SAPENDO CHE $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$ PER $t \rightarrow 0$, SI PUÒ CONSIDERARE, AL POSTO DEL FUNZIONALE F NELLA (18), IL FUNZIONALE \tilde{F} DATO DA

$$\begin{aligned} \tilde{F}[u] &= \int_{\Omega} \left(1 + \frac{1}{2} |\nabla u(x, y)|^2\right) \, dx \, dy \\ &= |\Omega| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2 \, dx \, dy. \end{aligned}$$

IL FUNZIONALE \tilde{F} È DIVERSO DAL FUNZIONALE F , E LA FUNZIONE CHE MINIMIZZA L'UNO È DIVERSA, IN GENERALE, DA QUELLA CHE MINIMIZZA L'ALTRO.

TUTTAVIA IL FUNZIONALE \tilde{F} È PIÙ SEMPLICE DA TRATTARE. IN PARTICOLARE, ESSENDO L'AREA $|\Omega|$ UNA COSTANTE, SI È CONDOTTI AL PROBLEMA DI MINIMIZZARE IL FUNZIONALE

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2 \, dx \, dy. \quad (19)$$

A QUEST'ULTIMO FUNZIONALE, DETTO DI DIRICHLET, SI GIUNGE ANCHE PARTENDO DA PROBLEMI COMPLETAMENTE DIVERSI.

ESSO È PROBABILMENTE IL FUNZIONALE PIÙ IMPORTANTE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

IL PROBLEMA DELLE GEODETICHE

CONSIDERIAMO LA SUPERFICIE Σ_0 GRAFICO DI UNA FUNZIONE REGOLARE $\varphi(x, y)$ AVENTE PER DOMINIO UN APERTO CONNESSO $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.



FISSATI DUE PUNTI $P, Q \in \Sigma_0$ VOGLIAMO TROVARE, SE ESISTE, UNA CURVA REGOLARE $\gamma_0 \subset \Sigma_0$ AVENTE PER ESTREMI I PUNTI P E Q E LA CUI LUNGHEZZA SIA LA PIÙ PICCOLA POSSIBILE. POSTO

$$P = (x_P, y_P, \varphi(x_P, y_P))$$

$$Q = (x_Q, y_Q, \varphi(x_Q, y_Q))$$

CONSIDERIAMO LE CURVE REGOLARI $\gamma \subset \Sigma_0$ AVENTI EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = \varphi(x(t), y(t)), \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

E TALI CHE

$$(x(0), y(0)) = (x_P, y_P),$$

$$(x(1), y(1)) = (x_Q, y_Q).$$

IL PROBLEMA SI TRADUCE NEL MINIMIZZARE IL FUNZIONALE $J[\gamma]$ DATO DA

$$J[\gamma] = \int_0^1 |\mathbf{v}(t)| dt$$

DOVE $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ È IL VETTORE VELOCITÀ DELLA CURVA γ , E LA TERZA COMPONENTE $z'(t)$ HA LA SEGUENTE ESPRESSIONE:

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t). \end{aligned}$$

CONCETTI ELEMENTARI

DEFINIZIONI

VISTO IL TIPO DI PROBLEMI STUDIATI NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI, SONO ESSENZIALI LE DEFINIZIONI DI:

MAGGIORANTE E MINORANTE
FUNZIONE LIMITATA
MASSIMO E MINIMO
ESTREMO INFERIORE
ESTREMO SUPERIORE

TALI DEFINIZIONI SI APPLICANO AD UNA FUNZIONE $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ INDIPENDENTEMENTE DALLA NATURA DEL DOMINIO X .

IN PARTICOLARE, SE F È UN FUNZIONALE ALLORA IL DOMINIO X È UN INSIEME DI FUNZIONI. SE INVECE, F È UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE REALE, ALLORA X È SOLITAMENTE UN INTERVALLO.

IL CORSO DI ANALISI SUPERIORE 2 È UN'OCCASIONE PER CONSOLIDARE LA CONOSCENZA DI QUESTI CONCETTI, IL CUI AMBITO DI APPLICAZIONE È MOLTO PIÙ VASTO.

MAGGIORANTI E MINORANTI

SI DICE MINORANTE DI UNA FUNZIONE $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ UN QUALUNQUE NUMERO REALE m (AMMESSO CHE ESISTA) TALE CHE

$$m \leq F(x) \text{ PER OGNI } x \in X.$$

SIMILMENTE, SI DICE MAGGIORANTE DI F UN QUALUNQUE NUMERO REALE M (AMMESSO CHE ESISTA) TALE CHE

$$F(x) \leq M \text{ PER OGNI } x \in X.$$

FUNZIONI LIMITATE

SE ESISTE ALMENO UN MINORANTE PER UNA DATA FUNZIONE $F: X \rightarrow \mathbb{R}$, ALLORA NE ESISTONO INFINITI E LA FUNZIONE F SI DICE INFERIORMENTE LIMITATA.

SIMILMENTE, SE ESISTE ALMENO UN MAGGIORANTE PER F ALLORA NE ESISTONO INFINITI E LA FUNZIONE F SI DICE SUPERIORMENTE LIMITATA.

UNA FUNZIONE $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ SI DICE LIMITATA SE ESISTONO DUE OPPORTUNI NUMERI REALI, CHE INDICHIAMO CON m ED M , TALI CHE

$$m \leq F(x) \leq M \text{ PER OGNI } x \in X.$$

MASSIMI E MINIMI

UN EVENTUALE PUNTO $x_0 \in X$ TALE CHE

$$F(x_0) \leq F(x) \text{ PER OGNI } x \in X$$

SI DICE PUNTO DI MINIMO, O ANCHE PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO. SE ESISTE ALMENO UN TALE PUNTO, ALLORA SI DEFINISCE IL MINIMO DI F , DETTO ANCHE VALORE MINIMO, PONENDO

$$\min_{x \in X} F(x) = F(x_0).$$

SIMILMENTE, UN EVENTUALE PUNTO $x_0 \in X$ TALE CHE

$$F(x_0) \geq F(x) \text{ PER OGNI } x \in X$$

SI DICE PUNTO DI MASSIMO, O ANCHE PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO. SE ESISTE ALMENO UN TALE PUNTO, ALLORA SI DEFINISCE IL MASSIMO DI F , DETTO ANCHE VALORE MASSIMO, PONENDO

$$\max_{x \in X} F(x) = F(x_0).$$

ESTREMO INFERIORE

SE UNA FUNZIONE $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ È INFERIORMENTE LIMITATA, DUNQUE AMMETTE ALMENO UN MINORANTE m , ALLORA TUTTI I NUMERI $m' < m$ SONO MINORANTI PERCHÉ SODDISFANO LA DEFINIZIONE.

NE SEGUE CHE L'INSIEME A DI TUTTI I MINORANTI, ED IL SUO COMPLEMENTARE $B = \mathbb{R} \setminus A$, COSTITUISCONO UNA SEZIONE (A, B) (NEL SENSO DI DEDEKIND) DEL CAMPO DEI NUMERI REALI.

PER LA COMPLETEZZA DELL'INSIEME \mathbb{R} , LA SEZIONE (A, B) HA UNO ED UN SOLO ELEMENTO SEPARATORE λ .

L'ELEMENTO SEPARATORE λ È UN MINORANTE DI F : INFATTI, SE COSÌ NON FOSSE, CIOÈ SE ESISTESSE UN PUNTO $x_0 \in X$ TALE CHE $F(x_0) < \lambda$, ALLORA IL VALOR MEDIO μ DI $F(x_0)$ E λ SODDISFEREBBE LE DISUGUAGLIANZE

$$F(x_0) < \mu = \frac{F(x_0) + \lambda}{2} < \lambda.$$

DUNQUE AVREMMO TROVATO UN VALORE $\mu < \lambda$, OVVERO $\mu \in A$, CHE NON È UN MINORANTE PERCHÉ $\mu > F(x_0)$, CONTRO LA DEFINIZIONE DELLA CLASSE A .

IN CONCLUSIONE, SE F È INFERIORMENTE LIMITATA ALLORA ESISTE UN MINORANTE λ CHE È PIÙ GRANDE DI TUTTI GLI ALTRI: LO SI CHIAMA ESTREMO INFERIORE DI F E LO SI DENOTA CON

$$\inf_{x \in X} F(x).$$

SE, INVECE, F NON È LIMITATA INFERIORMENTE, ALLORA SI PONE, PER DEFINIZIONE, $\sup_{x \in X} F(x) = -\infty$.

ESTREMO SUPERIORE

CON UN RAGIONAMENTO ANALOGO AL PRECEDENTE SI DIMOSTRA CHE SE F È LIMITATA SUPERIORMENTE ALLORA ESISTE UN MAGGIORANTE M_0 CHE È PIÙ PICCOLO DI TUTTI GLI ALTRI: LO SI CHIAMA ESTREMO SUPERIORE DI F E LO SI DENOTA CON

$$\sup_{x \in X} F(x).$$

SE, INVECE, F NON È LIMITATA SUPERIORMENTE, ALLORA SI PONE, PER DEFINIZIONE, $\sup_{x \in X} F(x) = +\infty$.

PROPRIETÀ FONDAMENTALE

I PROBLEMI RICHIAMATI NELLE PAGINE PRECEDENTI CONSISTONO NELLA DETERMINAZIONE DEL MINIMO DI CERTI FUNZIONALI.

MENTRE TUTTE LE FUNZIONI HANNO UN ESTREMO INFERIORE, NON TUTTE HANNO MINIMO. SE, PERÒ, UNA FUNZIONE F AMMETTE MINIMO, ALLORA RISULTA

$$\min F = \inf F.$$

PIÙ PRECISAMENTE, VALE LA SEGUENTE FONDAMENTALE PROPRIETÀ: UNA FUNZIONE $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ AMMETTE MINIMO SE E SOLO SE ESISTE ALMENO UN PUNTO $x_0 \in X$ TALE CHE

$$F(x_0) = \inf_{x \in X} F(x). \quad (20)$$

IN PRATICA, QUANDO SI RICERCA L'EVENTUALE MINIMO DI UNA FUNZIONE F , SI PUÒ PARTIRE CONSIDERANDO IL SUO ESTREMO INFERIORE, CHE ESISTE CERTAMENTE, E POI CERCARE DI DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI UN PUNTO $x_0 \in X$ SODDISFACENTE LA (20).

MASSIMANTI E MINIMANTI

QUANDO LA FUNZIONE OBIETTIVO $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ È UN FUNZIONALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI, E QUINDI X UN INSIEME DI FUNZIONI, LE EVENTUALI FUNZIONI $u \in X$ TALI CHE

$$F[u] = \min F$$

SI DICONO “MINIMANTI”. SIMILMENTE, LE EVENTUALI FUNZIONI $u \in X$ TALI CHE

$$F[u] = \max F$$

SI DICONO “MASSIMANTI”. MINIMANTI E MASSIMANTI SI DICONO, IN GENERALE, ESTREMANTI DEL FUNZIONALE F .

TEOREMA DI FERMAT

DA DIVERSI ANNI È INVALSO L'USO DI ATTRIBUIRE AL GIURISTA FRANCESE PIERRE DE FERMAT IL MERITO DELLA SCOPERTA DEL SEGUENTE TEOREMA:

SE UNA FUNZIONE DERIVABILE $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ AMMETTE MINIMO, ALLORA, INDICATO CON x_0 UN QUALUNQUE PUNTO DI MINIMO, RISULTA $f'(x_0) = 0$. UN RISULTATO ANALOGO VALE SE f AMMETTE MASSIMO.

I METODI CLASSICI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI SI FONDANO SU DI UN'ESTENSIONE DI QUESTO TEOREMA AL CASO IN CUI LA FUNZIONE OBIETTIVO È UN FUNZIONALE INTEGRALE.

PRIMA DI PROCEDERE IN TAL SENSO, CI SOFFERMIAMO SUGLI EQUIVOCI PIÙ COMUNI RIGUARDANTI LO STUDIO DEI MASSIMI E DEI MINIMI DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE.

EQUIVOCO 1

LO STUDIO DEI MASSIMI E DEI MINIMI DI UNA FUNZIONE f CONSISTE NELLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $f'(x) = 0$.

EQUIVOCO 2

SE L'EQUAZIONE $f'(x) = 0$ NON HA SOLUZIONI, LA FUNZIONE f NON HA NÉ MASSIMI NÉ MINIMI.

PER RENDERSI CONTO CHE SI TRATTA DI ERRORI, BASTA ESAMINARE ALCUNI SEMPLICI ESEMPLI.

ESEMPIO 1

LA FUNZIONE $f(x) = |x|$ ASSUME IL MINIMO NEL PUNTO $x_0 = 0$: PER VERIFICARLO, BASTA APPLICARE LA DEFINIZIONE.

TUTTAVIA IL PUNTO $x_0 = 0$ NON RISOLVE L'EQUAZIONE $f'(x) = 0$ PERCHÉ LA FUNZIONE $f(x) = |x|$ NON È DERIVABILE IN TALE PUNTO.

ESEMPIO 2

LA FUNZIONE $f(x) = \sqrt{x}$ ASSUME IL MINIMO NEL PUNTO $x_0 = 0$: PER VERIFICARLO, BASTA APPLICARE LA DEFINIZIONE.

TUTTAVIA IL PUNTO $x_0 = 0$ NON RISOLVE L'EQUAZIONE $f'(x) = 0$ PERCHÉ LA FUNZIONE $f(x) = \sqrt{x}$ NON È DERIVABILE IN TALE PUNTO.

ESEMPIO 3

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f(x) = x^3$. IL PUNTO $x_0 = 0$ SODDISFA L'EQUAZIONE $f'(x) = 0$, MA NON È NÉ UN PUNTO DI MASSIMO, NÉ UN PUNTO DI MINIMO.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

IL TEOREMA DI WEIERSTRASS AFFRONTA UNA QUESTIONE PIÙ SFUGGENTE RISPETTO AL TEOREMA DI FERMAT, MESSA A FUOCO SECOLI DOPO: LA QUESTIONE DELL'ESISTENZA DEI MASSIMI E DEI MINIMI.

INIZIALMENTE, IL PROBLEMA DELL'ESISTENZA DEI MASSIMI E DEI MINIMI FU SOTTOVALUTATO. NEI CASI CONCRETI, L'ESISTENZA APPARIVA OVVIA E VENIVA DATA PER SCONTATA.

IL TEOREMA DI WEIERSTRASS ENUNCIAM RIGOROSAMENTE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'ESISTENZA DEL MASSIMO E DEI MINIMO:

SE UNA FUNZIONE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, AVENTE PER DOMINIO UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a, b]$, È CONTINUA IN TUTTI I PUNTI DI TALE INTERVALLO, ALLORA AMMETTE SIA MASSIMO CHE MINIMO.

LA STESSA CONCLUSIONE VALE NEL CASO IN CUI IL DOMINIO DI f È UN SOTTOINSIEME CHIUSO E LIMITATO DI \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, ED f È CONTINUA IN TUTTI I PUNTI.

COSÌ COME I METODI CLASSICI SI BASANO SUL TEOREMA DI FERMAT, I METODI DIRETTI SI BASANO SU DI UNA GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS.

PROBLEMI ISOPERIMETRICI

IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO NELLA CLASSE DEI TRIANGOLI

FISSATO $L \in (0, +\infty)$, CONSIDERIAMO L'INSIEME X DI TUTTI I TRIANGOLI $T \subset \mathbb{R}^2$ DI PERIMETRO L . VOGLIAMO SAPERE SE NE ESISTE ALMENO UNO, CHE INDICHEREMO CON T_0 , TALE CHE

$$|T_0| \geq |T| \text{ PER OGNI } T \in X. \quad (21)$$

LA RISPOSTA È AFFERMATIVA: ESISTONO INFINITI TRIANGOLI T_0 CHE RISOLVONO IL PROBLEMA, E SONO I TRIANGOLI EQUILATERI DI LATO $L/3$. NON ESISTONO ALTRE SOLUZIONI ALL'INFUORI DI QUESTE.

PER VERIFICARLO, APPLICHIAMO UN'IDEA ATTRIBUITA DA U. STAMMBACH [22] A H. A. SCHWARZ, E RIPRESA ANCHE IN [12, 6].

CONSIDERIAMO UN TRIANGOLO $T \in X$ E SIANO $a \leq b \leq c$ I SUOI LATI. ESSENDO $L = a + b + c \geq 3a$, DEVE AVERSI

$$L/3 \geq a.$$

ANALOGAMENTE SI TROVA $c \geq L/3$, E QUINDI $a + c > L/3$, DA CUI SEGUE

$$b = L - a - c < 2L/3.$$

IL TRIANGOLO $T' \in X$ DI LATI $a' = L/3 \geq a$, $b' = b$, E $c' = L - a' - b'$ SODDISFA

$$|T'| \geq |T|. \quad (22)$$

LO SI VEDE PRENDENDO b COME BASE COMUNE, ED OSSERVANDO CHE L'ALTEZZA h' DI T' SODDISFA $h' \geq h$, ESSENDO h L'ALTEZZA DI T .

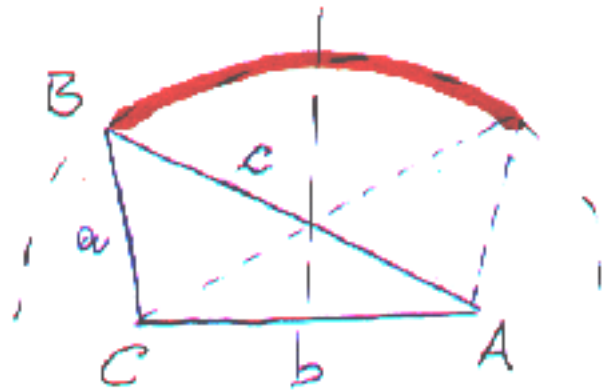
A TAL FINE PUÒ ESSERE UTILE OSSERVARE CHE LA CONDIZIONE $a' + c' = a + c$

$= k$ (COSTANTE) SI PUÒ RICONDURRE ALLA DEFINIZIONE SINTETICA DELL'ELLISSE.

IN COORDINATE POLARI (ρ, ϑ) , L'EQUAZIONE DELLE ELLISSI I CUI FUOCHI SONO IN $(0, 0)$ ED IN $(x_F, 0)$, CON $x_F > 0$, È

$$\rho = \frac{k^2 - x_F^2}{2(k - x_F \cos \vartheta)}$$

DOVE $k > x_F$. L'EQUAZIONE MOSTRA CHE ρ DECRESCe AL CRESCERE DI $\vartheta \in [0, \pi]$.



CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA, E SICCOME $a \leq L/3 = a'$, IL VERTICE B ANDRÀ RIPOSIZIONATO IN UN OPPORTUNO PUNTO B' LUNGO L'ARCO ELLITTICO COLORATO IN ROSSO: PERCIÒ $h' \geq h$.

SI PUÒ OSSERVARE CHE I PUNTI B E B' STANNO IN UNO STESSO SEMIPIANO DELIMITATO DALL'ASSE DEL LATO b SE E SOLO SE $b \leq L/3$.

ORA PER DIMOSTRARE LA (21) BASTA OSSERVARE CHE IL TRIANGOLO EQUILATERO T_0 DI LATI $a_0 = b_0 = c_0 = L/3$, ESSENDO ANCHE ISOSCELE E CON LA BASE $a_0 = a'$, SODDISFA

$$|T_0| \geq |T'|.$$

RICORDANDO LA (22), LA (21) SEGUE PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA DELLA DISUGUAGLIANZA.

IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO NELLA CLASSE DEI RETTANGOLI

FISSATO $L \in (0, +\infty)$, CONSIDERIAMO L'INSIEME X DI TUTTI I RETTANGOLI $R \subset \mathbb{R}^2$ DI PERIMETRO L . VOGLIAMO SAPERE SE NE ESISTE ALMENO UNO, CHE INDICHEREMO CON R_0 , TALE CHE

$$|R_0| \geq |R| \text{ PER OGNI } R \in X.$$

LA RISPOSTA È AFFERMATIVA: ESISTONO INFINITI RETTANGOLI R_0 CHE RISOLVONO IL PROBLEMA, E SONO I QUADRATI DI LATO $L/4$. NON ESISTONO ALTRE SOLUZIONI ALL'INFUORI DI QUESTE.

IL PROBLEMA VIENE PERIODICAMENTE RIPROPOSTO ALL'ESAME DI STATO DEI LICEI SCIENTIFICI.

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY

FRA LE TANTE POSSIBILI DIMOSTRAZIONI, NE RIPORTIAMO UNA CHE SI BASA SULLA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY: RISULTA

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

PER OGNI $a, b \in \mathbb{R}$, E L'UGUAGLIANZA SUSSISTE SE E SOLO SE $a = b$. LO SI VEDE PARTENDO DALLA DISUGUAGLIANZA

$$(a - b)^2 \geq 0$$

E SVOLGENDO IL QUADRATO.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA

CONSIDERIAMO UN RETTANGOLO $R \in X$ E INDICHIAMO CON a E b LE LUNGHEZZE DI DUE LATI CONSECUTIVI. ALLORA

$$\frac{L}{2} = a + b.$$

ELEVANDO AMBO I MEMBRI AL QUADRATO, ED USANDO LA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY, SI OTTIENE

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{4} &= a^2 + b^2 + 2ab \\ &\geq 4ab = 4|R|, \end{aligned}$$

DUNQUE POSSIAMO SCRIVERE

$$|R| \leq \frac{|\partial R|^2}{16} \quad (23)$$

PER OGNI RETTANGOLO R , E L'UGUAGLIANZA VALE SE E SOLO SE $a = b$, DUNQUE SE E SOLO SE R È UN QUADRATO.

CIÒ GIUSTIFICA LA RISPOSTA AL PROBLEMA INIZIALE.

DISUGUAGLIANZE COME LA (23) SI DICONO DISUGUAGLIANZE ISOPERIMETRICHE.

IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO NELLA CLASSE DEGLI ENNAGONI

FISSATI $N_0 \in \{3, 4, 5, \dots\}$ ED $L \in (0, +\infty)$, CONSIDERIAMO L'INSIEME X DI TUTTI I POLIGONI $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ CON N_0 LATI E PERIMETRO $|\partial\mathcal{P}| = L$.

VOGLIAMO SAPERE SE NE ESISTE ALMENO UNO, CHE INDICHEREMO CON \mathcal{P}_0 , TALE CHE

$$|\mathcal{P}_0| \geq |\mathcal{P}| \text{ PER OGNI } \mathcal{P} \in X. \quad (24)$$

LA RISPOSTA È AFFERMATIVA: ESISTONO INFINITI POLIGONI \mathcal{P}_0 CHE RISOLVONO IL PROBLEMA, E SONO I POLIGONI REGOLARI DI LATO L/N_0 . NON ESISTONO ALTRE SOLUZIONI ALL'INFUORI DI QUESTE.

PER LA DIMOSTRAZIONE, STUDIAMO INIZIALMENTE IL SOTTOINSIEME $K \subset X$ DI TUTTI I POLIGONI $\mathcal{P} \in X$ CHE SONO CONVESSI.

COMINCEREMO COL DIMOSTRARE LA SOLA ESISTENZA DI ALMENO UN POLIGONO CONVESSO \mathcal{P}_0 TALE CHE

$$|\mathcal{P}_0| \geq |\mathcal{P}| \text{ PER OGNI } \mathcal{P} \in K. \quad (25)$$

A TAL FINE APPLICHEREMO IL TEOREMA DI WEIERSTRASS ALLA FUNZIONE $f(\mathcal{P}) = |\mathcal{P}|$ (AREA DEL POLIGONO \mathcal{P}). SERVE DUNQUE CHE f SIA CONTINUA, ED IL SUO DOMINIO SIA COMPATTO.

IN UN SECONDO MOMENTO VERIFICHIEREMO CHE I POLIGONI \mathcal{P}_0 CHE SODDISFANO LA (25) SONO REGOLARI.

L'INVILUPPO CONVESSO

PER PASSARE DALLA CLASSE K ALLA CLASSE X , CIOÈ PER RIMUOVERE L'IPOTESI DI CONVESSITÀ, CI SERVIAMO DELL'INVILUPPO CONVESSO.

L'INVILUPPO CONVESSO DI UN POLIGONO \mathcal{P} È IL PIÙ PICCOLO POLIGONO CONVESSO CHE LO CONTIENE, E SI DENOTA CON \mathcal{P}^* . RISULTA

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}^*| &\geq |\mathcal{P}|, \\ |\partial\mathcal{P}^*| &\leq |\partial\mathcal{P}| \end{aligned}$$

E LE UGUAGLIANZE VALGONO SE E SOLO SE \mathcal{P} È CONVESSO, DUNQUE SE E SOLO SE $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$.

A PARTIRE DA UN POLIGONO QUALUNQUE \mathcal{P} , CON N LATI, SI PUÒ COSTRUIRE UN POLIGONO CONVESSO \mathcal{P}_c CON $N_c \leq N$ LATI TALE CHE

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_c| &\geq |\mathcal{P}|, \\ |\partial\mathcal{P}_c| &= |\partial\mathcal{P}|. \end{aligned}$$

BASTA PORRE

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c &= \frac{|\partial\mathcal{P}|}{|\partial\mathcal{P}^*|} \mathcal{P}^* \\ &= \left\{ (x, y) \mid \frac{|\partial\mathcal{P}^*|}{|\partial\mathcal{P}|} (x, y) \in \mathcal{P}^* \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

SUPPONIAMO ORA DI AVER GIÀ DIMOSTRATO LA (25). PRESO UN POLIGONO \mathcal{P} DI PERIMETRO L , RISULTA $|\partial\mathcal{P}_c| = L$ E PERCIÒ PER LA (25) SI HA

$$|\mathcal{P}_0| \geq |\mathcal{P}_c|.$$

MA POICHÉ $|\mathcal{P}_c| \geq |\mathcal{P}|$, PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA DELLA DISUGUAGLIANZA SI OTTIENE LA (24).

LIMITATEZZA

VEDIAMO ORA COME DIMOSTRARE LA (25).

POICHÉ L'AREA ED IL PERIMETRO SONO INVARIANTI PER TRASLAZIONI, CI CONCENTRIAMO SULL'INSIEME $K_0 \subset K$ DI TUTTI I POLIGONI CONVESSI \mathcal{P} CON N_0 LATI, PERIMETRO L , ED UN VERTICE NELL'ORIGINE.

CONVENIAMO DI ENUMERARE I VERTICI P_1, \dots, P_{N_0} DEI POLIGONI CONSIDERATI PROCEDENDO IN SENSO ANTIORARIO. CONVENIAMO INOLTRE CHE $P_{N_0} = O$ E DEFINIAMO $P_0 = P_{N_0}$.

UN POLIGONO $\mathcal{P} \in K_0$ SI PUÒ RAPPRESENTARE CON IL PUNTO $i(\mathcal{P}) = (P_1, \dots, P_{N_0}) \in \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2N_0}$. CON LA CONVENZIONE CHE $P_{N_0} = O$, QUESTA RAPPRESENTAZIONE È UNIVOCA.

L'INSIEME $i(K_0)$ DEI PUNTI DI \mathbb{R}^{2N_0} CHE CORRISPONDONO A POLIGONI $\mathcal{P} \in K_0$ È LIMITATO PERCHÉ, ESSENDO $P_{N_0} = O$, RISULTA $|P_j| < L$ PER OGNI $j = 1, \dots, N_0$.

CHIUSURA

DIREMO CHE UNA SUCCESSIONE DI POLIGONI $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ DI K_0 CONVERGE SE I PUNTI $x_n = i(\mathcal{P}_n)$ CONVERGONO IN \mathbb{R}^{2N_0} AD UN PUNTO CHE INDICHEREMO CON x_0 .

TALVOLTA IL PUNTO LIMITE x_0 RAPPRESENTA ANCORA UN POLIGONO DI K_0 , PUÒ PERÒ ACCADERE CHE x_0 RAPPRESENTI UN POLIGONO CONVESSO CON $N < N_0$ LATI.

CIÒ ACCADE, AD ESEMPIO, SE DUE VERTICI CONSECUTIVI DEL POLIGONO \mathcal{P}_n CONVERGONO AD UNO STESSO PUNTO DEL PIANO.

PUÒ ANCHE SUCCEDERE CHE IL LIMITE DEL j -ESIMO VERTICE DI \mathcal{P}_n APPARTENGA AL SEGMENTO AVENTE PER ESTREMI I LIMITI DEI VERTICI $j - 1$ -ESIMO E $j + 1$ -ESIMO. IN OGNI CASO, POICHÉ IL PERIMETRO

$$|\partial\mathcal{P}| = \sum_{j=1}^{N_0} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

DI UN POLIGONO \mathcal{P} È UNA FUNZIONE CONTINUA DELLE COORDINATE (x_j, y_j) DEI SUOI VERTICI, IL POLIGONO LIMITE \mathcal{P}_0 SODDISFA $|\partial\mathcal{P}_0| = L$.

INFINE, LA SUCCESSIONE \mathcal{P}_n PUÒ CONVERGERE NEL SENSO SOPRA INDICATO AD UN SEGMENTO DI LUNGHEZZA $L/2$ AVENTE UN ESTREMO NELL'ORIGINE.

INDICHEREMO CON \overline{K}_0 L'INSIEME OTTENUTO AGGIUNGENDO A K_0 I LIMITI DELLE SUCCESSIONI CONVERGENTI DI POLIGONI DI K_0 .

ESISTENZA

PER LA (15), LA FUNZIONE $f(\mathcal{P}) = |\mathcal{P}|$ È CONTINUA PER OGNI $\mathcal{P} \in \overline{K}_0$.

POICHÉ IL DOMINIO \overline{K}_0 È CHIUSO E LIMITATO, PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS ESISTE ALMENO UN ELEMENTO $\mathcal{P}_0 \in \overline{K}_0$ TALE CHE

$$|\mathcal{P}_0| \geq |\mathcal{P}| \text{ PER OGNI } \mathcal{P} \in \overline{K}_0. \quad (27)$$

QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, \mathcal{P}_0 SODDISFA LA (25) E DI CONSEGUENZA ANCHE LA (24).

\mathcal{P}_0 È UN POLIGONO CONVESSO, E NON UN SEGMENTO, PERCHÉ I SEGMENTI HANNO AREA NULLA.

NON SAPPIAMO, PER IL MOMENTO, SE $\mathcal{P}_0 \in K_0$ O SE $\mathcal{P}_0 \in \overline{K}_0 \setminus K_0$, NEL QUAL CASO, INDICATO CON N IL NUMERO DEI VERTICI DI \mathcal{P}_0 , RISULTA $N < N_0$.

LATI UGUALI

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE I POLIGONI $\mathcal{P}_0 \in \overline{K}_0$ SODDISFACENTI LA (27) SONO TUTTI E SOLI I POLIGONI REGOLARI DI LATO L/N_0 .

CONSIDERIAMO DUNQUE UN TALE POLIGONO $\mathcal{P}_0 \in \overline{K}_0$, E COMINCIAMO COL VERIFICARE CHE È EQUILATERO.

SE PER ASSURDO \mathcal{P}_0 AVESSE DUE LATI CONSECUTIVI AB E BC DI DIVERSA LUNGHEZZA, ALLORA, PROCEDENDO COME NELL'ESERCIZIO 1 DELLA SERIE [104], POTREMMO COSTRUIRE UN POLIGONO \mathcal{P} CON N VERTICI, PERIMETRO L , ED AREA MAGGIORE.

PASSANDO DA \mathcal{P} AL POLIGONO CONVESSO \mathcal{P}_c COME NELLA (26) SI HA

$$|\mathcal{P}_c| \geq |\mathcal{P}| > |\mathcal{P}_0|.$$

MA POICHÉ \mathcal{P}_c È UN POLIGONO CONVESSO DI PERIMETRO L E CON $N_c \leq N$ LATI, RISULTA $\mathcal{P}_c \in \overline{K}_0$ A MENO DI UNA TRASLAZIONE CHE PORTI UN VERTICE NELL'ORIGINE.

CIÒ CONTRADDICE LA (27), DUNQUE \mathcal{P}_0 È UN POLIGONO EQUILATERO, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

IL VERTICE CONTRAPPOSTO ALL'ORIGINE

IL POLIGONO \mathcal{P}_0 INTRODOTTO A PAGINA Mc28 NON SOLO È EQUILATERO, MA È ANCHE UN POLIGONO REGOLARE PERCHÉ È INSCRIVIBILE IN UN CERCHIO.

PROSEGUIAMO LA DIMOSTRAZIONE SUPPONENDO CHE N_0 SIA PARI. CIÒ SI RIVELA SUFFICIENTE PER RISOLVERE IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO ENUNCIATO A PAG. Mc13.

IL CASO IN CUI N_0 È DISPARI È TRATTATO PIÙ AVANTI.

INDICHIAMO CON Q IL PUNTO DEL CONTORNO $\partial\mathcal{P}_0$ CHE, INSIEME ALL'ORIGINE O , DIVIDE IL CONTORNO STESSO IN DUE POLIGONALI γ_1 E γ_2 DI UGUALE LUNGHEZZA $L/2$.

SI NOTI CHE SE ANCHE UNA SOLA DELLE DUE POLIGONALI γ_1, γ_2 COINCIDESSE CON UN SEGMENTO DI LUNGHEZZA $L/2$, ALLORA SI AVREBBE $\gamma_1 = \gamma_2$ E DI CONSEGUENZA \mathcal{P}_0 SI RIDURREBBE AD UN SEGMENTO, MA CIÒ È ESCLUSO PERCHÉ $|\mathcal{P}_0| > 0$.

INOLTRE SE IL NUMERO $N \leq N_0$ DEI VERTICI DI \mathcal{P}_0 È PARI, ALLORA Q È PRECISAMENTE IL VERTICE $\frac{N}{2}$ -ESIMO CHE SI INCONTRA PERCORRENDO $\partial\mathcal{P}_0$ A PARTIRE DALL'ORIGINE.

SE, INVECE, N È DISPARI, DUNQUE $N < N_0$, ALLORA IL PUNTO Q DEFINITO COME SOPRA RISULTA IL PUNTO MEDIO DI UN LATO.

DIVISIONE A METÀ

DISPONIAMO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO IN MODO TALE CHE IL PUNTO Q GIACCIA SUL SEMIASSE DELLE $x > 0$, E VERIFICHIAMO CHE IL SEGMENTO OQ DIVIDE IL POLIGONO \mathcal{P}_0 IN DUE PARTI AVENTI LA STESSA AREA.

A TAL FINE SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE UNA DELLE DUE PARTI ABBA AREA MAGGIORE DELL'ALTRA.

ALLORA LA PARTE PIÙ GRANDE, UNITA CON LA SUA IMMAGINE SPECULARE RISPETTO ALL'ASSE x , FORMA UN POLIGONO CHE DENOTIAMO CON \mathcal{P} TALE CHE $|\partial\mathcal{P}| = L$.

OPERANDO COME NELLA (26) OTTENIAMO UN POLIGONO CONVESSO \mathcal{P}_c CON AL PIÙ N_0 LATI, DUNQUE $\mathcal{P}_c \in \overline{K}_0$, E TALE CHE $|\mathcal{P}_c| > |\mathcal{P}_0|$.

POICHÉ CIÒ CONTRADDICE LA (27), IL SEGMENTO OQ DEVE DIVIDERE IL POLIGONO \mathcal{P}_0 IN DUE PARTI DI UGUALE AREA, COME AFFERMATO.

OSSERVAZIONE

LO STESSO RAGIONAMENTO MOSTRA CHE \mathcal{P}_0 È INCLUSO NELLA STRISCIA $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq x_Q\}$, ESSENDO x_Q L'ASCISSA DEL PUNTO Q .

SUPPONIAMO INFATTI CHE \mathcal{P}_0 ABBA UN VERTICE P FUORI DI TALE STRISCIA, E SUPPONIAMO INOLTRE, SENZA LEDERE LA GENERALITÀ, CHE P GIACCIA NEL SEMIPIANO $y > 0$.

ALLORA L'INTERSEZIONE $\mathcal{P}_0^+ = \mathcal{P}_0 \cap \{(x, y) \mid y \geq 0\}$, UNITA CON LA SUA IMMAGINE SPECULARE RISPETTO ALL'ASSE x , INDIVIDUA UN POLIGONO \mathcal{P} AVENTE AREA $|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}_0|$ E PERIMETRO L .

POICHÉ PER ASSURDA IPOTESI $P \notin S$, IL POLIGONO \mathcal{P} NON È CONVESSO, E QUINDI IL POLIGONO CONVESSO \mathcal{P}_c OTTENUTO COME NELLA (26) HA AREA MAGGIORE DI \mathcal{P} E NON PIÙ DI N_0 LATI.

PERTANTO RISULTA $\mathcal{P}_c \in \overline{K}_0$ A MENO DI UNA TRASLAZIONE CHE PORTI UN VERTICE NELL'ORIGINE, E QUESTO CONTRADDICE LA (27).

DUNQUE DEVE AVERSI $\mathcal{P}_0 \subset S$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

MANOVRA DI STEINER

PER DIMOSTRARE CHE IL POLIGONO \mathcal{P}_0 , CHE È EQUILATERO, È ANCHE REGOLARE, VERIFICHIAMO CHE I SUOI VERTICI GIACCIONO SULLA CIRCONFERENZA γ DI DIAMETRO OQ .

A TAL FINE, INDICATO CON P UN QUALUNQUE VERTICE DI \mathcal{P}_0 , DISTINTO DAI PUNTI O E Q CHE OVVIAMENTE GIACCIONO SU γ , VERIFICHIAMO CHE L'ANGOLO $O\hat{P}Q$ È UN ANGOLO RETTO.

SENZA LEDERE LA GENERALITÀ PRENDIAMO P NEL SEMIPIANO \mathbb{R}_+^2 .

SE PER ASSURDO L'ANGOLO $O\hat{P}Q$ NON È UN ANGOLO RETTO, ALLORA CONSIDERIAMO LA PARTE DI \mathcal{P}_0^+ DELIMITATA DAL BORDO $\partial\mathcal{P}_0$ E DAL SEGMENTO OP ALLA STREGUA DI UN CORPO RIGIDO, COME PURE LA PARTE DI \mathcal{P}_0^+ DELIMITATA DA $\partial\mathcal{P}_0$ E DAL SEGMENTO PQ .

MUOVIAMO LA SECONDA PARTE RISPETTO ALLA PRIMA COME SE FOSSE INCERNIERATA NEL PUNTO P , PORTANDO IL PUNTO Q NELLA POSIZIONE Q' TALE CHE L'ANGOLO $O\hat{P}Q'$ SIA UN ANGOLO RETTO.

COSÌ FACENDO, MENTRE LE AREE DELLE DUE PARTI RIGIDE NON CAMBIANO, L'AREA DEL TRIANGOLO OPQ' È MAGGIORE DI QUELLA DEL TRIANGOLO OPQ (v. ESERCIZIO 2, SERIE [104]).

LA FIGURA COSÌ OTTENUTA, UNITA CON LA SUA IMMAGINE SPECULARE RISPETTO AL SEGMENTO OQ' , INDIVIDUA UN POLIGONO \mathcal{P} DI PERIMETRO L E AREA $|\mathcal{P}| > |\mathcal{P}_0|$.

A QUESTO PUNTO INTERVIENE L'IPOTESI CHE N_0 È PARI.

INFATTI, SE ANCHE N (I LATI DI \mathcal{P}_0) È PARI, ALLORA IL PUNTO Q È UN VERTICE DI \mathcal{P}_0 E DI CONSEGUENZA IL POLIGONO \mathcal{P} HA, IN GENERALE, $N \leq N_0$ LATI, OPPURE SOLTANTO $N - 1$ LATI QUANDO I DUE LATI USCENTI DA Q' RISULTINO ALLINEATI.

SE, INVECE, N È DISPARI, ALLORA DEVE AVERSI

$$N < N_0. \quad (28)$$

IN QUESTO CASO Q È IL PUNTO MEDIO DI UN LATO DI \mathcal{P}_0 , ED IL POLIGONO \mathcal{P} COSTRUITO COME SOPRA HA, IN GENERALE $N + 1$ LATI, OPPURE SOLTANTO N LATI QUALORA I DUE LATI USCENTI DA Q' RISULTINO ALLINEATI.

GRAZIE ALLA (28), IL NUMERO DI LATI DI \mathcal{P} NON SUPERA IN OGNI CASO N_0 . PERCIÒ IL POLIGONO CONVESSO \mathcal{P}_c OTTENUTO COME NELLA (26) A PARTIRE DA \mathcal{P} APPARTIENE ALLA CLASSE \overline{K}_0 .

MA SICCOME $|\mathcal{P}_c| \geq |\mathcal{P}| > |\mathcal{P}_0|$, SI GIUNGE AD UNA CONTRADDIZIONE CON LA (27).

DUNQUE L'ANGOLO $O\hat{P}Q$ DEV'ESSE-RE UN ANGOLO RETTO, E DI CONSEGUENZA IL VERTICE P STA SULLA CIRCONFERENZA γ DI DIAMETRO OQ , COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

CONCLUSIONE

ABBIAMO APPURATO CHE ESISTONO POLIGONI \mathcal{P}_0 SODDISFACENTI LA (27), E DI CONSEGUENZA LA (25) E LA (24).

SAPPIAMO INOLTRE CHE TALI POLIGONI SONO REGOLARI ED HANNO $N \leq N_0$ LATI.

POICHÉ L'AREA A_N DELL'ENNAGONO REGOLARE DI PERIMETRO L , DATA DA

$$A_N = \frac{L^2}{4\pi} \frac{\frac{\pi}{N}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{N}}$$

È STRETTAMENTE CRESCENTE RISPETTO AL NUMERO N DEI LATI (V. ESERCIZI 3 E 4 DELLA SERIE [104]), SI CONCLUDE CHE \mathcal{P}_0 HA ESATTAMENTE N_0 LATI.

POSSIAMO ESPRIMERE IL RISULTATO DICENDO CHE SI HA

$$|\mathcal{P}| \leq \frac{|\partial\mathcal{P}|^2}{4\pi} \frac{\frac{\pi}{N_0}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{N_0}} \quad (29)$$

PER OGNI POLIGONO \mathcal{P} AVENTE $N \leq N_0$ LATI. DISUGUAGLIANZE COME LA (29) SI DICONO DISUGUAGLIANZE ISOPERIMETRICHE.

IL CASO IN CUI N_0 È DISPARI

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE L'ENNA-GONO DI AREA MASSIMA E PERIMETRO ASSEGNATO L È L'ENNAGONO REGOLARE, PURCHÉ IL NUMERO N_0 DEI SUOI LATI SIA UN NUMERO PARI.

IL RISULTATO CONTINUA A VALERE ANCHE SE N_0 È DISPARI.

PER VERIFICARLO, USIAMO IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE. QUESTO METODO SI PUÒ APPLICARE INDIPENDENTEMENTE DAL FATTO CHE N_0 SIA PARI O DISPARI.

RAGIONANDO COME NELLE PAGINE PRECEDENTI, SI DIMOSTRA CHE ESISTE UN POLIGONO \mathcal{P}_0 DI AREA MASSIMA FRA TUTTI QUELLI DI PERIMETRO L ED AVENTI $N \leq N_0$ LATI.

SI DIMOSTRA ANCHE CHE IL POLIGONO \mathcal{P}_0 È EQUILATERO. VERIFICHIAMO ORA CHE I SUOI ANGOLI INTERNI $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ SONO TUTTI UGUALI.

POICHÉ IL POLIGONO \mathcal{P}_0 RENDE MASSIMA LA FUNZIONE

$$f(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N) = \sum_{j=1}^N (x_{j-1} y_j - x_j y_{j-1})$$

SOTTO IL VINCOLO $g(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N) = L$, DOVE g È DATA DA

$$g(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N) = \sum_{j=1}^N \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2},$$

ESISTE UNO SCALARE λ , DETTO MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE, TALE CHE

$$\nabla_k f(P_1, \dots, P_N) = \lambda \nabla_k g(P_1, \dots, P_N) \quad (30)$$

PER OGNI $k = 1, \dots, N$.

SI PRECISA CHE NEL DEFINIRE f E g SI È INTESO, COME DI CONSUETO, $x_N = x_0$ E $y_N = y_0$, E $P_1, \dots, P_N = P_0$ SONO I VERTICI DI \mathcal{P}_0 ENUMERATI IN SENSO ANTIORARIO. PER ABBREVIARE LE FORMULE, IL SIMBOLO ∇_k DENOTA L'OPERATORE

$$\nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

PONIAMO INOLTRE $\mathbf{v}_k = P_k - P_{k-1}$ E

$$\mathbf{n}_k = \frac{(y_k - y_{k-1}, x_{k-1} - x_k)}{\ell}.$$

CON $\ell = \|\mathbf{v}_k\|$ SI DENOTA LA LUNGHEZZA DI CIASCUN LATO. POSTO $\mathbf{n}_{N+1} = \mathbf{n}_1$ E $\mathbf{v}_{N+1} = \mathbf{v}_1$, DERIVANDO LE FUNZIONI f E g TROVIAMO

$$\nabla_k f(P_1, \dots, P_N) = \ell (\mathbf{n}_{k+1} + \mathbf{n}_k),$$

$$\nabla_k g(P_1, \dots, P_N) = (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k+1})/\ell.$$

SOSTITUENDO NELLA (30) SI OTTIENE

$$\ell^2 (\mathbf{n}_{k+1} + \mathbf{n}_k) = \lambda (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k+1}).$$

MOLTIPLICANDO SCALARMENTE AMBO I MEMBRI PER IL VERSORE

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{n}_{k+1} + \mathbf{n}_k}{\|\mathbf{n}_{k+1} + \mathbf{n}_k\|},$$

E POICHÉ

$$\|\mathbf{n}_{k+1} + \mathbf{n}_k\| = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_k}{2}$$

$$\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k+1} = 2 \ell \mathbf{e}_k \cos \frac{\alpha_k}{2},$$

TROVIAMO

$$\ell \operatorname{sen} \frac{\alpha_k}{2} = \lambda \cos \frac{\alpha_k}{2} \text{ PER OGNI } k.$$

DUNQUE GLI ANGOLI INTERNI α_k DEL POLIGONO \mathcal{P}_0 SONO TUTTI UGUALI FRA LORO, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

LA DISUGUAGLIANZA ISOPERIMETRICA NELLA CLASSE DELLE FIGURE PIANE REGOLARI A TRATTI

CONSIDERIAMO LE FIGURE PIANE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, LIMITATE, LA CUI FRONTIERA $\partial\Omega$ È COSTITUITA DA UNA CURVA CHIUSA γ , SEMPLICE (CIOÈ PRIVA DI AUTOINTERSEZIONI) E REGOLARE A TRATTI. VERIFICHIAMO CHE

$$|\Omega| \leq \frac{|\partial\Omega|^2}{4\pi}. \quad (31)$$

LA (31) È LA DISUGUAGLIANZA ISOPE-RIMETRICA NEL PIANO, E LA SI PUÒ ESTENDERE A FIGURE MENO REGOLARI A PATTO DI DEFINIRE OPPORTUNAMENTE IL PERIMETRO $|\partial\Omega|$.

PER DIMOSTRARE LA (31) PER Ω REGOLARE A TRATTI BASTA OSSERVARE CHE ESISTE UNA SUCCESSIONE DI POLIGONALI γ_n , SEMPLICI E CHIUSE, FRONTIERE DI POLIGONI \mathcal{P}_n TALI CHE

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |\mathcal{P}_n| &= |\Omega|; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} |\partial\mathcal{P}_n| &= |\partial\Omega|. \end{aligned}$$

INDICATO CON N_n IL NUMERO DEI LATI DI \mathcal{P}_n , AGGIUNGENDO SE NECESSARIO DEI VERTICI LUNGO LA FRONTIERA γ_n , E CIOÈ DIVIDENDO QUALCHE LATO IN DUE, POSSIAMO FAR SÌ CHE N_n SIA PARI E TALE CHE $N_n \geq n$ PER OGNI n .

SCRIVENDO ALLORA \mathcal{P}_n AL POSTO DI \mathcal{P} NELLA (29), E N_n AL POSTO DI N_0 , LA (31) SI OTTIENE FACENDO TENDERE n ALL'INFINITO.

IL CASO DELL'UGUAGLIANZA

SE Ω È UN CERCHIO DI RAGGIO r , ALLORA SOSTITUENDO $|\Omega| = \pi r^2$ E $|\partial\Omega| = 2\pi r$ NELLA (31) SI CONSTATA CHE VALE L'UGUAGLIANZA.

VERIFICHIAMO CHE LE UNICHE FIGURE PIANE REGOLARI A TRATTI CHE SODDISFANO LA (31) CON L'UGUAGLIANZA SONO I CERCHI.

SIA DUNQUE Ω_0 UNA FIGURA PIANA INCOGNITA, REGOLARE A TRATTI E SODDISFACENTE LA (31) CON L'UGUAGLIANZA.

OSSERVIAMO CHE Ω_0 È UNA FIGURA CONVESSA PERCHÉ, SE COSÌ NON FOSSE, L'INVILUPPO CONVESSO Ω_0^* SODDISFEREBBE

$$\begin{aligned} |\Omega_0^*| &> |\Omega_0| \\ |\partial\Omega_0^*| &< |\partial\Omega_0| \end{aligned}$$

CONTRADDICENDO LA (31). PER VERIFICARE CHE Ω_0 È UN CERCHIO, EFFETTUIAMO LA MANOVRA DI STEINER.

PUNTI CONTRAPPOSTI

COLLOCHIAMO INNANZITUTTO L'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO IN UN PUNTO $O \in \partial\Omega_0$, E INDICHIAMO CON $Q \in \partial\Omega_0$ IL PUNTO TALE CHE LA CURVA $\gamma = \partial\Omega$ RISULTI DIVISA IN DUE PARTI γ_1, γ_2 DI UGUALE LUNGHEZZA.

POSIZIONIAMO L'ASSE x IN MODO TALE CHE IL PUNTO Q SI TROVI SUL SEMIASSE DELLE $x > 0$.

NÉ γ_1 NÉ γ_2 PUÒ COINCIDERE COL SEGMENTO OQ PERCHÉ, SE COSÌ FOSSE, SI AVREBBE $\gamma_1 = \gamma_2 = OQ$ E DI CONSEGUENZA $|\Omega_0| = 0$.

DIVISIONE A METÀ

OSSERVIAMO POI CHE IL SEGMENTO OQ DIVIDE Ω_0 IN DUE PARTI DI UGUALE AREA.

SE COSÌ NON FOSSE, ALLORA LA PARTE DI AREA MAGGIORE, UNITA CON LA SUA IMMAGINE SPECULARE RISPETTO ALLA RETTA PER OQ , DAREBBE UNA FIGURA DAL BORDO REGOLARE A TRATTI, ISOPERIMETRICA E DI AREA MAGGIORE DI Ω_0 , CONTRO LA (31).

MANOVRA DI STEINER

INFINE, VERIFICHIAMO CHE TUTTI I PUNTI DELLA FRONTIERA $\partial\Omega_0$ GIACCIONO SULLA CIRCONFERENZA DI DIAMETRO OQ .

PRESO ARBITRARIAMENTE UN PUNTO $P \in \partial\Omega_0$, DIVERSO DAI PUNTI O E Q PER I QUALI LA TESI È BANALE, VERIFICHIAMO CHE L'ANGOLO $O\hat{P}Q$ È UN ANGOLO RETTO.

SENZA LEDERE LA GENERALITÀ, SUPPONIAMO CHE P GIACCIA NEL SEMIPIANO $y > 0$, E SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE L'ANGOLO $O\hat{P}Q$ NON SIA UN ANGOLO RETTO.

IL SEGMENTO OP DIVIDE LA FIGURA Ω_0 IN DUE PARTI, UNA DELLE QUALI GIACENTE NEL SEMIPIANO $y \geq 0$: LA INDICHEREMO CON Ω_1 .

ANALOGAMENTE, IL SEGMENTO PQ DIVIDE LA FIGURA Ω_0 IN DUE PARTI: QUELLA GIACENTE NEL SEMIPIANO $y \geq 0$ SARÀ INDICATA CON Ω_2 .

INDICHIAMO CON Ω'_2 LA FIGURA OTTENUTA RUOTANDO Ω_2 , COME UN CORPO RIGIDO, INTORNO AL PUNTO P FINO A QUANDO IL PUNTO Q RAGGIUNGE LA POSIZIONE Q' TALE CHE L'ANGOLO $O\hat{P}Q'$ È UN ANGOLO RETTO.

IL TRIANGOLO RETTANGOLO $T' = OPQ'$ HA AREA MAGGIORE DEL TRIANGOLO $T = OPQ$ (V. ESERCIZIO 2 DELLA SERIE [104]).

PERCIÒ L'UNIONE $\Omega_1 \cup T' \cup \Omega'_2$, INSIEME ALLA SUA IMMAGINE SPECULARE RISPETTO ALLA RETTA PER OQ' , INDIVIDUA UNA FIGURA ISOPERIMETRICA RISPETTO AD Ω_0 MA DI AREA MAGGIORE, CONTRO LA (31).

QUESTA CONTRADDIZIONE MOSTRA CHE L'ANGOLO $O\hat{P}Q$ DEV'ESSERE UN ANGOLO RETTO, DUNQUE P GIACE SULLA CIRCONFERENZA DI DIAMETRO OQ , COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

UN PRESUPPOSTO DELLA MANOVRA DI STEINER

FISSATO UN VETTORE $\mathbf{r}_Q \neq \mathbf{0}$, E POSTO $\mathbf{r}_C = \frac{1}{2} \mathbf{r}_Q$, VOGLIAMO VERIFICARE CHE SE UN VETTORE \mathbf{r}_P È PERPENDICOLARE ALLA DIFFERENZA $\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$, ALLORA

$$\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_C\| = \|\mathbf{r}_C\|.$$

SI HA INFATTI

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_C\|^2 &= (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_C) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_C) \\ &= \|\mathbf{r}_P\|^2 - 2\mathbf{r}_P \cdot \mathbf{r}_C + \|\mathbf{r}_C\|^2 \end{aligned}$$

E L'IPOTESI CHE $\mathbf{r}_P \cdot (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) = 0$ EQUIVALE A

$$2\mathbf{r}_P \cdot \mathbf{r}_C = \|\mathbf{r}_P\|^2.$$

LA TESI SEGUE.

LA SOLUZIONE DI PETER LAX

NEL 1995 UNO DEI PIÙ FAMOSI MATEMATICI CONTEMPORANEI, PETER LAX, PUBBLICÒ SU DI UNA RIVISTA DIVULGATIVA (THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY) LA SEGUENTE SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI DIDONE.

CONSIDERIAMO L'INSIEME DELLE CURVE PIANE γ DI EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in [0, \pi],$$

CON FUNZIONI $x(s)$ E $y(s)$ DI CLASSE $C^1([0, \pi])$ E SODDISFACENTI PER OGNI $s \in [0, \pi]$ LA CONDIZIONE

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1. \quad (32)$$

RICHIEDIAMO INOLTRE CHE LE CURVE γ ABBIANO GLI ESTREMI SULL'ASSE x , E PIÙ PRECISAMENTE CHE

$$\begin{aligned} x(0) &\geq x(\pi); \\ y(0) &= y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

CI PROPONIAMO DI DIMOSTRARE CHE IL FUNZIONALE

$$F[\gamma] = - \int_0^\pi x'(s) y(s) ds$$

AMMETTE MASSIMO NEL SUDDETTO INSIEME DI CURVE, E DI INDIVIDUARE LE CURVE MASSIMANTI.

PER LA FORMULA DI GAUSS DELL'AREA, OVVERO PER IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA NEL PIANO, IL VALORE NUMERICO DI $F[\gamma]$ ESPRIME L'AREA DELLA REGIONE PIANA DELIMITATA DA γ E DAL SEGMENTO CHE NE UNISCE GLI ESTREMI, PURCHÉ γ NON SI AUTOINTERSECHI E GIACCIA NEL SEMIPIANO $y \geq 0$.

PER LA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY: $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, SI HA

$$-x'(s) y(s) \leq \frac{1}{2} \left((x'(s))^2 + y^2(s) \right) \quad (33)$$

CON UGUAGLIANZA SE E SOLO SE $-x'(s) = y(s)$. TENENDO CONTO ANCHE DELLA (32), POSSIAMO SCRIVERE

$$\begin{aligned} F[\gamma] &\leq \frac{1}{2} \int_0^\pi \left((x'(s))^2 + y^2(s) \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(1 - (y'(s))^2 + y^2(s) \right) ds. \end{aligned}$$

ORA INTRODUCIAMO LA FUNZIONE

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{y(s)}{\sin s}, & s \in (0, \pi), \\ y'(0), & s = 0, \\ -y'(\pi), & s = \pi. \end{cases}$$

CON LA REGOLA DI DE L'HÔPITAL SI VEDE CHE $\varphi \in C^0([0, \pi])$, MENTRE NON È DETTO CHE φ SIA DERIVABILE AGLI ESTREMI. EFFETTUANDO LE SOSTITUZIONI

$$\begin{aligned} y(s) &= \varphi(s) \sin s, \quad s \in [0, \pi]; \\ y'(s) &= \varphi'(s) \sin s \\ &\quad + \varphi(s) \cos s, \quad s \in (0, \pi), \end{aligned}$$

SI TROVA

$$\begin{aligned} F[\gamma] &\leq \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(1 - (\varphi'(s))^2 \sin^2 s \right. \\ &\quad \left. - \varphi(s) \varphi'(s) \sin 2s - \varphi^2(s) \cos 2s \right) ds. \end{aligned}$$

INTEGRANDO PER PARTI SI NOTA CHE

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi^2(s) \cos 2s ds &= \\ - \int_0^\pi \varphi(s) \varphi'(s) \sin 2s ds. \end{aligned}$$

A QUESTO PROPOSITO SI OSSERVI CHE IL PRODOTTO $\varphi'(s) \sin s = y'(s) - \varphi(s) \cos s$ È PROLUNGABILE PER CONTINUITÀ AGLI ESTREMI, QUINDI LO È ANCHE IL PRODOTTO $\varphi'(s) \sin 2s$.

DUNQUE POSSIAMO SEMPLICEMENTE SCRIVERE

$$\begin{aligned} F[\gamma] &\leq \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(1 - (\varphi'(s))^2 \operatorname{sen}^2 s \right) ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^\pi ds = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (34)$$

POICHÉ L'UGUAGLIANZA VIENE ASSUNTA NEL CASO IN CUI γ È LA SEMICIRCONFERENZA DI EQUAZIONI

$$\begin{cases} x = \cos s, \\ y = \operatorname{sen} s, \end{cases} \quad s \in [0, \pi],$$

CONCLUDIAMO CHE

$$\max_{\gamma} F[\gamma] = \frac{\pi}{2}.$$

PER INDIVIDUARE TUTTE LE CURVE MASSIMANTI, INDICHIAMO ORA CON γ UNA CURVA INCOGNITA TALE CHE $F[\gamma] = \frac{\pi}{2}$.

POICHÉ VALE L'UGUAGLIANZA NELLA (34), φ' DEVE ESSERE IDENTICAMENTE NULLA. DUNQUE $\varphi(s) = k$ (COSTANTE REALE) E $y(s) = k \operatorname{sen} s$, DA CUI $y'(s) = k \cos s$.

INOLTRE, POICHÉ VALE L'UGUAGLIANZA NELLA (33), SI HA $x'(s) = -y(s) = -k \operatorname{sen} s$. RICORDANDO LA (32) SI DEDUCE CHE $k = \pm 1$.

RICORDANDO INFINE CHE γ GIACE NEL SEMIPIANO $y \geq 0$, SI CONCLUDE CHE $k = 1$, E LE CURVE CHE MASSIMIZZANO $F[\gamma]$ SONO QUELLE DI EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x = x_C + \cos s, \\ y = \operatorname{sen} s, \end{cases} \quad s \in [0, \pi],$$

CON x_C UN PARAMETRO IN \mathbb{R} . SONO CIOÈ SEMICIRCONFERENZE DI RAGGIO 1 IL CUI CENTRO HA COORDINATE $(x_C, 0)$.

IL CASO N -DIMENSIONALE

LA DISUGUAGLIANZA ISOPERIMETRICA PER INSIEMI N -DIMENSIONALI $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ HA LA SEGUENTE FORMA:

$$|\Omega| \leq c_N |\partial\Omega|^{\frac{N}{N-1}}, \quad (35)$$

DOVE c_N È UN'OPPORTUNA COSTANTE CHE DIPENDE DALLA DIMENSIONE N .

IL VALORE DI c_N È TALE CHE, QUANDO Ω È UNA PALLA N -DIMENSIONALE, IL PRIMO ED IL SECONDO MEMBRO DELLA (35) SONO UGUALI FRA LORO. AD ESEMPIO:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{4\pi} \\ c_3 &= \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

UNA DIMOSTRAZIONE DELLA (35), VALIDA IN DIMENSIONE $N = 3$ E PER SOLIDI DALLA SUPERFICIE ANALITICA A PEZZI, SI TROVA IN UN ARTICOLO DI H. A. SCHWARZ DEL 1884 [21].

DIMOSTRAZIONI PIÙ GENERALI SI POSSONO TROVARE, AD ESEMPIO, NEL LIBRO DI FEDERER [8] E NEGLI ARTICOLI DI DE GIORGI [7] E DI TALENTI [23].

METODI CLASSICI

PREMESSA

NON SI CONOSCE UN METODO GENERALE PER TROVARE IL MINIMO DI QUALUNQUE FUNZIONALE.

IN QUESTE PAGINE SI ACCENNA A QUALCUNO DEI PRINCIPALI METODI CHE SI POSSONO UTILIZZARE, SENZA GARANTIRNE IL SUCCESSO INCONDIZIONATO.

CHE COS'È L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE ESPRIME UNA CONDIZIONE NECESSARIA CHE UNA FUNZIONE u_0 DEVE SODDISFARE PER ESSERE ESTREMANTE DI UN FUNZIONALE DATO.

PIÙ PRECISAMENTE, CONSIDERIAMO IL FUNZIONALE

$$F[u] = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx,$$

DOVE (a, b) È UN INTERVALLO LIMITATO E LA FUNZIONE f , PER SEMPLICITÀ, È DI CLASSE $C^2(\mathbb{R}^3)$.

CERCHIAMO IL MINIMO DI F NELLA CLASSE $X = \{u \in C^1([a, b]) \mid u(a) = u_a, u(b) = u_b\}$, ESSENDO u_a, u_b DUE PARAMETRI ASSEGNATI.

SUPPONIAMO CHE ESISTA UNA MINIMANTE $u_0 \in X$, E CHE u_0 SIA DI CLASSE $C^2([a, b])$. PIÙ AVANTI RIMUOVEREMO QUEST'ULTIMA IPOTESI GRAZIE AD UN TEOREMA DI REGOLARITÀ.

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE, SOTTO TALI IPOTESI, LA FUNZIONE u_0 È UNA SOLUZIONE DELLA SEGUENTE EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u'}(x, u_0(x), u_0'(x)) \\ = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x), u_0'(x)). \end{aligned} \quad (36)$$

TALE EQUAZIONE È DETTA DI EULERO, O DI EULERO-LAGRANGE. SVOLTE LE DERIVATE IVI INDICATE, IL CHE È POSSIBILE PER LE IPOTESI DI REGOLARITÀ SU f E SU u_0 , SI OTTIENE UN'EQUAZIONE DEL SECONDO ORDINE.

COME SI USA L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

SI TROVANO LE SOLUZIONI DELLA (36), DETTE "ESTREMALI" DEL FUNZIONALE F , SODDISFACENTI LE CONDIZIONI

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b,$$

CHIAMATE CONDIZIONI AGLI ESTREMI, O CONDIZIONI AI LIMITI. POI SI CERCANO FRA LE ESTREMALI LE EVENTUALI MINIMANTI DEL FUNZIONALE.

STANDO A [9, PAG. 70], L'APPELLATIVO DI "ESTREMALI" FU INTRODOTTO DA KNESER NEL SUO "LEHRBUCH DER VARIATIONSRECHNUNG" (TESTO DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI, 1900).

LE DIFFICOLTÀ INSITE NEL METODO

UNA PRIMA DIFFICOLTÀ STA NEL RISOLVERE L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE.

QUESTA DIFFICOLTÀ È PARTICOLARMENTE SENTITA PER FUNZIONALI PIÙ COMPLESSI, COME AD ESEMPIO IL FUNZIONALE DI DIRICHLET (19), LA CUI EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE È UN'EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI

UNA SECONDA DIFFICOLTÀ STA NEL FATTO CHE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI EULERO, AMMESSO DI RIUSCIRE A TROVARLE, NON È DETTO CHE SIANO ESTREMANTE DEL FUNZIONALE.

QUESTO PERCHÉ L'EQUAZIONE ESPRIME UNA CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE IN TAL SENSO.

IL LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

PER DIMOSTRARE LA NECESSITÀ DELLA CONDIZIONE (36) CI SI SERVE DEL SEGUENTE LEMMA.

SE UNA FUNZIONE $A \in C^0([a, b])$ HA LA PROPRIETÀ CHE

$$\int_a^b A(x) \eta(x) dx = 0 \quad (37)$$

PER OGNI FUNZIONE $\eta \in C^1([a, b])$ SODDISFACENTE LE CONDIZIONI $\eta(a) = \eta(b) = 0$, ALLORA A È IDENTICAMENTE NULLA.

PER DIMOSTRARE IL LEMMA, SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE RISULTI $A(x_0) \neq 0$ IN UN CERTO PUNTO $x_0 \in (a, b)$. SENZA LEDERE LA GENERALITÀ, SUPPONIAMO $A(x_0) > 0$.

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO, ESISTE UN INTORNO $I_0 = (x_0 - r, x_0 + r) \subset (a, b)$ NEL QUALE VALE LA DISUGUAGLIANZA $A(x) \geq \frac{1}{2} A(x_0)$. PRENDIAMO ALLORA (FRA LE TANTE POSSIBILITÀ)

$$\eta(x) = \left(\left(r^2 - (x - x_0)^2 \right)^+ \right)^2. \quad (38)$$

RISULTA $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ E $\eta(a) = \eta(b) = 0$, DUNQUE VALE LA (37). TUTTAVIA SI HA ANCHE $\eta > 0$ IN I_0 E $\eta = 0$ IN $\mathbb{R} \setminus I_0$, DUNQUE

$$\begin{aligned} \int_a^b A(x) \eta(x) dx &= \int_{I_0} A(x) \eta(x) dx \\ &\geq \frac{A(x_0)}{2} \int_{I_0} \eta(x) dx \\ &> 0. \end{aligned}$$

POICHÉ CIÒ CONTRADDICE LA (37), DEVE AVERSI $A(x_0) = 0$. PER L'ARBITRARIETÀ DI x_0 , SI DEDUCE CHE $A = 0$ IN TUTTO L'INTERVALLO (a, b) . INFINE, ESSENDO A CONTINUA AGLI ESTREMI, SI CONCLUDE CHE $A = 0$ IN $[a, b]$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

OSSERVAZIONE 1

IL LEMMA CONTINUA A VALERE SOTTO L'IPOTESI PIÙ DEBOLE CHE LA (37) VALGA PER LE FUNZIONI $\eta \in C^\infty([a, b])$ TALI CHE $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

PER VERIFICARLO, BASTA SOSTITUIRE LA (38) CON UNA FUNZIONE η AVENUTE LE PROPRIETÀ RICHIESTE.

OSSERVAZIONE 2

IL LEMMA SI PUÒ ESTENDERE A FUNZIONI $A(x)$ DISCONTINUE, NONCHÉ AL CASO IN CUI LA VARIABILE x È UN VETTORE IN \mathbb{R}^N . UN ENUNCIATO PRECISO SI PUÒ TROVARE, AD ESEMPIO, NEL COROLLARIO IV.24 DI [3].

OSSERVAZIONE 3

SE UNA FUNZIONE $u \in C^1([a, b])$ SODDISFA LA CONDIZIONE $u(x_0) < 0$, OPPURE $u'(x_0) > 0$, LA FUNZIONE $u_t(x) = u(x) + t\eta(x)$ SODDISFA LE STESSE DISUGUAGLIANZE NELL'INTORNO I_0 PUR DI PRENDERE r E t SUFFICIENTEMENTE PICCOLI.

CIÒ CONSENTE DI RICAVARE L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE ANCHE QUANDO LA CLASSE DELLE FUNZIONI AMMISSIBILI È SOGGETTA A VINCOLI DEL TIPO $u < 0$, OPPURE $u' > 0$. NEL PROSSIMO PARAGRAFO VEDREMO COME SI PROCEDE.

COME SI RICAVA L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE ESPRIME UNA CONDIZIONE NECESSARIA CHE UNA FUNZIONE u_0 DEVE SODDISFARE PER ESSERE ESTREMANTE DI UN FUNZIONALE DATO.

PER VERIFICARE TALE AFFERMAZIONE, SUPPONIAMO CHE UNA CERTA FUNZIONE $u_0 \in C^2([a, b])$ SIA UN'ESTREMANTE DEL FUNZIONALE F NELLA CLASSE X (V. PAG. Mc39). PER FISSARE LE IDEE, SUPPONIAMO CHE

$$F[u_0] = \min_{u \in X} F[u]. \quad (39)$$

VOGLIAMO VERIFICARE CHE LA (36) È SODDISFATTA.

A TAL FINE FISSIAMO UNA FUNZIONE $\eta \in C^1([a, b])$ TALE CHE $\eta(a) = \eta(b) = 0$, E STUDIAMO LA RETTA $r \subset X$ COSTITUITA DALLE FUNZIONI $u_t \in X$ DATE DA

$$u_t(x) = u_0(x) + t\eta(x).$$

SI INTENDE CHE I PUNTI DELLA RETTA r SONO LE FUNZIONI u_t SOPRA DEFINITE.

LE FUNZIONI u_t SONO DI CLASSE $C^1([a, b])$ PERCHÉ SOMME DI DUE TALI FUNZIONI, E SODDISFANO $u_t(a) = u_a$, $u_t(b) = u_b$ PERCHÉ η SI ANNULLA AGLI ESTREMI. SI HA, IN PARTICOLARE,

$$u'_t(x) = u'_0(x) + t\eta'(x).$$

CONSIDERIAMO DUNQUE LA RESTRIZIONE φ DEL FUNZIONALE $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ ALLA RETTA $r \subset X$, E CIOÈ LA FUNZIONE

$$\varphi(t) = F[u_t]$$

DEFINITA PER $t \in \mathbb{R}$.

PER EFFETTO DELLA (39) SI HA, A MAGGIOR RAGIONE,

$$\varphi(0) = \min_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t).$$

ESSENDO φ UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE REALE, INTENDIAMO APPLICARE IL TEOREMA DI FERMAT E SCRIVERE $\varphi'(0) = 0$.

SIAMO PERCIÒ CONDOTTI AL PROBLEMA DI PORTARE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE L'OPERAZIONE DI DERIVAZIONE NELL'ESPRESSIONE

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, u_t(x), u'_t(x)) dx.$$

CIÒ È POSSIBILE PERCHÉ LA FUNZIONE COMPOSTA $f(x, u_t(x), u'_t(x))$ È CONTINUA RISPETTO ALLA COPPIA (x, t) INSIEME ALLA SUA DERIVATA PARZIALE RISPETTO A t , DATA DA

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x, u_t(x), u'_t(x)) \\ = f_u(x, u_t(x), u'_t(x)) \eta(x) \\ + f_{u'}(x, u_t(x), u'_t(x)) \eta'(x). \end{aligned}$$

PERCIÒ LA CONDIZIONE $\varphi'(0) = 0$ DIVENTA

$$\begin{aligned} \int_a^b f_u(x, u_0(x), u'_0(x)) \eta(x) dx \\ + \int_a^b f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) \eta'(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

IL SECONDO INTEGRALE SI PUÒ SVOLGERE PER PARTI, TENENDO CONTO DEL FATTO CHE $\eta(a) = \eta(b) = 0$. COSÌ FACENDO, SI OTTIENE

$$\int_a^b \left(f_u - \frac{d}{dx} f_{u'} \right) \eta(x) dx = 0,$$

DOVE SI È OMESSO, PER BREVIÀ, L'ARGOMENTO $(x, u_0(x), u'_0(x))$ DI f_u E DI $f_{u'}$.

INDICHIAMO CON $A(x)$ LA FUNZIONE CONTINUA

$$A(x) = f_u(x, u_0(x), u'_0(x)) - \frac{d}{dx} f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)),$$

E RICORDIAMO CHE $\eta \in C^1([a, b])$ È UNA FUNZIONE ARBITRARIA, NULLA AGLI ESTREMI.

DUNQUE, PER IL LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI, SI CONCLUDE CHE A È IDENTICAMENTE NULLA.

LA CONDIZIONE $A \equiv 0$ EQUIVALE ALLA (36), E LA DIMOSTRAZIONE È CONCLUSA.

L'EQUAZIONE IN FORMA INTEGRALE

TORNIAMO A CONSIDERARE IL FUNZIONALE F NELLA CLASSE X COME A PAG. Mc39, MA QUESTA VOLTA SOTTO L'IPOTESI CHE $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. VOGLIAMO RIMUOVERE ANCHE L'IPOTESI CHE LE EVENTUALI MINIMANTI SIANO DI CLASSE $C^2([a, b])$.

PIÙ AVANTI DAREMO UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ LE MINIMANTI ABBIANO TALE REGOLARITÀ.

SUPPONIAMO CHE UNA FUNZIONE $u_0 \in X$ SIA UNA MINIMANTE. POSSIAMO PROCEDERE DI NUOVO COME A PAG. Mc41 ED ARRIVARE ALLA (40).

ORA NON POSSIAMO SVOLGERE PER PARTI IL SECONDO INTEGRALE PERCHÉ $f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x))$ PUÒ NON ESSERE DERIVABILE. PONIAMO ALLORA

$$A(x) = \int_a^x f_u(t, u_0(t), u'_0(t)) dt. \quad (41)$$

SVOLGENDO PER PARTI IL PRIMO INTEGRALE NELLA (40) SI OTTIENE

$$\int_a^b \left(A(x) - f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) \right) \eta'(x) dx = 0.$$

POICHÉ IL COEFFICIENTE DI η' È UNA FUNZIONE CONTINUA, POSSIAMO INVOCARE IL LEMMA DI DU BOIS-REYMOND E CONCLUDERE CHE

$$A(x) - f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) = \text{COST.} \quad (42)$$

MA POICHÉ $A(x)$ È DI CLASSE $C^1([a, b])$ PER LA DEFINIZIONE (41), DALLA (42) SEGUE CHE LA FUNZIONE COMPOSTA

$$f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x))$$

È DI CLASSE $C^1([a, b])$ RISPETTO ALLA VARIABILE x ANCHE SE $f_{u'}$ È SOLTANTO CONTINUA RISPETTO ALLA VARIABILE (x, u, u') , E u'_0 È SOLTANTO CONTINUA RISPETTO ALLA x .

DUNQUE È LEGITTIMO DERIVARE AMBO I MEMBRI DELLA (42). COSÌ FACENDO, SI OTTIENE NUOVAMENTE LA (36).

QUESTA VOLTA PERÒ NON SARÀ POSSIBILE, IN GENERALE, SVOLGERE LA DERIVATA INDICATA NELLA (36) MEDIANTE LA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA.

CONCLUDIAMO CON L'OSSERVARE CHE LA (42), SCRITTA NELLA FORMA

$$\int_a^x f_u(t, u_0(t), u'_0(t)) dt = f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) + \text{COST.} \quad (43)$$

VIENE DETTA EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE IN FORMA INTEGRALE.

UN TEOREMA DI REGOLARITÀ

CONSIDERIAMO ANCORA UNA VOLTA IL FUNZIONALE F NELLA CLASSE X COME A PAG. Mc39, CON $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE SE PER OGNI (x, u, u') RISULTA

$$f_{u'u'}(x, u, u') > 0$$

ALLORA LE EVENTUALI MINIMANTI SONO DI CLASSE $C^2((a, b))$.

CONSIDERIAMO DUNQUE UNA MINIMANTE $u_0 \in X$. PROCEDENDO COME A PAG. Mc42 ARRIVIAMO ALL'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE (43) IN FORMA INTEGRALE.

PER IPOTESI, LA DERIVATA PARZIALE

$$\frac{\partial}{\partial u'} f_w(x, u, u')$$

È POSITIVA, E PERCIÒ POSSIAMO APPLICARE ALLA (42) IL TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA, DETTO ANCHE TEOREMA DEL DINI IN ONORE DI ULISSSE DINI (1845–1918).

FISSATO UN PUNTO $x_0 \in (a, b)$, ESSENDO LA FUNZIONE

$$A(x) - f_w(x, u_0(x), p)$$

DI CLASSE C^1 RISPETTO ALLA VARIABILE CONGIUNTA (x, p) , ESISTE UN'UNICA FUNZIONE $p = g(x)$ TALE CHE

$$A(x) - f_w(x, u, g(x)) = \text{COST.}$$

IN UN OPPORTUNO INTORNO DI x_0 .

INOLTRE $g(x)$ È DI CLASSE C^1 , QUINDI ANCHE $u'_0(x)$ ($= g(x)$ PER L'UNICITÀ) È DI CLASSE C^1 IN UN INTORNO DI x_0 .

PER L'ARBITRARIETÀ DI x_0 , NE SEGUE CHE $u_0 \in C^2((a, b))$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE

SUPPONIAMO DI AVER TROVATO UN'ESTREMALE $u_0 \in C^2((a, b))$ DEL FUNZIONALE F NELLA CLASSE X DEFINITA A PAG. Mc39.

VERIFICHIAMO CHE SE PER OGNI $x \in (a, b)$ LA LAGRANGIANA $f(x, u, u')$, CHE SUPPONIAMO DI CLASSE $C^2(\mathbb{R}^3)$, È CONVESSA RISPETTO ALLA VARIABILE (u, u') , ALLORA LA FUNZIONE u_0 È UNA MINIMANTE.

PER LA CONVESSITÀ DI f , POSSIAMO SCRIVERE

$$\begin{aligned} f(x, u, u') &\geq f(x, u_0, u'_0) & (44) \\ &+ f_u(x, u_0, u'_0) (u - u_0) \\ &+ f_{u'}(x, u_0, u'_0) (u' - u'_0) \end{aligned}$$

PER OGNI $x \in [a, b]$ ED OGNI $(u, u') \in \mathbb{R}^2$.

PRESA ARBITRARIAMENTE UNA FUNZIONE $u \in X$, SOSTITUIAMO NELLA (44) $u = u(x)$, $u' = u'(x)$, $u_0 = u_0(x)$ E $u'_0 = u'_0(x)$. INTEGRANDO AMBO I MEMBRI SI TROVA

$$\begin{aligned} F[u] &\geq F[u_0] \\ &+ \int_a^b f_u(x, u_0(x), u'_0(x)) (u(x) - u_0(x)) dx \\ &+ \int_a^b f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) (u'(x) - u'_0(x)) dx. \end{aligned}$$

SVOLGENDO PER PARTI L'ULTIMO INTEGRALE, TENUTO CONTO DEL FATTO CHE u E u_0 COINCIDONO AGLI ESTREMI SI HA

$$\begin{aligned} F[u] &\geq F[u_0] & (45) \\ &+ \int_a^b \left(f_u - \frac{d}{dx} f_{u'} \right) (u(x) - u_0(x)) dx \end{aligned}$$

DOVE SI È OMESSO, PER BREVIITÀ, L'ARGOMENTO $(x, u_0(x), u'_0(x))$ DI f_u E DI $f_{u'}$.

MA SICCOME u_0 È UN'ESTREMALE DEL FUNZIONALE F , DUNQUE SODDISFA L'EQUAZIONE (36), LA (45) MOSTRA CHE

$$F[u] \geq F[u_0].$$

DA QUI, ESSENDO u ARBITRARIA, POSSIAMO CONCLUDERE CHE u_0 È UNA MINIMANTE, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

I PROBLEMI ISOPERIMETRICI

CONSIDERIAMO ORA ALCUNI PROBLEMI DETTI ISOPERIMETRICI (PER ESTENSIONE DI LINGUAGGIO).

SI TRATTA DI MINIMIZZARE IL FUNZIONALE F DI PAG. Mc39 NELLA CLASSE X_G DELLE FUNZIONI $u \in C^1([a, b])$ TALI CHE $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$ (DATI) E SODDISFACENTI LA CONDIZIONE

$$G[u] = 0, \quad (46)$$

ESSENDO G IL FUNZIONALE DATO DA

$$G[u] = \int_a^b g(x, u(x), u'(x)) dx.$$

SI CONSIDERANO DUNQUE DUE FUNZIONALI: UNO (F) DA MINIMIZZARE, L'ALTRO (G) CHE INTERVIENE NELLA CONDIZIONE (46).

LA (46) SI DICE CONDIZIONE ISOPE-
RIMETRICA PERCHÉ NEL CASO PARTICO-
LARE IN CUI

$$g(x, u, u') = \sqrt{1 + (u')^2} - \frac{L}{b-a},$$

LA (46) DIVENTA

$$\int_a^b \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx = L \text{ (DATO),}$$

E QUINDI ESPRIME LA CONDIZIONE CHE IL GRAFICO DI u ABBA LUNGHEZZA L .

RIDUZIONE AL CASO BIDIMENSIONALE

CERCHIAMO DI RICAVARE UNA CONDIZIONE NECESSARIA, ANALOGA ALLA (36), CHE UN'EVENTUALE MINIMANTE u_0 DEVE SODDISFARE.

IL RAGIONAMENTO SVOLTO A PAG. Mc41 NON SI PUÒ RIPETERE PERCHÉ LA FUNZIONE $u_t = u_0 + t\eta$ NON SODDISFA, IN GENERALE, LA CONDIZIONE (46) PER $t \neq 0$.

PROCEDIAMO QUINDI COME SEGUE. FISSATE DUE FUNZIONI $\eta_1, \eta_2 \in C^1([a, b])$, NULLE AGLI ESTREMI, DEFINIAMO LE FUNZIONI φ, ψ DELLE DUE VARIABILI REALI (s, t) PONENDO

$$\varphi(s, t) = F[u_0 + s\eta_1 + t\eta_2],$$

$$\psi(s, t) = G[u_0 + s\eta_1 + t\eta_2].$$

SE ESISTE UNA MINIMANTE u_0 DEL FUNZIONALE F NELLA CLASSE X_G , ALLORA IL PUNTO $(s_0, t_0) = (0, 0)$ È UN PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO PER LA FUNZIONE φ NELL'INSIEME DEI PUNTI $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ TALI CHE

$$\psi(s, t) = 0.$$

ESSENDOCI RICONDOTTI AD UN PROBLEMA DI MINIMO VINCOLATO PER LA FUNZIONE DI DUE VARIABILI $\varphi(s, t)$, APPLICHIAMO IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE.

IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

SAPPIAMO CHE SE φ E ψ SONO DI CLASSE C^1 , E SE IL GRADIENTE $\nabla\psi(0,0)$ NON SI ANNULLA, ALLORA ESISTE UNO SCALARE λ , DETTO MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE, TALE CHE

$$\nabla\varphi(0,0) = \lambda \nabla\psi(0,0). \quad (47)$$

VERIFICHIAMO CHE φ E ψ SONO DI CLASSE C^1 SUPPONENDO, PER SEMPLICITÀ, CHE $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ E CHE $u_0 \in C^2([a, b])$.

RAGIONANDO COME A PAG. Mc41 SI VEDE CHE $\psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, E IN PARTICOLARE LA SUA DERIVATA $\psi_t(0,0)$ È DATA DA $\psi_t(0,0) =$

$$\int_a^b g_u(x, u_0(x), u'_0(x)) \eta_2(x) dx + \int_a^b g_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) \eta'_2(x) dx.$$

SVOLGENDO PER PARTI IL SECONDO INTEGRALE POSSIAMO ANCHE SCRIVERE

$$\psi_t(0,0) = \int_a^b \left(g_u - \frac{d}{dx} g_{u'} \right) \eta_2(x) dx$$

DOVE SI È OMESSO, PER BREVIITÀ, L'ARGOMENTO $(x, u_0(x), u'_0(x))$ DI g_u E DI $g_{u'}$.

PER SODDISFARE LA CONDIZIONE $\nabla\psi(0,0) \neq \mathbf{0}$ DEL METODO DEI MOLTIPLICATORI È SUFFICIENTE PRENDERE η_2 , CHE È ARBITRARIA, IN MODO TALE CHE

$$\int_a^b \left(g_u - \frac{d}{dx} g_{u'} \right) \eta_2(x) dx \neq 0. \quad (48)$$

IL LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI GARANTISCE L'ESISTENZA DI ALMENO UNA FUNZIONE η_2

SODDISFACENTE LA (48) A CONDIZIONE CHE LA FUNZIONE CONTINUA

$$g_u(x, u_0(x), u'_0(x)) - \frac{d}{dx} g_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x))$$

NON SIA IDENTICAMENTE NULLA. IL PRESENTE RAGIONAMENTO SI PUÒ DUNQUE PORTARE AVANTI SOTTO L'IPOTESI CHE LA MINIMANTE u_0 NON SIA UN'ESTREMALE DEL FUNZIONALE G .

SOTTO TALE IPOTESI, SCEGLIAMO (IN TEORIA) UNA PARTICOLARE FUNZIONE η_2 SODDISFACENTE LA (48).

POICHÉ ANCHE φ , COME ψ , È DI CLASSE $C^1(\mathbb{R}^2)$, POSSIAMO APPLICARE IL METODO DEI MOLTIPLICATORI E DIRE CHE VALE LA (47).

LA TESI (47) IMPLICA CHE $\varphi_s(0,0) = \lambda \psi_s(0,0)$. E SICCOME

$$\varphi_s(0,0) = \int_a^b \left(f_u - \frac{d}{dx} f_{u'} \right) \eta_1(x) dx,$$

$$\psi_s(0,0) = \int_a^b \left(g_u - \frac{d}{dx} g_{u'} \right) \eta_1(x) dx,$$

CONCLUDIAMO CHE

$$\int_a^b \left(\mathcal{L}_u - \frac{d}{dx} \mathcal{L}_{u'} \right) \eta_1(x) dx = 0,$$

AVENDO POSTO, PER BREVIITÀ, $\mathcal{L}(x, u, u') = f(x, u, u') - \lambda g(x, u, u')$. ESSENDO η_1 ARBITRARIA, NE SEGUE CHE CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ UNA FUNZIONE $u_0 \in C^2((a, b))$, CHE NON SIA UN'ESTREMALE DEL FUNZIONALE G , MINIMIZZI IL FUNZIONALE F NELLA CLASSE X_G , È CHE RISULTI

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) \quad (49)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(x, u_0(x), u'_0(x))$$

PER OGNI $x \in (a, b)$.

APPLICAZIONE ALLA BRACHISTOCRONA

LA CICLOIDE

JOHANN BERNOULLI, E GLI ALTRI MATEMATICI CHE NEL SEICENTO RISOLSERO IL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA, SCOPRIRONO CHE LA CURVA DI MINIMO TEMPO DI TRANSITO È UNA CICLOIDE.

RICAVIAMO LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA CICLOIDE DESCRITTA DA UN PUNTO P FISSATO SU DI UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R QUANDO TALE CIRCONFERENZA ROTOLA SENZA STRISCIARE SOTTO L'ASSE x .

SUPPONIAMO CHE IL PUNTO P SI TROVI INIZIALMENTE NELL'ORIGINE.

INDICATO CON ϑ L'ANGOLO TRA LA RETTA OP E L'ASSE y , L'ASSENZA DI STRISCIAMENTO SI ESPRIME MEDIANTE L'UGUAGLIANZA

$$a = x_C$$

ESSENDO x_C L'ASCISSE DEL CENTRO C DELLA CIRCONFERENZA, E $a = R\vartheta$ L'ARCO CHE È VENUTO A CONTATTO CON L'ASSE x DURANTE IL MOVIMENTO.

LE COORDINATE (x, y) DEL PUNTO P SONO LEGATE ALLE COORDINATE (x_C, y_C) DEL CENTRO C DALLE RELAZIONI

$$\begin{cases} x = x_C - R \sin \vartheta, \\ y = y_C + R \cos \vartheta. \end{cases}$$

POICHÉ $y_C \equiv -R$, LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA CICLOIDE SONO

$$\begin{cases} x = R(\vartheta - \sin \vartheta), \\ y = R(-1 + \cos \vartheta). \end{cases} \quad (50)$$

LEGGE ORARIA DEL MOTO

LA LEGGE ORARIA DEL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE P CHE, COLLOCATO A RIPOSO IN O , SCIVOLA SENZA ATTRITO LUNGO LA CICLOIDE (50) HA LA FORMA

$$\begin{cases} x = R(\vartheta(t) - \sin \vartheta(t)), \\ y = R(-1 + \cos \vartheta(t)). \end{cases}$$

DETERMINIAMO LA FUNZIONE $\vartheta(t)$. RICORDIAMO CHE LA VELOCITÀ DI P È

$$v = \sqrt{2g|y|}$$

(V. PAG. Mc6). SOSTITUENDO $|y| = R(1 - \cos \vartheta)$ SI OTTIENE

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \vartheta)}. \quad (51)$$

D'ALTRO CANTO, DERIVANDO LE EQUAZIONI (50), TROVIAMO

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\vartheta} = R(1 - \cos \vartheta), \\ \frac{dy}{d\vartheta} = -R \sin \vartheta \end{cases} \quad (52)$$

E DI CONSEGUENZA

$$\begin{aligned} \left| \frac{dP}{d\vartheta} \right| &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\vartheta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta} \right)^2} \\ &= R\sqrt{2(1 - \cos \vartheta)}. \end{aligned}$$

POICHÉ, DERIVANDO LA FUNZIONE COMPOSTA $P(\vartheta(t))$, SI TROVA

$$\begin{aligned} v &= \left| \frac{dP}{dt} \right| \\ &= \left| \frac{dP}{d\vartheta} \right| \frac{d\vartheta}{dt}, \end{aligned}$$

PER CONFRONTO CON LA (51) SI DEDUCE CHE

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{R}},$$

E PERTANTO

$$\vartheta = \sqrt{\frac{g}{R}} t.$$

L'EQUAZIONE DI EULERO DELLA BRACHISTOCRONA

CONSIDERIAMO IL FUNZIONALE TEMPO DI TRANSITO RICAVATO A PAG. Mc7, E CIOÈ

$$F[u] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2g|u(x)|}} dx. \quad (53)$$

LA SUA EQUAZIONE DI EULERO È

$$\frac{d}{dx} \frac{|u(x)|^{-\frac{1}{2}} u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{2u(x)|u(x)|^{\frac{1}{2}}}.$$

NELLO SVOLGERE LA DERIVATA AL PRIMO MEMBRO SI TENGA PRESENTE CHE

$$\frac{d}{dx} |u(x)|^{-\frac{1}{2}} = \frac{u'(x)}{2|u(x)|^{\frac{3}{2}}}$$

PERCHÉ $|u(x)| = -u(x)$. EFFETTUALE LE SEMPLIFICAZIONI DEL CASO, L'EQUAZIONE SI RIDUCE A

$$\frac{2u''(x)}{1 + (u'(x))^2} = \frac{1}{|u(x)|}, \quad (54)$$

DA CUI SI VEDE CHE $u'' > 0$. MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI DELLA (54) PER $u'(x)$ ED INTEGRANDO, SI OTTIENE L'INTEGRALE PRIMO

$$1 + (u'(x))^2 = \frac{C}{|u(x)|} \quad (55)$$

DOVE C È UNA COSTANTE ARBITRARIA, EVIDENTEMENTE POSITIVA.

OSSERVAZIONE

LE FUNZIONI COSTANTI $u(x) = \pm C$ SODDISFANO BANALMENTE LA (55) MA NON SODDISFANO LA (54).

TALI SOLUZIONI SONO STATE INTRODOTTE MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI DELLA (54) PER $u'(x)$.

IL BOOTSTRAP

USANDO L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE IN FORMA INTEGRALE (PAG. Mc42) POSSIAMO AFFERMARE CHE SE IL FUNZIONALE F NELLA (53) HA UNA MINIMANTE u_0 NELLA CLASSE X DELLE FUNZIONI $u \in C^1((0, b)) \cap C^0([0, b])$ TALI CHE $u(0) = 0$, $u(x) < 0$ PER OGNI $x \in (0, b)$, E $u(b) = u_b \leq 0$, ALLORA LA FUNZIONE

$$\varphi(x) = \frac{|u_0(x)|^{-\frac{1}{2}} u'_0(x)}{\sqrt{1 + (u'_0(x))^2}} \quad (56)$$

APPARTIENE A SUA VOLTA ALLA CLASSE $C^1((0, b))$, E SI HA

$$\varphi'(x) = \frac{\sqrt{1 + (u'_0(x))^2}}{2u_0(x)|u_0(x)|^{\frac{1}{2}}}. \quad (57)$$

VERIFICHIAMO PER INDUZIONE CHE $u_0 \in C^\infty((0, b))$. È SUFFICIENTE VERIFICARE CHE, SE $u_0 \in C^k((0, b))$ PER QUALCHE $k \geq 1$, ALLORA $u_0 \in C^{k+1}((0, b))$.

SE $u_0 \in C^k((0, b))$, LA (57) CI DICE CHE ANCHE $\varphi \in C^k((0, b))$. SCRIVIAMO ALLORA LA (56) NELLA FORMA

$$\frac{u'_0(x)}{\sqrt{1 + (u'_0(x))^2}} = |u_0(x)|^{\frac{1}{2}} \varphi(x),$$

DA CUI RICAVIAMO

$$u'_0(x) = \frac{|u_0(x)|^{\frac{1}{2}} \varphi(x)}{\sqrt{1 - |u_0(x)| \varphi^2(x)}}$$

E DA QUI DEDUCIAMO CHE $u'_0 \in C^k((0, b))$, DUNQUE $u_0 \in C^{k+1}((0, b))$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

L'USO RICORSIVO DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER DIMOSTRARE MAGGIORE REGOLARITÀ DELLA SOLUZIONE SI DENOTA COL TERMINE ANGLOSASSONE "BOOTSTRAP" (ALLACCIAMENTO DELLO STIVALE).

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI EULERO

POSTO $\alpha = \operatorname{arctg}(u'(x)) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA DERIVATA), LA (55) DIVENTA

$$\begin{aligned} |u(x)| &= C \cos^2 \alpha \\ &= C \operatorname{sen}^2 i \end{aligned} \quad (58)$$

$$= R(1 - \cos \vartheta), \quad (59)$$

ESSENDO $i = \alpha + \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ L'ANGOLO FRA IL GRAFICO DI u E LA VERTICALE, $R = C/2$, E $\vartheta = 2i$. DALL'UGUAGLIANZA

$$i = \operatorname{arccotg}(-u'(x))$$

SEGUE CHE L'ANGOLO $i(x)$ È UNA FUNZIONE DI CLASSE $C^\infty((0, b))$. SVOLGENDO LA DERIVATA E USANDO LA (54) SI TROVA

$$\begin{aligned} \frac{di}{dx} &= \frac{u''(x)}{1 + (u'(x))^2} \\ &= \frac{1}{2|u(x)|} > 0. \end{aligned}$$

PER IL TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA, SI PUÒ DUNQUE SCRIVERE x IN FUNZIONE DI i E, VISTA LA (58), RISULTA

$$\frac{dx}{di} = 2C \operatorname{sen}^2 i.$$

PONENDO $u(0) = 0$, E USANDO LA (58), POSSIAMO SCRIVERE $i(0) = 0$ (PROLUNGAMENTO PER CONTINUITÀ). DUNQUE

$$\begin{aligned} x(i) &= \int_0^i 2C \operatorname{sen}^2 \beta \, d\beta \\ &= C \int_0^i (1 - \cos 2\beta) \, d\beta \\ &= R(\vartheta - \operatorname{sen} \vartheta). \end{aligned} \quad (60)$$

LA (59) E LA (60) CONDUCONO, INFINE, ALLE EQUAZIONI PARAMETRICHE (50) DELLA CICLOIDE.

INTERPRETAZIONE OTTICA

JOHANN BERNOULLI RISOLSE IL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA MEDIANTE UN'ANALOGIA CON IL PROBLEMA DELLA RIFRAZIONE [14, PAG. 671].

IN SINTESI, LA CICLOIDE È LA TRAIETTORIA DI UN RAGGIO DI LUCE CHE ATTRAVERSA UN MEZZO IL CUI INDICE DI RIFRAZIONE $n = 1/v$ È INVERSAMENTE PROPORZIONALE A $\sqrt{|y|}$.

PER VEDERLO, PARTIAMO DALLA LEGGE DI SNELL DELLA RIFRAZIONE

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

CHE RISCRIVIAMO NELLA FORMA

$$\frac{v_1}{\operatorname{sen} i_1} = \frac{v_2}{\operatorname{sen} i_2}.$$

QUANDO L'INDICE DI RIFRAZIONE $n = 1/v$ VARIA CON L'ORDINATA y , LA LEGGE DIVENTA

$$\frac{v}{\operatorname{sen} i} = \operatorname{COST}. \quad (61)$$

PONENDO $v = \sqrt{2g|u(x)|}$, SI CONSTATA CHE LA (61) EQUIVALE ALLA (58).

OMOTETIA

AL VARIARE DELLA COSTANTE $R \in (0, +\infty)$, LE EQUAZIONI PARAMETRICHE (50) RAPPRESENTANO UNA FAMIGLIA DI CICLOIDI γ_R .

INOLTRE LA CICLOIDE γ_R SI OTTIE-
NE DALLA CICLOIDE γ_1 , DI EQUAZIONI

$$\begin{cases} x = \vartheta - \operatorname{sen} \vartheta, \\ y = -1 + \cos \vartheta, \end{cases}$$

MEDIANTE UNA DILATAZIONE DI COEF-
FICIENTE R .

TENUTO CONTO DELLA CONVESSITÀ
DI γ_R , NE SEGUE CHE PER OGNI PUNTO
 $B = (b, u_b)$ CON $b > 0$ E $u_b \leq 0$ ESISTE
UNA ED UNA SOLA CICLOIDE γ_R PASSAN-
TE PER B .

UNICITÀ

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE u_0, u_1
SIANO DUE SOLUZIONI DISTINTE DELL'E-
QUAZIONE (54) TALI CHE $u_k(0) = 0$,
 $u_k(b) = u_b$, $u_k < 0$ IN $(0, b]$ PER $k = 0, 1$.

SE LA DIFFERENZA $w(x) = u_1(x) -$
 $u_0(x)$ È POSITIVA IN QUALCHE PUNTO DI
 $(0, b)$, ALLORA w HA UN PUNTO DI MAS-
SIMO x_0 DOVE RISULTA

$$\begin{aligned} w(x_0) &= u_1(x_0) - u_0(x_0) > 0; \\ w'(x_0) &= u_1'(x_0) - u_0'(x_0) = 0; \\ w''(x_0) &= u_1''(x_0) - u_0''(x_0) \leq 0, \end{aligned}$$

QUINDI

$$\begin{aligned} \frac{1}{-u_0(x_0)} &< \frac{1}{-u_1(x_0)} = \frac{2u_1''(x_0)}{1 + (u_1'(x_0))^2} \\ &\leq \frac{2u_0''(x_0)}{1 + (u_0'(x_0))^2} = \frac{1}{-u_0(x_0)}, \end{aligned}$$

IL CHE È ASSURDO. SIMILMENTE SI OT-
TIENE UNA CONTRADDIZIONE SE $w(x)$ È
NEGATIVA IN QUALCHE PUNTO.

CONDIZIONI SUFFICIENTI

È NOTO CHE, FISSATI $b > 0$ E $u_b < 0$,
IL FUNZIONALE (53) AMMETTE UNA E
UNA SOLA MINIMANTE u_0 NELLA CLASSE
DELLE FUNZIONI $u \in C^1((0, b]) \cap C^0([0, b])$
TALI CHE $u(x) < 0$ IN $(0, b]$, $u(0) = 0$ E
 $u(b) = u_b$.

LA MINIMANTE È LA FUNZIONE $u_0(x)$
IL CUI GRAFICO È QUELL'UNICA CICLOI-
DE DI EQUAZIONI PARAMETRICHE (50)
CHE PASSA PER IL PUNTO $B = (b, u_b)$.

CIÒ NON DISCENDE DAL SOLO FAT-
TO CHE u_0 SODDISFA L'EQUAZIONE DI
EULERO-LAGRANGE (54), MA RICHIE-
DE UN'APPOSITA MOTIVAZIONE.

SI PUÒ USARE, AD ESEMPIO, IL ME-
TODO DI WEIERSTRASS DEL CAMPO DI
ESTREMALI, COME IN [9, VOL. I, PAGG.
362–372].

IN ALTERNATIVA SI PUÒ USARE IL
METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE
VARIAZIONI, COME IN [11]. I PRESUP-
POSTI DEL METODO SONO ACCENNATI
NELLA RIMANENTE PARTE DEL CORSO.

IN QUESTA SEDE SVOLGIAMO INVE-
CE UNA DIMOSTRAZIONE BASATA SUL-
LA CONVESSITÀ DELLA LAGRANGIANA,
VALIDA NEL CASO PARTICOLARE IN CUI
 $u_0'(b) < 0$.

UN FUNZIONALE CONVESSO

FISSATI $b > 0$ E $u_b < 0$, INDICHIAMO CON $u_0(x)$ LA FUNZIONE IL CUI GRAFICO È QUELL'UNICA CICLOIDE DI EQUAZIONI PARAMETRICHE (50) PASSANTE PER IL PUNTO $B = (b, u_b)$.

SUPPONENDO CHE $u'_0(b) < 0$, OVVERO $u_b/b < -2/\pi$, VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE u_0 RISOLVE IL PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA NELLA CLASSE DELLE FUNZIONI $u \in C^1((0, b]) \cap C^0([0, b])$ TALI CHE: $u(0) = 0$, $u(b) = u_b$, E AVENTI UN'INVERSA v DI CLASSE $C^1([u_b, 0])$.

OSSERVIAMO CHE SUPPORRE $u'_0(b) < 0$ EQUIVALE A SUPPORRE $u'_0(x) < 0$ PER OGNI $x \in (0, b]$, DUNQUE LA FUNZIONE u_0 , RISTRETTA ALL'INTERVALLO $[0, b]$, HA UN'INVERSA CHE INDICHEREMO CON $x = v_0(y)$ E CHE È DI CLASSE $C^1([u_b, 0])$.

IL TEMPO DI TRANSITO LUNGO UNA CURVA γ , GRAFICO DI UNA FUNZIONE $x = v(y)$ DI CLASSE $C^1([u_b, 0])$, È DATO DA

$$\begin{aligned} T[v] &= \int_{\gamma} \frac{ds}{\sqrt{2g|y|}} \\ &= \int_{u_b}^0 \frac{\sqrt{1 + (v'(y))^2}}{\sqrt{2g|y|}} dy \end{aligned}$$

LA CUI EQUAZIONE DI EULERO AMMETTE L'INTEGRALE PRIMO

$$\frac{1 + (v'(x))^2}{(v'(x))^2} = \frac{C}{|y|}.$$

RAGIONANDO COME A PAG. Mc50 SI CONSTATA CHE v_0 SODDISFA QUESTA EQUAZIONE.

MA SICCOME LA LAGRANGIANA DEL FUNZIONALE T È STRETTAMENTE CONVESSA RISPETTO ALLA VARIABILE v' , IL METODO DESCRITTO A PAG. Mc44 MOSTRA CHE v_0 È UNA MINIMANTE (L'UNICA, PER LA PRECISIONE), COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

APPLICAZIONE AL PROBLEMA DI NEWTON

LE FUNZIONI AMMISSIBILI

SULLA BASE DEGLI ESERCIZI DELLA SERIE [101], CERCHIAMO UNA MINIMANTE DEL FUNZIONALE G NELLA CLASSE DELLE FUNZIONI $u \in C^1([0, R])$ SODDISFACENTI, PER OGNI $\rho \in [0, R]$, LA CONDIZIONE $0 \leq u(\rho) \leq h$ (COSTANTE POSITIVA, ASSEGNATA).

VERIFICHIAMO CHE IL FUNZIONALE G DEFINITO NELLA (12) NON AMMETTE MINIMO NELLA CLASSE DI CUI SOPRA, E CHE IL SUO ESTREMO INFERIORE È ZERO.

A TAL FINE È SUFFICIENTE DEFINIRE UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI u_n APPARTENENTI ALLA CLASSE SUDDETTA E TALI CHE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G[u_n] = 0. \quad (62)$$

PER OGNI $n \in \mathbb{Z}^+$, DIVIDIAMO L'INTERVALLO $[0, R]$ IN $2n$ PARTI UGUALI MEDIANTE I PUNTI $\rho_k = kR/(2n)$, $k = 0, \dots, 2n$. POSTO $\mu_n = R/(4n)$, DEFINIAMO $u_n(\rho) =$

$$\begin{cases} \frac{h}{2} \frac{(\rho - \mu_n)^2}{\mu_n^2}, & \rho \in [0, \rho_1]; \\ h - \frac{h}{2} \frac{(\rho - 3\mu_n)^2}{\mu_n^2}, & \rho \in [\rho_1, \rho_2]. \end{cases}$$

SI VERIFICA PER SOSTITUZIONE CHE $u_n(0) = h/2 = u_n(\rho_2^-)$, E CHE $u_n(\rho_1^-) = h/2 = u_n(\rho_1)$, DUNQUE L'ESTENSIONE DI u_n FATTA PER PERIODICITÀ ALL'INTERVALLO $[0, R]$ È CONTINUA. INOLTRE LA DERIVATA DI u_n È DATA DA

$$u'_n(\rho) = \begin{cases} h \frac{\rho - \mu_n}{\mu_n^2}, & \rho \in [0, \rho_1]; \\ -h \frac{\rho - 3\mu_n}{\mu_n^2}, & \rho \in (\rho_1, \rho_2), \end{cases}$$

E SI VERIFICA PER SOSTITUZIONE CHE $u'(0) = -h/\mu_n = u'_n(\rho_2^-)$ E $u'(\rho_1^-) = h/\mu_n = u'_n(\rho_1^+)$. QUINDI L'ESTENSIONE DI u_n FATTA PER PERIODICITÀ ALL'INTERVALLO $[0, R]$ È DI CLASSE $C^1([0, R])$.

INDICHIAMO ANCORA CON u_n , PER SEMPLICITÀ, LA FUNZIONE PERIODICA DI PERIODO $T = R/n$ OTTENUTA COME SOPRA, E OSSERVIAMO CHE

$$G[u_n] \leq R \int_0^R \frac{d\rho}{1 + (u'_n(\rho))^2}.$$

INOLTRE LA FUNZIONE $|u'_n(\rho)|$ È PERIODICA DI PERIODO $T/2$, QUINDI

$$\int_0^R \frac{d\rho}{1 + (u'_n(\rho))^2} = 2n \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho}{1 + (u'_n(\rho))^2}$$

E QUEST'ULTIMO INTEGRALE SI CALCOLA ELEMENTARMENTE: POSTO $a_n = \mu_n^2/h$, SI TROVA CHE ESSO VALE

$$a_n \left[\arctg \frac{\rho - \mu_n}{a_n} \right]_0^{\rho_1} = 2a_n \arctg \frac{\mu_n}{a_n} < \pi a_n.$$

IN DEFINITIVA SI OTTIENE

$$G[u_n] < 2nR\pi a_n = 2nR\pi \frac{\mu_n^2}{h} = \frac{R^3\pi}{8hn} \rightarrow 0$$

E LA (62) SEGUE. QUESTO FATTO SI AGGIUNGE ALLE CONSIDERAZIONI DI TIPO FISICO CHE PORTANO A RESTRINGERE ULTERIORMENTE LA CLASSE DELLE FUNZIONI AMMISSIBILI.

NEL PROSSIMO PARAGRAFO CONSIDERIAMO IL FUNZIONALE G NELLA CLASSE DELLE FUNZIONI $u \in C^1([0, R])$ TALI CHE $0 \leq u(\rho) \leq h$ E $u'(\rho) \geq 0$ IN $[0, R]$.

VALORI AGLI ESTREMI

CONSIDERIAMO IL FUNZIONALE G DATO DALLA (12) NELLA CLASSE DELLE FUNZIONI $u \in C^1([0, R])$ TALI CHE $0 \leq u(\rho) \leq h$ E $u'(\rho) \geq 0$ IN $[0, R]$.

LE UNICHE FUNZIONI DELLA SUDDETTA CLASSE TALI CHE $u(R) = u(0)$ SONO LE COSTANTI, LE QUALI REALIZZANO IL MASSIMO DI G E NON IL MINIMO, QUINDI POSSIAMO SENZ'ALTRO SCARTARLE.

INVECE, PER OGNI FUNZIONE u DI TALE CLASSE CHE SODDISFA $0 < u(R) - u(0) < h$, POSSIAMO CONSIDERARE LA FUNZIONE

$$\tilde{u}(\rho) = h \frac{u(\rho) - u(0)}{u(R) - u(0)},$$

CHE STA NELLA STESSA CLASSE E SODDISFA $\tilde{u}(0) = 0$, $\tilde{u}(R) = h$. INOLTRE

$$\tilde{u}'(\rho) = \frac{h}{u(R) - u(0)} u'(\rho) > u'(\rho),$$

E QUINDI $G[\tilde{u}] < G[u]$. PERCIÒ, NELLA RICERCA DEL MINIMO, NON È RESTRITTIVO LIMITARSI ALLA CLASSE DELLE FUNZIONI $u \in C^1([0, R])$ TALI CHE $u(0) = 0$, $u(R) = h$, E $u'(\rho) \geq 0$ IN $[0, R]$.

SI NOTI CHE, PER MONOTONIA, LE FUNZIONI DI QUESTA CLASSE SODDISFANO ANCHE LA LIMITAZIONE $0 \leq u(\rho) \leq h$ IN $[0, R]$.

EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

CERCHIAMO UNA MINIMANTE DEL FUNZIONALE G NELLA CLASSE DELLE FUNZIONI $u \in C^1([0, R])$ TALI CHE: $u' \geq 0$ IN $[0, R]$, $u(0) = 0$ E $u(R) = h$ (COSTANTE POSITIVA, ASSEGNATA).

PER OGNI FUNZIONE u IN TALE CLASSE ESISTE ALMENO UN PUNTO $\xi \in (0, R)$ TALE CHE, PER IL TEOREMA DI LAGRANGE, $u'(\xi) = h/R > 0$.

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO, IL PUNTO ξ HA UN INTORNO IN CUI u' È POSITIVA: INDICHIAMO CON $(a, b) \subset [0, R]$ IL PIÙ GRANDE INTERVALLO APERTO CONTENENTE ξ E NEL QUALE $u' > 0$.

SE u È UNA MINIMANTE DEL FUNZIONALE G NELLA (12), ALLORA, PER IL LEMMA DI DU BOIS-REYMOND, DEVE SODDISFARE NELL'INTERVALLO (a, b) L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

$$\frac{d}{d\rho} \frac{\rho u'(\rho)}{(1 + (u'(\rho))^2)^2} = 0,$$

LA QUALE IMPLICA

$$\frac{\rho u'(\rho)}{(1 + (u'(\rho))^2)^2} = C \text{ (COST.)}. \quad (63)$$

ESSENDO $u'(\rho) > 0$ IN (a, b) , DEVE AVERSI $C > 0$: CIÒ ESCLUDE CHE IL PRIMO ESTREMO a POSSA ESSERE NULLO, PERCHÉ, SE COSÌ FOSSE, IL PRIMO MEMBRO DELLA (63) TENDEREBBE A ZERO PER $\rho \rightarrow a^+$.

D'ALTRO CANTO, NEL CASO $a > 0$, SI HA $u'(a) = 0$ PERCHÉ, SE FOSSE $u'(a) > 0$, SI AVREBBE ANCHE $u' > 0$ IN UN INTORNO $(a - \delta, a)$ E DI CONSEGUENZA $u' > 0$ IN $(a - \delta, b)$ CONTRO LA DEFINIZIONE DELL'INTERVALLO (a, b) .

MA ALLORA IL PRIMO MEMBRO DELLA (63) TENDE ANCORA A ZERO PER $\rho \rightarrow a^+$, E L'UGUAGLIANZA NON PUÒ SUSTENERE: DUNQUE G NON HA MINIMO NELLA CLASSE CONSIDERATA.

ESISTENZA DELLA SOLUZIONE

STANDO A [4, PAG. 9] LA PRIMA DIMOSTRAZIONE RIGOROSA DELL'ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI NEWTON FU DATA DA KNESER [15] NEL 1902: IL METODO È QUELLO DEL CAMPO DI ESTREMALI.

ALTRE DIMOSTRAZIONI DI ESISTENZA, BASATE SUL METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI, SI TROVANO IN [17, COROLLARIO 5.10] ED IN [11, TEOREMA 1.3].

IN PARTICOLARE SI PUÒ DIMOSTRARE CHE IL FUNZIONALE G DELLA (12) AMMETTE MINIMO NELLA CLASSE DELLE FUNZIONI $u \in C^0([0, R])$ AVENTI LA DERIVATA u' CONTINUA A TRATTI, NON DECRESCENTI, E TALI CHE $u(0) = 0$ E $u(R) = h$ (COSTANTE POSITIVA, ASSEGNATA).

INOLTRE, INDICATA CON u_0 UNA QUALUNQUE MINIMANTE NELLA SUDDETTA CLASSE, SI TROVA CHE u_0 È CONVESSA ED ESISTE $\rho_0 \in (0, R)$ TALE CHE $u_0 = 0$ IN $[0, \rho_0]$ E $u_0 > 0$ IN $(\rho_0, R]$. INOLTRE $u_0 \in C^1([\rho_0, R])$.

CONDIZIONE DI TRASVERSALITÀ

È CHIARO CHE $u'_0(\rho_0^-) = 0$. IN QUESTA SEDE VOGLIAMO VERIFICARE CHE $u'_0(\rho_0^+) = 1$: UN RISULTATO STABILITO IN [2].

CONSIDEREREMO IL PUNTO ρ_0 , CHE SEPARA L'INTERVALLO DOVE $u_0 = 0$ DALL'INTERVALLO DOVE u_0 È POSITIVA, COME UN'INCOGNITA DI UN PROBLEMA DI MINIMO.

IN ALTRI TERMINI, FORTI DEL RISULTATO DI ESISTENZA SOPRA CITATO, CERCHEREMO IL MINIMO DEL FUNZIONALE

$$G_0[u] = \frac{\rho_0^2}{2} + \int_{\rho_0}^R \frac{\rho d\rho}{1 + (u'(\rho))^2}. \quad (64)$$

L'UGUAGLIANZA $u'_0(\rho_0^+) = 1$, CHE ANDIAMO A DIMOSTRARE, È UNA CONDIZIONE DETTA “DI TRASVERSALITÀ” E TRATTATA IN GENERALE IN [1, PAGINA 555].

CAMBIAMENTO DI VARIABILE

NELL'INTERVALLO (ρ_0, R) SI DIMOSTRA, COME DI CONSUETO, CHE LA MINIMANTE u_0 SODDISFA L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE (63), E PERCIÒ $u'_0 > 0$.

DUNQUE, FACENDO VARIARE $\rho_0 \in (0, R)$, CERCHIAMO IL MINIMO DEL FUNZIONALE G_0 NELLA CLASSE DELLE FUNZIONI u NULLE IN $[0, \rho_0]$, POSITIVE IN $(\rho_0, R]$, AVENTI LA DERIVATA CONTINUA E CRESCENTE IN $[\rho_0, R]$, E SODDISFACENTI $u(R) = h$.

OGNI u IN TALE CLASSE È INVERTIBILE NELL'INTERVALLO $[\rho_0, R]$ E POSSIAMO INDICARE CON $v: [0, h] \rightarrow [\rho_0, R]$ LA SUA FUNZIONE INVERSA.

PER IL TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA, v È DERIVABILE E SI HA $v' = 1/u'$, INOLTRE v È CONCAVA, E v' È POSITIVA IN $[0, h)$ E DECRESCENTE. MA ALLORA, CON IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE $y = u(\rho)$, SI TROVA CHE $G_0[u] = F[v]$, ESSENDO

$$F[v] = \frac{v^2(0)}{2} + \int_0^h \frac{v(y) (v'(y))^3}{1 + (v'(y))^2} dy.$$

GENERALIZZAZIONE DEL METODO CLASSICO

OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE, COME SAPPIAMO, UNA MINIMANTE v_0 DEL FUNZIONALE F NELLA CLASSE DELLE FUNZIONI $v \in C^1([0, h])$ SODDISFACENTI $v' > 0$ IN $[0, h)$ E $v(h) = R$ DEVE SODDISFARE L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE:

$$\frac{d}{dy} f_p(v_0(y), v'_0(y)) = f_v(v_0(y), v'_0(y))$$

DOVE $f(v, p) = vp^3/(1 + p^2)$.

ADESSO PERÒ GENERALIZZIAMO IL METODO SEGUITO A PAGINA Mc41: QUI UTILizzerEMO UNA $\eta \in C^1([0, h])$ CHE SI ANNULLA IN UN INTORNO DEL SECONDO ESTREMO h MA È POSITIVA PER $y = 0$.

NEL PRESENTE CASO PONIAMO $v_t(y) = v_0(y) + t\eta(y)$, QUINDI $\varphi(t) = F[v_t] = \frac{(v_0(0) + t\eta(0))^2}{2} + \int_0^h f(v_t(y), v'_t(y)) dy$

E CALCOLIAMO LA DERIVATA $\varphi'(0)$. DOPO AVER INTEGRATO PER PARTI, COME DI CONSUETO, TROVIAMO $0 = \varphi'(0) =$

$$v_0(0)\eta(0) + \left[f_p(v_0(y), v'_0(y))\eta(y) \right]_0^h + \int_0^h \left(\frac{d}{dy} f_p - f_v \right) \eta(y) dy$$

DOVE L'ARGOMENTO DI f_p E DI f_v È STATO OMESSO, PER BREVIÀ, SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE.

L'INTEGRALE È NULLO PERCHÉ LA FUNZIONE INTEGRANDA È NULLA. INVECE, QUESTA VOLTA, IL TERMINE DI BORDO NON È NULLO: SI OTTIENE, INFATTI

$$\left(v_0(0) - f_p(v_0(0), v'_0(0)) \right) \eta(0) = 0.$$

POICHÉ POSSIAMO PRENDERE $\eta(0) > 0$, SE NE DEDUCE CHE $v(0) = f_p(v_0(0), v'_0(0))$. MA SICCOME

$$f_p(v, p) = vp^2 \frac{3 + p^2}{(1 + p^2)^2},$$

SEMPLIFICANDO IL FATTORE $v(0)$ GIUNGIAMO ALL'EQUAZIONE

$$p_0^2 \frac{3 + p_0^2}{(1 + p_0^2)^2} = 1,$$

DOVE SI È POSTO, PER BREVIÀ, $p_0 = v'_0(0)$. LA SUDDETTA EQUAZIONE SI PUÒ RISCRIVERE

$$3p_0^2 + p_0^4 = (1 + p_0^2)^2,$$

LA QUALE SI RIDUCE A $p_0^2 = 1$. RICORDANDO CHE $p_0 = v'_0(0) > 0$, SI TROVA INFINE $v'_0(0) = 1$ E QUINDI $u'(\rho_0^+) = 1$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

REGOLARITÀ DELLA SOLUZIONE

L'INFORMAZIONE CHE $u'_0(\rho_0^+) = 1$, UNITA ALLA CONVESSITÀ DI u_0 , IMPLICA CHE $u'_0 \geq 1$ IN $[\rho_0, R]$.

CIÒ PERMETTE DI SFRUTTARE MEGLIO L'EQUAZIONE (63): VEDIAMO COME.

LA FUNZIONE $q(p) = p/(1 + p^2)^2$ SODDISFA $q'(p) < 0$ PER $p \in (1/\sqrt{3}, +\infty)$ E QUINDI, SU TALE INTERVALLO, HA UNA INVERSA CHE INDICHEREMO CON $p(q)$ E CHE SODDISFA $p'(q) < 0$.

SAPENDO CHE $u'(\rho) \geq 1 > 1/\sqrt{3}$, DALLA (63) POSSIAMO RICAVARE $u'_0(\rho) = p(C/\rho)$ IN $[\rho_0, R]$, E QUINDI u''_0 ESISTE IN $[\rho_0, R]$ ED È DATA DA

$$u''_0(\rho) = -C \frac{p'(C/\rho)}{\rho^2} > 0.$$

ESPRESSIONE DELLA SOLUZIONE

UTILIZZANDO LE INFORMAZIONI SIN QUI RACCOLTE, POSSIAMO RAPPRESENTARE IN FORMA PARAMETRICA IL GRAFICO DELLA SOLUZIONE $u_0(\rho)$ DEL PROBLEMA DI NEWTON.

SAPPIAMO CHE u_0 È NULLA IN UN CERTO INTERVALLO $[0, \rho_0]$, E SODDISFA $u_0'(\rho_0^+) = 1$ E $u_0'' > 0$ IN $[\rho_0, R]$.

INDICHIAMO ORA CON $p(\rho)$ LA FUNZIONE $p(\rho) = u_0'(\rho)$. PER QUANTO APPENA VISTO, $p(\rho)$ È DERIVABILE CON CONTINUITÀ IN $[\rho_0, R]$ ED HA DERIVATA POSITIVA, DUNQUE AMMETTE UN'INVERSA $\rho(p)$ DEFINITA PER $p \in [1, u_0'(R)]$.

L'ESPRESSIONE DI $\rho(p)$ SI RICA VA IMMEDIATAMENTE DALLA (63), ED È

$$\rho(p) = C \frac{(1+p^2)^2}{p}$$

DA CUI SEGUE

$$\rho'(p) = C \frac{(1+p^2)(3p^2-1)}{p^2}.$$

PER RICA VARE $u_0(\rho(p))$, PARTIAMO DA

$$\frac{d}{dp} u_0(\rho(p)) = u_0'(\rho(p)) \rho'(p).$$

PER LA DEFINIZIONE DI $\rho(p)$, SI HA $u_0'(\rho(p)) = p$. USANDO L'ESPRESSIONE DI $\rho'(p)$ APPENA TROVATA, SI GIUNGE A

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} u_0(\rho(p)) &= C \frac{(1+p^2)(3p^2-1)}{p} \\ &= C \left(3p^3 + 2p - \frac{1}{p} \right). \end{aligned}$$

INTEGRANDO QUEST'ULTIMA A PARTIRE DA $p = 1$, E SAPENDO CHE $u_0(\rho(1)) = 0$, SI OTTIENE INFINE

$$u_0(\rho(p)) = C \left(\frac{3}{4} p^4 + p^2 - \frac{7}{4} - \log p \right).$$

DUNQUE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $u_0(\rho)$ SI PUÒ RAPPRESENTARE IN FORMA PARAMETRICA NEL PIANO ρy MEDIANTE

$$\begin{cases} \rho = C \frac{(1+p^2)^2}{p}, \\ y = C \left(\frac{3}{4} p^4 + p^2 - \frac{7}{4} - \log p \right). \end{cases}$$

UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

LE CURVE RAPPRESENTATE IN FORMA PARAMETRICA COME SOPRA DIPENDONO DAL PARAMETRO C E SONO OMO-TETICHE (SONO SIMILI) L'UNA ALL'ALTRA.

SAPPIAMO INOLTRE CHE SONO STRETTAMENTE CONVESSE. QUINDI ESISTE UNO ED UN SOLO VALORE DELLA COSTANTE C TALE CHE LA CORRISPONDENTE CURVA PASSA PER IL PUNTO ASSEGNATO DI COORDINATE (R, h) .

PERTANTO LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI NEWTON È UNICA, ED È QUELLA CHE SI OTTIENE COME SOPRA.

APPLICAZIONE ALLA CATENARIA

L'EQUAZIONE DI EULERO DELLA CATENARIA

APPLICHIAMO IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE AL PROBLEMA DI MINIMIZZARE IL FUNZIONALE

$$F[u] = \int_{-r_0}^{r_0} \sqrt{1 + (u'(x))^2} u(x) dx$$

NELLA CLASSE X_L DELLE FUNZIONI $u \in C^1([-r_0, r_0])$ TALI CHE $u(-r_0) = u(r_0) = 0$ E SODDISFACENTI LA CONDIZIONE

$$\int_{-r_0}^{r_0} \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx = L \quad (65)$$

CON $r_0 > 0$ E $L > 2r_0$ ASSEGNATI. IL METODO SI PUÒ APPLICARE A PATTO CHE LE MINIMANTI CERCATE NON SIANO ALLO STESSO TEMPO ESTREMALI DEL FUNZIONALE NELLA (65).

POICHÉ L'EQUAZIONE DI EULERO DI QUEL FUNZIONALE È $u'' = 0$, L'UNICA ESTREMALE SODDISFACENTE $u(-r_0) = u(r_0) = 0$ È LA COSTANTE NULLA.

A SUA VOLTA IL GRAFICO DELLA COSTANTE NULLA È UN SEGMENTO DI LUNGHEZZA $2r_0$, E PERCIÒ LA (65) NON È SODDISFATTA.

POSSIAMO QUINDI AFFERMARE CHE LE EVENTUALI MINIMANTI $u_0 \in C^2([-r_0, r_0])$ DEVONO SODDISFARE L'EQUAZIONE DI EULERO (49), CON

$$\mathcal{L}(u, u') = (u - \lambda) \sqrt{1 + (u')^2}.$$

EFFETTUATE LE SEMPLIFICAZIONI DEL CASO, L'EQUAZIONE DI EULERO DIVENTA

$$(u(x) - \lambda) u''(x) = 1 + (u'(x))^2. \quad (66)$$

CONVESSITÀ

COMINCIAMO CON L'OSSERVARE CHE, ESSENDO IL SECONDO MEMBRO DELLA (66) POSITIVO, LE FUNZIONI $u(x) - \lambda$ E $u''(x)$ NON SI ANNULLANO, E PER CONTINUITÀ MANTENGONO LO STESSO SEGNO PER OGNI $x \in [-r_0, r_0]$.

OSSERVIAMO POI CHE UNA FUNZIONE $u_0 \in X_L$ TALE CHE $u_0'' < 0$ NON PUÒ MINIMIZZARE IL FUNZIONALE F PERCHÉ, POSTO $u(x) = -u_0(x)$ (RIFLESSIONE RISPETTO ALL'ASSE x), LA (65) VALE ANCORA, E RISULTA $F[u] < F[u_0]$.

PROSEGUIAMO QUINDI CONSIDERANDO $u(x) - \lambda, u''(x) > 0$ PER $x \in [-r_0, r_0]$.

SIMMETRIA

PER IL TEOREMA DI ROLLE ESISTE UN PUNTO $x_0 \in (-r_0, r_0)$ TALE CHE $u'(x_0) = 0$. ALLORA LA FUNZIONE $u_0(x)$ SI PUÒ VEDERE COME L'UNICA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} u'' = \frac{1+(u')^2}{u-\lambda}, \\ u(x_0) = u_0(x_0), \\ u'(x_0) = 0. \end{cases} \quad (67)$$

PER SOSTITUZIONE SI VEDE CHE ANCHE LA FUNZIONE $u(x) = u_0(2x_0 - x)$, SIMMETRICA DI u_0 RISPETTO ALLA RETTA $x = x_0$, RISOLVE IL PROBLEMA (67).

PER L'UNICITÀ, DEVE RISULTARE $u_0(2x_0 - x) = u_0(x)$, DUNQUE u_0 È SIMMETRICA RISPETTO ALLA RETTA $x = x_0$.

ESSENDO $u_0'(x_0) = 0$, E RICORDANDO CHE $u_0'' > 0$ IN $[-r_0, r_0]$, SI DEDUCE CHE $u_0(x)$ È DECRESCENTE PER $x < x_0$, CRESCENTE PER $x > x_0$. E SICCOME $u(-r_0) = u(r_0)$, NE SEGUE CHE $x_0 = 0$.

INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

SCRITTA L'EQUAZIONE (66) NELLA FORMA

$$\frac{u'(x) u''(x)}{1 + (u'(x))^2} = \frac{u'(x)}{u(x) - \lambda},$$

INTEGRANDO AMBO I MEMBRI GIUNGIAMO ALL'INTEGRALE PRIMO

$$\sqrt{1 + (u'(x))^2} = C(u(x) - \lambda),$$

CON C COSTANTE POSITIVA. TENENDO CONTO CHE $u'(x)$ HA IL SEGNO DI x , E SI ANNULLA SE E SOLO SE $x = 0$, POSSIAMO RICAVARE

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{C^2(u(x) - \lambda)^2 - 1}} = \operatorname{sgn}(x), \quad x \neq 0.$$

POSTO

$$\begin{aligned} t(x) &= \operatorname{set} t \cosh(C(u(x) - \lambda)) \\ &= \operatorname{set} t \cosh(\sqrt{1 + (u'(x))^2}), \end{aligned}$$

L'EQUAZIONE SI PUÒ RISCRIVERE COME

$$t'(x) = C \operatorname{sgn}(x), \quad x \neq 0,$$

CHE SI INTEGRA IMMEDIATAMENTE, TENENDO CONTO DEL FATTO CHE

$$\begin{aligned} t(0) &= \operatorname{set} t \cosh(\sqrt{1 + (u'(0))^2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

COSÌ FACENDO SI TROVA $t(x) = C|x|$, E SICCOME $C(u(x) - \lambda) = \cosh t(x)$, SI CONCLUDE CHE

$$u(x) = \frac{1}{C} \cosh(Cx) + \lambda,$$

DUNQUE LA CATENA SOSPESA PER GLI ESTREMI ASSUME LA FORMA DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE COSENO IPERBOLICO, A PARTE LE COSTANTI C E λ CHE SI RICAVANO DA L ED r_0 CON I METODI DELL'ANALISI NUMERICA.

APPLICAZIONE AL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

FISSATA UNA COSTANTE $L \in (2, \pi)$ DIMOSTRIAMO, USANDO IL METODO DESCRITTO IN [24], CHE ESISTE UNA FUNZIONE $u_0 \in C^1([-1, 1])$ CHE RENDE MASSIMO L'INTEGRALE

$$F[u] = \int_{-1}^1 u(x) dx$$

NELLA CLASSE X_L DI TUTTE LE FUNZIONI $u \in C^1([-1, 1])$ TALI CHE $u(-1) = u(1) = 0$ E SODDISFACENTI $J[u] = L$, DOVE

$$J[u] = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx.$$

UN PROBLEMA AUSILIARIO

INDICATA CON $R > 2$ LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $2R \arcsen \frac{1}{R} = L$, CHE SI PUÒ EVENTUALMENTE STIMARE CON I METODI DELL'ANALISI NUMERICA, CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$$u_0(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - 1}$$

QUESTA VOLTA COME ELEMENTO DELLA CLASSE X DI TUTTE LE $u \in C^1([-1, 1])$ TALI CHE $u(-1) = u(1) = 0$.

LA SUDDETTA FUNZIONE u_0 È UN'ESTREMALE DEL FUNZIONALE $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ DATO DA

$$\begin{aligned} I[u] &= \int_{-1}^1 \mathcal{L}(u(x), u'(x)) dx \\ &= \int_{-1}^1 (u(x) - R \sqrt{1 + (u'(x))^2}) dx. \end{aligned}$$

POICHÉ LA LAGRANGIANA $\mathcal{L}(u, u') = u - R \sqrt{1 + (u')^2}$ È CONCAVA RISPETTO ALLA COPPIA (u, u') , L'ESTREMALE u_0 È ANCHE UNA MASSIMANTE DI $I[u]$ NELLA CLASSE X (V. PAG. Mc44).

CONCLUSIONE

STANTE L'UGUAGLIANZA $I[u] = F[u] - RJ[u]$, E POICHÉ $J[u_0] = L$, IL RISULTATO APPENA STABILITO SI PUÒ ESPRIMERE SCRIVENDO CHE

$$\begin{aligned} F[u] - RJ[u] &\leq F[u_0] - RJ[u_0] \\ &= F[u_0] - RL \quad (68) \end{aligned}$$

PER OGNI $u \in X$. SICCOME $X_L \subset X$, LA (68) VALE A MAGGIOR RAGIONE PER OGNI $u \in X_L$, NEL QUAL CASO, ESSENDO $J[u] = L$, LA (68) SI RIDUCE A

$$F[u] \leq F[u_0].$$

DUNQUE u_0 MASSIMIZZA IL FUNZIONALE F NELLA CLASSE X_L , COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

APPLICAZIONE AL PROBL. DELLE GEODETICHE

IL SEMIPIANO IPERBOLICO

CONSIDERIAMO IL SEMIPIANO $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ CON LA METRICA DATA DA

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

INDICHIAMO CON $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ UNA CURVA REGOLARE DI EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

PER $t \in [a, b]$. LA SUA LUNGHEZZA NELLA METRICA IPERBOLICA È ESPRESSA DA

$$L[\gamma] = \int_a^b \frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{y(t)} dt.$$

LA LUNGHEZZA, COME SAPPIAMO, NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE: INFATTI SE PONIAMO $\tau = \tau(t)$ CON $\tau'(t)$ CONTINUA E POSITIVA, POSSIAMO RICAVARE $t = t(\tau)$ E RAPPRESENTARE LA MEDESIMA CURVA TRAMITE

$$\begin{cases} x = x(t(\tau)) \\ y = y(t(\tau)) \end{cases}$$

PER $\tau \in [\tau(a), \tau(b)]$. ORA, ESSENDO $dt = t'(\tau) d\tau$, PER SOSTITUZIONE SI COSTATA CHE

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \frac{d\tau}{y(t(\tau))} \sqrt{\left(\frac{d}{d\tau} x(t(\tau))\right)^2 + \left(\frac{d}{d\tau} y(t(\tau))\right)^2},$$

DUNQUE IL VALORE DI $L[\gamma]$ È INDIPENDENTE DALLA PARAMETRIZZAZIONE.

SCELTA DEL PARAMETRO

SUPPONIAMO CHE UNA CURVA REGOLARE $\gamma_0 \subset \mathbb{H}^2$, AVENTE PER ESTREMI DUE PUNTI DISTINTI $A = (x_A, y_A)$ E $B = (x_B, y_B)$, MINIMIZZI $L[\gamma]$ FRA TUTTE LE CURVE REGOLARI $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ AVENTI GLI STESSI ESTREMI.

A PARTIRE DA UNA RAPPRESENTAZIONE DI γ_0 MEDIANTE UN QUALUNQUE PARAMETRO $t \in [a, b]$, POSSIAMO DEFINIRE L'ASCISSA CURVILINEA EUCLIDEA τ PONENDO

$$\tau(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(\lambda))^2 + (y'(\lambda))^2} d\lambda.$$

UTILIZZANDO IL PARTICOLARE PARAMETRO τ , LA CURVA γ_0 SARÀ DATA DA

$$\begin{cases} x = x_0(\tau) \\ y = y_0(\tau) \end{cases}$$

PER $\tau \in [0, L_E]$ ESSENDO L_E LA LUNGHEZZA EUCLIDEA DI γ_0 . LA LUNGHEZZA IPERBOLICA DI γ_0 È INVECE DATA DA

$$L[\gamma_0] = \int_0^{L_E} \frac{d\tau}{y_0(\tau)}.$$

IN GENERALE, QUALUNQUE CURVA REGOLARE $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ AVENTE PER ESTREMI I PUNTI A E B SI PUÒ PARAMETRIZZARE CON UN PARAMETRO $\tau \in [0, L_E]$ CON LO STESSO L_E DI CUI SOPRA, E SI HA CHE

$$L[\gamma] = \int_0^{L_E} \frac{\sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}}{y(\tau)} d\tau.$$

QUINDI L'IPOTESI FATTA ALL'INIZIO SI PUÒ ESPRIMERE DICENDO CHE γ_0 MINIMIZZA QUESTO FUNZIONALE INTEGRALE.

EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE

LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE DEL FUNZIONALE ANZIDETTO SONO

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \frac{x'_0(\tau)}{y_0(\tau)} = 0, \\ \frac{d}{d\tau} \frac{y'_0(\tau)}{y_0(\tau)} = \frac{-1}{y_0^2(\tau)}. \end{cases}$$

LA SEMPLICITÀ DI QUESTO SISTEMA, DOVUTA AL FATTO CHE

$$(x'_0(\tau))^2 + (y'_0(\tau))^2 = 1, \quad (69)$$

MOTIVA LA SCELTA DI τ PER PARAMETRIZZARE LA CURVA γ_0 .

GEODETICHE DEL SEMIPIANO IPERBOLICO (Cfr. [10, pag. 191])

RISOLVIAMO LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE. LA PRIMA DELLE DUE IMPLICA

$$\frac{x'_0(\tau)}{y_0(\tau)} = C \quad (70)$$

CON C COSTANTE REALE. PERCIÒ DISTINGUIAMO DUE CASI.

IL CASO $C = 0$

IN QUESTO CASO RISULTA $x'_0(\tau) = 0$, DUNQUE $x_0(\tau) = x_A = x_B$ PER OGNI τ . INOLTRE DALLA (69) RICAVIAMO $y'_0(\tau) = \pm 1$, INTEGRANDO LA QUALE TROVIAMO LA SOLUZIONE $y_0(\tau) = y_A + \tau$ SE $y_A < y_B$, E $y_0(\tau) = y_A - \tau$ SE $y_A > y_B$.

IL CASO $C \neq 0$

IN QUESTO CASO TROVIAMO $x'_0(\tau) \neq 0$ PER OGNI τ . SENZA LEDERE LA GENERALITÀ POSSIAMO SUPPORRE $x'_0(\tau) > 0$, PERCHÉ SE FOSSE $x'_0(\tau) < 0$ POTREMMO PRENDERE COME PARAMETRO $t = L_E - \tau$ ED AVERE $dx_0/dt > 0$.

INDICHIAMO ALLORA CON $\alpha(\tau)$ L'ANGOLO TRA IL VETTORE VELOCITÀ DI γ_0 E L'ASSE x :

$$\alpha(\tau) = \operatorname{arctg} \left(\frac{y'_0(\tau)}{x'_0(\tau)} \right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

FARÀ COMODO ANCHE L'ANGOLO $\theta(\tau) = \alpha(\tau) + \pi/2 \in (0, \pi)$ FRA LA NORMALE SUPERIORE E L'ASSE x . PONIAMO INOLTRE $R = 1/C > 0$.

ESSENDO $x'_0(\tau) = \cos \alpha(\tau)$, LA (70) PORGE $y_0(\tau) = R \cos \alpha(\tau)$. D'ALTRO CANTO, POSTO

$$\varphi(\tau) = \frac{\operatorname{sen} \alpha(\tau)}{y_0(\tau)},$$

LA SECONDA EQUAZIONE SI PUÒ SCRIVERE $\varphi'(\tau) = -1/y_0^2(\tau)$, E DERIVANDO $\alpha(\tau) = \operatorname{arcsen}(y_0(\tau) \varphi(\tau))$ SI TROVA

$$\begin{aligned} \alpha'(\tau) &= -\frac{\cos \alpha(\tau)}{y_0(\tau)} = -\frac{x'_0(\tau)}{y_0(\tau)} \\ &= -\frac{1}{R} < 0. \end{aligned}$$

PERCIÒ È LEGITTIMO PRENDERE COME VARIABILE INDIPENDENTE α AL POSTO DI τ E SCRIVERE SEMPLICEMENTE $y_0 = R \cos \alpha$, OVVERO

$$y_0 = R \operatorname{sen} \theta.$$

ADESSO, PER LA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA, POSSIAMO SCRIVERE

$$x'_0(\tau) = -\frac{1}{R} \frac{dx_0}{d\alpha}.$$

RICORDANDO CHE $x'_0(\tau) = \cos \alpha$, GIUNGIAMO ALL'EQUAZIONE

$$\frac{dx_0}{d\alpha} = -R \cos \alpha.$$

DA QUEST'ULTIMA RICAVIAMO $x_0 = x_C - R \operatorname{sen} \alpha$, CON x_C COSTANTE DI INTEGRAZIONE. QUINDI OTTENIAMO INFINE

$$x_0 = x_C + R \cos \theta.$$

CURVE DI MINIMA LUNGHEZZA

VERIFICHIAMO CHE LE CURVE OTTENUTE NEL PARAGRAFO PRECEDENTE HANNO LA MINIMA LUNGHEZZA FRA TUTTE QUELLE AVENTI GLI STESSI ESTREMI.

CONSIDERIAMO DUE PUNTI DISTINTI $A = (x_A, y_A)$ E $B = (x_B, y_B)$ NEL SEMIPIANO IPERBOLICO $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, E DISTINGUIAMO DUE CASI.

IL CASO $x_A = x_B$

SE $x_A = x_B$, ESISTE UN UNICO SEGMENTO VERTICALE AVENTE PER ESTREMI A E B . POICHÉ LA METRICA IPERBOLICA È INVARIANTE PER TRASLAZIONI ORIZZONTALI, SENZA LEDERE LA GENERALITÀ POSSIAMO SUPPORRE CHE $x_A = x_B = 0$.

PER FISSARE LE IDEE, SUPPONIAMO CHE $y_A < y_B$ E INDICHIAMO CON γ_0 IL SEGMENTO PARAMETRIZZATO DA

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = y_A + \tau, \end{cases} \quad \tau \in [0, L_E],$$

DOVE $L_E = y_B - y_A$. INDICATA CON $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ UNA QUALUNQUE CURVA REGOLARE AVENTE PER ESTREMI I PUNTI A E B , POSSIAMO PARAMETRIZZARLA MEDIANTE DUE FUNZIONI

$$\begin{cases} x = x(\tau); \\ y = y(\tau), \end{cases} \quad \tau \in [0, L_E],$$

DOVE L_E È LO STESSO DI PRIMA. LA LUNGHEZZA IPERBOLICA DI γ È ALLORA

$$\begin{aligned} L[\gamma] &= \int_0^{L_E} \frac{\sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}}{y(\tau)} d\tau \\ &\geq \int_0^{L_E} \frac{|y'(\tau)|}{y(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

EFFETTUANDO IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE $y = y(\tau)$, DOVE $y(\tau)$ È LA STESSA FUNZIONE CHE COMPARE NELLA PARAMETRIZZAZIONE DI γ , SI CONCLUDE CHE

$$L[\gamma] \geq \int_0^{L_E} \frac{y'(\tau)}{y(\tau)} d\tau = \int_{y_A}^{y_B} \frac{dy}{y} = L[\gamma_0].$$

IL CASO $x_A \neq x_B$

SE $x_A \neq x_B$, ESISTE UN'UNICA CIRCONFERENZA CENTRATA SULL'ASSE x E PASSANTE PER A E B : L'ASCISSA x_C DEL SUO CENTRO SI RICAVA DALL'EQUAZIONE

$$(x_A - x_C)^2 + y_A^2 = (x_B - x_C)^2 + y_B^2.$$

POICHÉ LA METRICA IPERBOLICA È INVARIANTE PER TRASLAZIONI ORIZZONTALI, SENZA LEDERE LA GENERALITÀ POSSIAMO SUPPORRE CHE $x_C = 0$.

PER FISSARE LE IDEE, SUPPONIAMO CHE $x_A > x_B$ E INDICHIAMO CON γ_0 L'ARCO PARAMETRIZZATO DA

$$\begin{cases} x = R \cos \theta; \\ y = R \sin \theta, \end{cases} \quad \theta \in [\theta_A, \theta_B]$$

DOVE (R, θ_A) E (R, θ_B) SONO LE COORDINATE POLARI DI A E B . ESSENDO $dx/d\theta = -R \sin \theta$ E $dy/d\theta = R \cos \theta$, SI TROVA CHE LA LUNGHEZZA IPERBOLICA DI γ_0 NON DIPENDE DA R ED È DATA DA

$$L[\gamma_0] = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{d\theta}{\sin \theta}.$$

INDICATA ORA CON $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ UNA QUALUNQUE CURVA REGOLARE AVENTE PER ESTREMI I PUNTI A E B , POSSIAMO PARAMETRIZZARLA MEDIANTE

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\theta_A, \theta_B].$$

PASSANDO ALLE COORDINATE POLARI
 (ρ, θ) AVREMO DUE FUNZIONI $\rho(t), \theta(t)$
 CON LE QUALI POTREMO SCRIVERE

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t); \\ y(t) = \rho(t) \operatorname{sen} \theta(t), \end{cases} \quad t \in [\theta_A, \theta_B].$$

TALI FUNZIONI SI POSSONO RICAIVARE
 ELEMENTARMENTE DA $x(t), y(t)$: INFAT-
 TI SONO DATE DA

$$\begin{cases} \rho(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}; \\ \theta(t) = \operatorname{arccotg}(x(t)/y(t)). \end{cases}$$

PER SCRIVERE LA LUNGHEZZA IPERBO-
 LICA DI γ , CALCOLIAMO

$$\begin{cases} x'(t) = \rho'(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \theta'(t) \operatorname{sen} \theta(t), \\ y'(t) = \rho'(t) \operatorname{sen} \theta(t) + \rho(t) \theta'(t) \cos \theta(t), \end{cases}$$

QUINDI

$$\begin{aligned} L[\gamma] &= \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{\sqrt{(\rho'(t))^2 + (\rho(t) \theta'(t))^2}}{\rho(t) \operatorname{sen} \theta(t)} dt \\ &\geq \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{|\theta'(t)| dt}{\operatorname{sen} \theta(t)} \geq \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{\theta'(t) dt}{\operatorname{sen} \theta(t)}. \end{aligned}$$

INFINE, EFFETTUANDO LA SOSTITUZIO-
 NE $\theta = \theta(t)$, DOVE $\theta(t)$ È LA STESSA
 FUNZIONE CHE COMPARE NELLA PARA-
 METRIZZAZIONE DI γ , SI CONCLUDE CHE

$$L[\gamma] \geq \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta} = L[\gamma_0]$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

INTEGRALI MULTIPLI

IL FUNZIONALE DI DIRICHLET

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

ED IL FUNZIONALE DELL'AREA

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} dx$$

SONO FUNZIONALI DEL TIPO

$$F[u] = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

DOVE IL DOMINIO DI INTEGRAZIONE È UN APERTO LIMITATO $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, CON N SOLITAMENTE ≥ 2 .

DI TALI FUNZIONALI SI CERCA IL MINIMO FRA LE FUNZIONI u CHE SODDISFANO LA CONDIZIONE AL CONTORNO

$$u(x) = \varphi(x) \text{ PER } x \in \partial\Omega, \quad (71)$$

ESSENDO φ UNA FUNZIONE DATA. ANCHE PER QUESTO TIPO DI PROBLEMI, RAGIONANDO COME A PAG. Mc41, SI PUÒ DETERMINARE UNA CONDIZIONE NECESSARIA CHE LE EVENTUALI MINIMANTI DEVONO SODDISFARE:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, u(x), \nabla u(x)) & \quad (72) \\ & = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), \nabla u(x)), \end{aligned}$$

AVENDO INDICATO CON u_i , PER BREVVITÀ, LA DERIVATA PARZIALE $\partial u / \partial x_i$.

TALE EQUAZIONE, DETTA ANCORA DI EULERO-LAGRANGE, È UN'EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI PER LA QUALE LE POSSIBILITÀ DI UNA SOLUZIONE ESPLICITA SONO MOLTO PIÙ RAREFATTE RISPETTO AL CASO $N = 1$.

EQUAZIONI NOTEVOLI

SE IL FUNZIONALE DI DIRICHLET, CON LA CONDIZIONE AL CONTORNO (71), HA UNA MINIMANTE DI CLASSE $C^2(\Omega)$, ALLORA ESSA DEVE SODDISFARE L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

DETTA EQUAZIONE DI LAPLACE E SOLITAMENTE SCRITTA NELLA FORMA $\Delta u = 0$ OPPURE $\nabla^2 u = 0$.

LA NOTAZIONE ∇^2 È DOVUTA A SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865) [13, PAG. 123], MENTRE L'USO DEL SIMBOLO Δ SI DEVE A ROBERT MURPHY [14, PARAGRAFO 32.5].

LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE SI DICONO FUNZIONI ARMONICHE, TERMINE INTRODOTTO DA WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN, 1824–1907) [14, PAG. 799].

LE FUNZIONI ARMONICHE GODONO DI MOLTE PROPRIETÀ NOTEVOLI IL CUI STUDIO FORMA L'OGGETTO DELLA TEORIA DEL POTENZIALE [13, 20].

L'EQUAZIONE DI EULERO DEL FUNZIONALE DELL'AREA È, INVECE,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{u_i(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} = 0$$

DETTA PERCIÒ EQUAZIONE DELLE SUPERFICI MINIME.

L'ESPRESSIONE AL PRIMO MEMBRO, DIVISA PER N , ESPRIME LA CURVATURA MEDIA DEL GRAFICO DI u NEL PUNTO x , E DEFINISCE L'OPERATORE CHIAMATO PER L'APPUNTO OPERATORE DELLA CURVATURA MEDIA.

PROBLEMI CONNESSI

LA DIFFICOLTÀ DI RISOLVERE LE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI HA STIMOLATO PROFONDI STUDI, RIVOLTI, A TITOLO DI ESEMPIO:

- A DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE;
- A CAPIRE LA REGOLARITÀ DELLE SOLUZIONI;
- A STABILIRE LE EVENTUALI SIMMETRIE, O ALTRE PROPRIETÀ GEOMETRICHE DELLE SOLUZIONI.

ROVESCIAMENTO DEL PUNTO DI VISTA

STANTE LA DIFFICOLTÀ DI RISOLVERE LE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI, RISULTA TALVOLTA PIÙ AGEVOLE DIMOSTRARE L'ESISTENZA DEL MINIMO DI UN FUNZIONALE PER ALTRA VIA.

SE SI RIESCE IN TALE INTENTO, RISULTA DIMOSTRATA DI CONSEGUENZA L'ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE (72).

È QUESTO IL COSIDDETTO METODO VARIAZIONALE PER DIMOSTRARE L'ESISTENZA DELLE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI.

FRA I VARI METODI PER DIMOSTRARE L'ESISTENZA DEL MINIMO DI UN FUNZIONALE, NESSUNO DEI QUALI EFFICACE IN GENERALE, ACCENNEREMO NELL'ULTIMA PARTE DEL CORSO AL COSIDDETTO METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

APPENDICE

SUCCESSIONE DI TRIANGOLI ISOPERIMETRICI

PARTIAMO DA UN TRIANGOLO ISO-SCELE T_0 , DI PERIMETRO L RAZIONALE, I CUI LATI ABBIANO LUNGHEZZE IRRAZIONALI COME AD ESEMPIO $a_0 = \sqrt{2}$ E $b_0 = c_0 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{2})$.

COSTRUIAMO UNA SUCCESSIONE DI TRIANGOLI ISOSCELI ISOPERIMETRICI IN MODO RICORSIVO, PRENDENDO COME BASE DEL TRIANGOLO T_{n+1} , $n \in \mathbb{N}$, UNO DEI DUE LATI UGUALI DEL TRIANGOLO T_n .

IN PARTICOLARE, SE T_0 È COME NELL'ESEMPIO SOPRA CITATO ALLORA IL TRIANGOLO T_1 HA LATI IRRAZIONALI a_1, b_1, c_1 DATI DA $b_1 = b_0$ E $a_1 = c_1 = \frac{1}{2}(3 - b_1)$.

IN GENERALE, TUTTI I TRIANGOLI T_n PER $n \geq 1$ HANNO I LATI IRRAZIONALI PERCHÉ:

- 1) UN LATO, CHE INDICHIAMO CON ℓ_n , È IRRAZIONALE IN QUANTO LATO DEL TRIANGOLO PRECEDENTE;
- 2) GLI ALTRI DUE LATI SONO IRRAZIONALI PERCHÉ MISURANO $\frac{1}{2}(L - \ell_n)$.

DUNQUE NON SI OTTIENE UN TRIANGOLO EQUILATERO IN UN NUMERO FINITO DI PASSI.

SI PUÒ TUTTAVIA VERIFICARE CHE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \frac{L}{3}. \quad (73)$$

RISULTA INFATTI, COME GIÀ OSSERVATO,

$$\ell_{n+1} = \frac{1}{2}(L - \ell_n),$$

UGUAGLIANZA CHE CONVIENE RISCRIVERE COME

$$\ell_{n+1} - \frac{L}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{3} - \ell_n\right),$$

DALLA QUALE SI RICAVA

$$\ell_n - \frac{L}{3} = \frac{(-1)^n}{2^n} \left(\ell_0 - \frac{L}{3}\right).$$

FACENDO TENDERE n ALL'INFINITO SI GIUNGE ALLA (73).

COSTRUZIONE DI UN POLIGONO CONVESSO, CON GLI STESSI LATI, ED AREA MAGGIORE

A PARTIRE DA UN POLIGONO DATO \mathcal{P} , SEMPLICEMENTE CONNESSO, È POSSIBILE COSTRUIRE UN POLIGONO CONVESSO \mathcal{K} AVENTE GLI STESSI LATI DI \mathcal{P} E TALE CHE $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{K}|$.

CIÒ PUÒ SERVIRE, AD ESEMPIO, PER DIMOSTRARE LA DISUGUAGLIANZA ISOPERIMETRICA NELLA CLASSE DEI POLIGONI AVENTI UN DATO NUMERO DI LATI.

DATO UN POLIGONO \mathcal{P} CON N LATI E PERIMETRO L , DESCRIVIAMO UN POSSIBILE PROCEDIMENTO. SE \mathcal{P} È CONVESSO, PONIAMO $\mathcal{K} = \mathcal{P}$ E LA PROCEDURA È CONCLUSA.

SE \mathcal{P} NON È CONVESSO, ALLORA HA UNA RIENTRANZA: ESISTONO CIOÈ DUE VERTICI DISTINTI A, B CHE DIVIDONO IL CONTORNO $\partial\mathcal{P}$ IN DUE POLIGONALI γ_i, γ_e , DELLE QUALI γ_e , INSIEME AL SEGMENTO AB , DELIMITA UNA PARTE DI PIANO CHE CONTIENE IL POLIGONO \mathcal{P} COME SOTTOINSIEME PROPRIO.

INDICATA CON γ'_i LA POLIGONALE SIMMETRICA DI γ_i RISPETTO ALLA RETTA PER AB , L'UNIONE DI γ'_i CON γ_e DELIMITA UN POLIGONO \mathcal{P}_1 AVENTE GLI STESSI LATI DI \mathcal{P} E TALE CHE $|\mathcal{P}| < |\mathcal{P}_1|$.

ORA SI RIPETE IL RAGIONAMENTO: SE \mathcal{P}_1 È CONVESSO, SI PONE $\mathcal{K} = \mathcal{P}_1$ E LA PROCEDURA È CONCLUSA, ALTRIMENTI SI EFFETTUA SUL POLIGONO \mathcal{P}_1 LA COSTRUZIONE ANZIDETTA, E SI OTTIENE UN POLIGONO \mathcal{P}_2 AVENTE GLI STESSI LATI DI \mathcal{P} E TALE CHE $|\mathcal{P}_1| < |\mathcal{P}_2|$.

VOGLIAMO VERIFICARE CHE, PROCEDENDO IN TAL MODO, SI OTTIENE UN POLIGONO CONVESSO \mathcal{K} IN UN NUMERO FINITO DI PASSI.

VOGLIAMO CIOÈ ESCLUDERE LA POSSIBILITÀ CHE SI OTTenga UNA SUCCESSIONE DI INFINITI POLIGONI \mathcal{P}_k NON CONVESSI.

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE CIÒ AVVENGA, E MOSTRIAMO CHE SI GIUNGE AD UNA CONTRADDIZIONE.

OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE, PER COSTRUZIONE, LA SUCCESSIONE (\mathcal{P}_k) È STRETTAMENTE CRESCENTE NEL SENSO DELL'INCLUSIONE INSIEMISTICA, E CIOÈ

$$\mathcal{P}_k \subsetneq \mathcal{P}_{k+1} \text{ PER OGNI } k. \quad (74)$$

ORA FACCIAMO INTERVENIRE UNA PROPRIETÀ DI COMPATTEZZA. A TAL FINE, INDICATI CON x_{k1}, \dots, x_{kN} I VERTICI DEL POLIGONO \mathcal{P}_k , NON È RESTRITTIVO SUPPORRE CHE PER OGNI k IL VERTICE x_{kN} SIA L'ORIGINE: BASTA TRASLARE OPPORTUNAMENTE \mathcal{P}_k .

MA ALLORA, PER OGNI $j = 1, \dots, N$, LA SUCCESSIONE x_{1j}, x_{2j}, \dots DELLE POSIZIONI OCCUPATE DAL j -ESIMO VERTICE È LIMITATA, DUNQUE LA SUCCESSIONE (\mathcal{P}_k) HA UNA SOTTOSUCCESSIONE, CHE PER SEMPLIFICARE LA NOTAZIONE DENOTEREMO ANCORA CON (\mathcal{P}_k) , COSTITUITA DA POLIGONI I CUI VERTICI x_{k1}, \dots, x_{kN} CONVERGONO, PER $k \rightarrow +\infty$, A PUNTI CHE INDICHEREMO CON v_1, \dots, v_N .

SICCOME LE DISTANZE TRA I VERTICI DI \mathcal{P}_k NON SUPERANO QUELLE TRA I CORRISPONDENTI VERTICI DI \mathcal{P}_{k+1} , RISULTA $v_{j_1} \neq v_{j_2}$ SE $j_1 \neq j_2$.

INDICHIAMO CON \mathcal{K} IL POLIGONO DI VERTICI v_1, \dots, v_N . ESSENDO LA LUNGHEZZA DI UN SEGMENTO UNA FUNZIONE CONTINUA DELLE COORDINATE DEGLI ESTREMI, SI HA

$$|\partial\mathcal{K}| = L. \quad (75)$$

VERIFICHIAMO, ORA, CHE IL POLIGONO \mathcal{K} È CONVESSO. RAGIONIAMO PER ASSURDO: SE \mathcal{K} NON È CONVESSO ALLORA HA ALMENO UNA RIENTRANZA, INDIVIDUATA DA DUE VERTICI A, B E DALLE DUE POLIGONALI γ_i, γ_e .

CHIAMIAMO PROFONDITÀ p DELLA RIENTRANZA LA MASSIMA DISTANZA DEI VERTICI DI γ_i DALLA RETTA PER AB . PRESO $\varepsilon < p/2$, I VERTICI DEL POLIGONO \mathcal{P}_k STANNO DEFINITIVAMENTE NEGLI INTORNI DEI VERTICI DI \mathcal{K} DI RAGGIO ε .

IN PARTICOLARE, ESSI HANNO UN VERTICE A_k VICINO AD A , UN VERTICE B_k VICINO A B , E SONO DELIMITATI DA POLIGONALI γ_{ik}, γ_{ek} VICINE RISPETTIVAMENTE A γ_i E γ_e .

POICHÉ $\varepsilon < p/2$, EFFETTUANDO UNA RIFLESSIONE SU DI UN TALE POLIGONO \mathcal{P}_k SI OTTIENE UN POLIGONO \mathcal{P}_{k+1} NON INCLUSO IN \mathcal{K} : MA CIÒ È ASSURDO PERCHÉ, PER EFFETTO DELLA (74), SI HA $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{K}$ PER OGNI k .

PER ESSERE CERTI CHE LA COSTRUZIONE DI \mathcal{P}_{k+1} COINVOLGA PROPRIO LA RIENTRANZA CONSIDERATA, POSSIAMO CONVENIRE CHE \mathcal{P}_{k+1} SIA SEMPRE COSTRUITO OPERANDO SU DI UNA DELLE RIENTRANZE DI \mathcal{P}_k AVENTI LA MASSIMA PROFONDITÀ, E RAGIONARE SU DI ESSE.

DUNQUE IL POLIGONO \mathcal{K} È CONVESSO, COME AFFERMATO.

VERIFICHIAMO, INFINE, CHE $\mathcal{P}_k = \mathcal{K}$ PER QUALCHE INDICE k , DUNQUE LA COSTRUZIONE DEI POLIGONI \mathcal{P}_k RAGGIUNGE UN POLIGONO CONVESSO IN UN NUMERO FINITO DI PASSI.

CHIAMIAMO VERTICI PROPRI DI \mathcal{K} I VERTICI $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$, $m \leq N$, NON ALLINEATI CON I DUE VERTICI ADIACENTI.

LA DISTANZA DI OGNI VERTICE PROPRIO DI \mathcal{K} DALLA RETTA PASSANTE PER I DUE VERTICI ADIACENTI (NON NECESSARIAMENTE VERTICI PROPRI) È POSITIVA: INDICHIAMO CON $d_0 > 0$ IL SUO VALORE MINIMO.

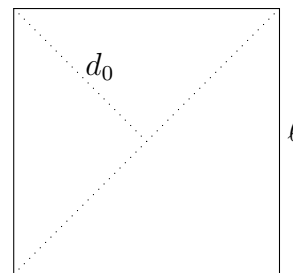


Figura 1: Distanza $d_0 = l/\sqrt{2}$ per $\mathcal{K} =$ quadrato

PRESO $\varepsilon < d_0/2$, ESISTE k_0 TALE CHE PER OGNI $k \geq k_0$ I VERTICI DI \mathcal{P}_k STANNO NEGLI INTORNI DEI VERTICI DI \mathcal{K} DI RAGGIO ε .

IN PARTICOLARE, I VERTICI DI \mathcal{P}_k VICINI A $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ NON POSSONO PIÙ MUOVERSI PERCHÉ $\varepsilon < d_0/2$. E POICHÉ ESSI TENDONO A $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$, DEVONO COINCIDERE CON ESSI.

TENUTO CONTO DELLA (75) E DEL FATTO CHE $|\partial\mathcal{P}_k| = L$ PER OGNI k , E POICHÉ LA LINEA PIÙ BREVE TRA DUE VERTICI PROPRI È IL SEGMENTO CHE LI CONGIUNGE, SI CONCLUDE CHE $\mathcal{P}_k = \mathcal{K}$ PER OGNI $k \geq k_0$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

RICHIAMI SULLE FUNZIONI IPERBOLICHE

PER RISOLVERE IL PROBLEMA DELLA CATENARIA (V. PAG. Mc61), COME PURE QUELLO DELLA SUPERFICIE MINIMA DI ROTAZIONE (ESERCIZI [202]) CONVIENE UTILIZZARE LE FUNZIONI IPERBOLICHE $\sinh t$ E $\cosh t$, CHE SI POSSONO DEFINIRE COME SEGUE:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

ELEVANDO AMBO I MEMBRI AL QUADRATO, E SOTTRAENDO LA PRIMA RELAZIONE DALLA SECONDA, SI TROVA

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1. \quad (76)$$

DI CONSEGUENZA, LA CURVA LE CUI EQUAZIONI PARAMETRICHE SONO

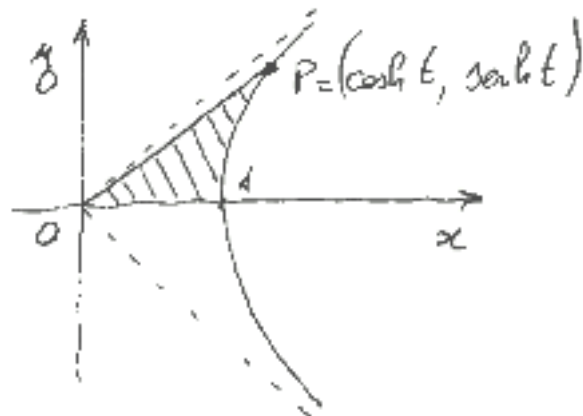
$$\begin{cases} x(t) = \cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases}$$

È IL RAMO DELL'IPERBOLE EQUILATERA DI EQUAZIONE $x^2 - y^2 = 1$ GIACENTE NEL SEMIPIANO $x > 0$. SI CONSTATA, INOLTRE, CHE

$$\frac{d}{dt} \sinh t = \cosh t,$$

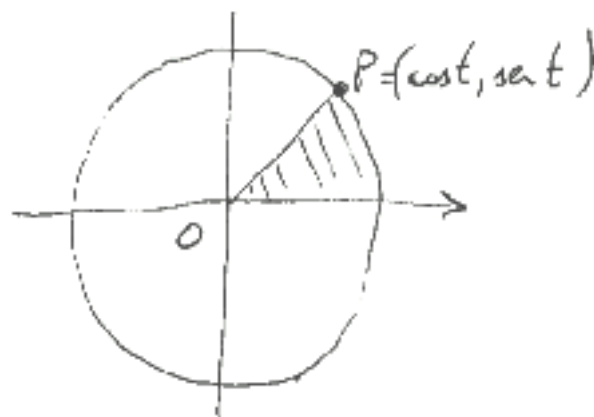
$$\frac{d}{dt} \cosh t = \sinh t.$$

SI PUÒ VERIFICARE CHE, PER OGNI $t > 0$, L'AREA DELLA FIGURA DELIMITATA DALLA SUDDETTA IPERBOLE, DALL'ASSE x E DALLA RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE E PER IL PUNTO $(\cosh t, \sinh t)$ VALE $t/2$, IN ANALOGIA CON QUANTO AVVIENE CON LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE $\sin t$ E $\cos t$.



L'AREA DEL SETTORE IPERBOLICO È $t/2$ (SE $t > 0$).

NEL CASO CIRCOLARE LA SITUAZIONE È SIMILE:



CENNI ALLE FUNZIONI IPERBOLICHE INVERSE

PARTICOLARMENTE UTILI PER L'INTEGRAZIONE SONO LE FUNZIONI IPERBOLICHE INVERSE.

LA FUNZIONE $y(t) = \sinh t$ È INIETTIVA, E LA SUA INVERSA SI DENOTA CON $t(y) = \operatorname{setth} y$, $x \in \mathbb{R}$. SI TROVA CHE

$$\operatorname{setth} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}). \quad (77)$$

LA FUNZIONE $x(t) = \cosh t$, RISTRETTA AL SEMIASSE $t \geq 0$, È INIETTIVA E LA SUA INVERSA SI DENOTA CON $t(x) = \operatorname{settc} x$, $x \geq 1$. SI TROVA CHE

$$\operatorname{settc} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}). \quad (78)$$

DAL TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA DISCENDE CHE

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \operatorname{setth} y &= \frac{1}{\frac{d}{dt} \sinh t} \\ &= \frac{1}{\cosh t}, \end{aligned}$$

DA CUI, USANDO LA (76), SI RICAVA

$$\frac{d}{dy} \operatorname{setth} y = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}.$$

PROCEDENDO IN MODO ANALOGO SI RICAVA ANCHE

$$\frac{d}{dx} \operatorname{settc} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

E DI CONSEGUENZA

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \operatorname{setth} y + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{sgn}(x) \operatorname{settc} |x| + C.$$

NOTARE L'ANALOGIA CON

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \operatorname{arcsen} y + C.$$

PER RICAVARE LA (77) SI PARTE DALL'UGUAGLIANZA

$$y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

E SI MOLTIPLICANO AMBO I MEMBRI PER $2e^t$. SI OTTIENE

$$(e^t)^2 - 2ye^t - 1 = 0$$

CHE È UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO NELL'INCOGNITA $e^t > 0$, DUNQUE LA SOLUZIONE È

$$e^t = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

DA CUI DISCENDE LA (77). A QUESTO PROPOSITO SI NOTI CHE $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} \geq y$, E PERCIÒ LA SOLUZIONE $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ È DA SCARTARE.

LA (78) SI RICAVA IN MODO ANALOGO: PARTENDO DA

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

SI OTTIENE UN'EQUAZIONE NELL'INCOGNITA $e^t \geq 1$ LE CUI DUE SOLUZIONI REALI SONO

$$x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

SI NOTI CHE PER OGNI $x \geq 1$ RISULTA $1 - x \leq 0 \leq \sqrt{x^2 - 1}$, DUNQUE

$$x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1.$$

INVECE, MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER $x - \sqrt{x^2 - 1}$, SI TROVA

$$x - \sqrt{x^2 - 1} \leq 1.$$

DEVE PERCIÒ AVERSI

$$e^t = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

DA CUI SEGUE LA (78).

AREA DEL SETTORE IPERBOLICO

FISSIAMO UN PUNTO $P = (x, y)$, CON $x, y > 0$, SULL'IPERBOLE DI EQUAZIONE

$$x^2 - y^2 = 1 \quad (79)$$

E PONIAMO $Q = (x, -y)$. CONSIDERIAMO LA FIGURA PIANA DELIMITATA DAI SEGMENTI OP ED OQ E DALL'ARCO PQ DELLA SUDETTA IPERBOLE: TALE FIGURA È UN "SETTORE IPERBOLICO", E LA SUA AREA A È DATA DA

$$A = \text{sett} \cosh x \quad (80)$$

$$= \text{sett} \sinh y. \quad (81)$$

INFATTI L'AREA A SI PUÒ RICAVERE DALL'AREA xy DEL TRIANGOLO ISOSCELE DI VERTICI OPQ : PER IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DELL'INTEGRALE SI HA

$$A = xy - 2 \int_1^x \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi. \quad (82)$$

L'INTEGRALE SI PUÒ SVOLGERE PER PARTI:

$$\begin{aligned} \int_1^x \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi &= \left[\xi \sqrt{\xi^2 - 1} \right]_1^x \\ &\quad - \int_1^x \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \\ &= xy - \int_1^x \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi. \end{aligned}$$

AGGIUNGENDO $-1 + 1$ AL NUMERATORE DELLA FRAZIONE, SI OTTIENE

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi &= \int_1^x \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi \\ &\quad + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \end{aligned}$$

E PERCIÒ

$$2 \int_1^x \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi = xy - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi.$$

SOSTITUENDO NELLA (82) SI OTTIENE

$$A = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi.$$

MA POICHÉ LA FUNZIONE INTEGRANDA È LA DERIVATA DI $\text{sett} \cosh \xi$, SI GIUNGE ALLA (80).

A SUA VOLTA LA (80) IMPLICA CHE $\cosh A = x$, E DA QUESTA, USANDO LA (76) E LA (79), SI RICAVA $\sinh A = y$. DUNQUE VALE LA (81).

Bibliografia

- [1] L. Amerio, *Analisi matematica*, vol. 2. UTET, 1977. Vedasi in particolare il capitolo 8: Calcolo delle variazioni.
- [2] E. Armanini *Sulla superficie di minima resistenza*. *Annali di Mat.* (3) **4** (1900), 131–149.
- [3] H. Brézis, *Analisi funzionale, teoria e applicazioni*. Liguori, 1986.
- [4] G. Buttazzo, B. Kawohl, *On Newton's problem of minimal resistance*. *Math. Intell.* **15**(4) (1993), 7–12.
- [5] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*. Interscience 1952 / Wiley 1989. Vedasi in particolare il capitolo IV: The calculus of variations.
- [6] P. D'Ancona, E. Montefusco, *Il dubbio di Didone*. In: Ricordando Franco Conti, Centro di ricerca matem. E. de Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa, 2004, pagg. 59–79.
- [7] E. De Giorgi, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera*. *Mem. Accad. Naz. Lincei* **5**, 33–44.
- [8] H. Federer, *Geometric measure theory*. Springer, 1969.
- [9] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of variations*. Springer, 1996.
- [10] E. Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica*, vol. 2. Boringhieri, 1992.
- [11] A. Greco, *Minimization of non-coercive integrals by means of convex rearrangement*. *Adv. Calc. Var.* **5** (2012), 231–249.
- [12] N. D. Kazarinoff, *Geometric inequalities*. New Mathematical Library, 1961.
- [13] O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory*. Dover, 1953 (<http://archive.org>).
- [14] M. Kline, *Storia del pensiero matematico*. Einaudi, 1996. Vedasi in particolare il capitolo XXIV: Il calcolo delle variazioni nel XVIII secolo.

- [15] A. Kneser, *Ein Beitrag zur Frage nach der zweckmäßigsten Gestalt der Geschosspitzen*. Arch. Math. Phys. **2** (1902), 267–278.
- [16] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*. Dover, 1986 (<http://archive.org>).
- [17] P. Marcellini, *Nonconvex integrals of the calculus of variations*. In: *Methods of nonconvex analysis*. Lecture Notes in Math. **1446**, Springer, 1990, 16–57.
- [18] C. B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations*. Springer, 1966.
- [19] C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica*, vol. 2. Masson/Zanichelli. Vedasi in particolare il capitolo 7, paragrafo 2: Elementi di calcolo delle variazioni.
- [20] B. O. Peirce, *Elements of the theory of the Newtonian potential function*. Ginn & Co., 1902 (<http://archive.org>).
- [21] H. A. Schwarz *Beweis des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens*. Nachrichten von der K. G. d. W. zu Göttingen **1** (1884), 1–13 (www.DigiZeitschriften.de).
- [22] U. Stammbach, *A letter of Hermann Amandus Schwarz on isoperimetric problems*. The Mathematical Intelligencer **34** (2012), 44–51.
- [23] G. Talenti, *The standard isoperimetric theorem*. In: *Handbook of convex geometry*, volume A, pagine 73–123. North-Holland, 1993 (<https://ebookcentral.proquest.com>).
- [24] R. Tapia, *The isoperimetric problem revisited: extracting a short proof of sufficiency from Euler's 1744 approach to necessity* (www.cmor-faculty.rice.edu).
- [25] L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*. Zanichelli, 1921.