Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Fisica

Analisi Matematica II

prof. Antonio Greco

Seconda parte

Anno accademico 2024/25

LU 21 OTT 2024

IN GENERALE, UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA DI ORDINE $n \geq 1$ SI PUÒ RAPPRESENTARE NELLA FORMA

$$F\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

DOVE $F(t, y_0, y_1, \dots, y_n)$ È UNA FUNZIONE ASSEGNATA DI $n+2$ VARIABILI.

UNA SOLUZIONE È UNA FUNZIONE $y(t)$ CHE SIA DERIVABILE ALMENO n VOLTE E TALE CHE

$$F\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

PER OGNI t IN UN INTERVALLO (a, b).

IN PRATICA, SI RICORRE ALLA DEFINIZIONE PER FARE UNA VERIFICA

ESEMPIO: L'EQUAZIONE $e^t y^2 + y' = 0$

ASSUME LA FORMA SUDDETTA PONENDO

$$F(t, y_0, y_1) = e^t y_0^2 + y_1 \quad \text{E} \quad n = 1$$

UNA SOLUZIONE È LA FUNZIONE $y(t) = 0$

INFATTI $y'(t) = 0$ E SI TROVA CHE

$$e^t (y(t))^2 + y'(t) = 0 \text{ PER OGNI } t \in \mathbb{R}.$$

FORMA NORMALE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

CON $f(t, y_0, \dots, y_{n-1})$ FUNZIONE DI $n+1$ VARIABILI.

$$y'(t) = -e^t (y(t))^2$$

$$f(t, y_0) = -e^t y_0^2$$

NESSO TRA FORMA NORMALE ED ESISTENZA E MOLTEPLICITÀ DELLE SOLUZIONI

1) L'EQUAZIONE $e^{y'} = 0$ NON HA SOLUZIONI

$F(t, y, y') = 0$ CON $F(t, y_0, y_1) = e^{y_1}$

E NON SI PUÒ PORRE IN FORMA NORMALE.

2) $\operatorname{sgn}(y') = 1$ HA LA SOLUZIONE $y(t) = t$, $y(t) = e^t$, $y(t) = \operatorname{arctg} t$ BENCHÉ NON SI POSSA PORRE IN FORMA NORMALE.

SE LA FUNZIONE INCOGNITA $u(x_1, \dots, x_n)$ DIPENDE DA PIÙ DI UNA VARIABILE SI PARLA DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI, COME L'EQUAZIONE DI LAPLACE

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

IN CUI IL PRIMO MEMBRO SI CHIAMA LAPLACIANO DI u:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u$$

OSSERVAZIONE: $y'(t) = f(t)$ FUNZIONE ASSEGNATA.

SE $f \in C^0((a, b))$ LE SOLUZIONI SONO $y(t) = \int f(x)\,dx$ LE PRIMITIVE DI f. SE, PERÒ, PRENDO $f(t) = \operatorname{sgn} t$, NON ESISTONO SOLUZIONI IN $(-\varepsilon, \varepsilon)$

LU 21 OTT 2024

MA 22 OTT 2024

EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE, IN FORMA NORMALE, A VARIABILI SEPARABILI

$$y'(t) = f(t)\cdot g(y(t))$$

SOLUZIONI BANALI: SE LA $g(y)$ HA ZERI CIOÈ NUMERI $y_0 \in \mathbb{R}$ TALI CHE $g(y_0) = 0$ ALLORA LE FUNZIONI $y(t) = y_0$ PER OGNI t SODDISFANO BANALMENTE L'EQUAZIONE.

SUPPONIAMO CHE $f(t)$ E $g(y)$ SIANO CONTINUE E CERCHIAMO LE SOLUZIONI NON BANALI. SE $y(t)$ È UNA SOLUZIONE NON BANALE, ESISTE ALMENO UN PUNTO t_0 DOVE $g(y(t_0)) \neq 0$ QUINDI SI HA $g(y(t)) \neq 0$ PER OGNI $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$.

IN TALE INTERVALLO POSSIAMO SCRIVERE

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$$

E POI INTEGRARE:

$$\int \frac{y'(t)\,dt}{g(y(t))} = \int f(t)\,dt$$

PER SOSTITUZIONE $y = y(t)$, $dy = y'(t)\,dt$, IL PRIMO MEMBRO DIVENTA $\int \frac{dy}{g(y)}$ E SI GIUNGE A

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\,dt$$

SVOLGENDO GLI INTEGRALI SI OTTIENE UNA RAPPRESENTAZIONE DELLA SOLUZIONE.

ESEMPIO: L'EQUAZIONE $y' = -e^t y^2$ È A VARIABILI SEPARABILI, E LA FUNZIONE $y(t) = 0$ PER OGNI t È L'UNICA SOLUZIONE BANALE. PER TROVARE LE SOLUZIONI NON BANALI, USIAMO LA NOTAZIONE DI LEIBNIZ:

$$\frac{dy}{dt} = -e^t y^2$$

E POI SEPARIAMO I DIFFERENZIALI:

$$\frac{dy}{y^2} = -e^t\,dt$$

SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

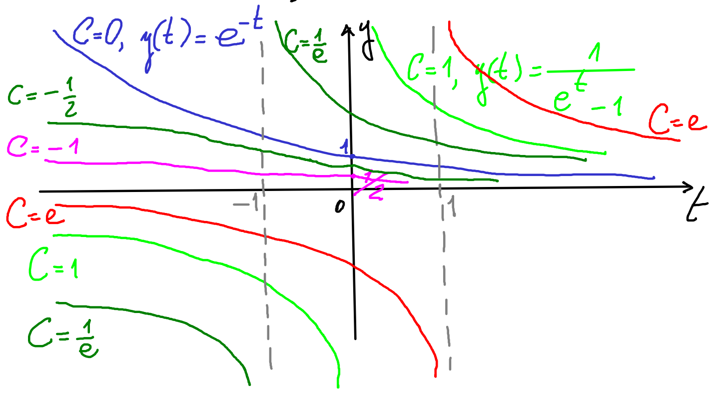
INFINE, INTEGRIAMO AMBO I MEMBRI:

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int e^t\,dt$$

OTTENIAMO $-\frac{1}{y} = -e^t + C$

NOTA: PERDE SIGNIFICATO PER $C>0$ E $t = \log C$.

DA CUI $y(t) = \frac{1}{e^t - C}$ FAMIGLIA DI SOLUZIONI DIPENDENTI DAL PARAMETRO C. DOMINIO: L'INSIEME $\mathbb{R}$ SE $C \leq 0$, $\mathbb{R} \setminus \{\log C\}$ SE $C > 0$. GRAFICI:



MA 22 OTT 2024

IL PROBLEMA AI VALORI INIZIALI

È COSTITUITO DA UN'EQUAZIONE $y'(t) = f(t, y(t))$

ABBINATA AD UNA CONDIZIONE INIZIALE, DEL TIPO $y(t_0) = y_0$ (t_0 ISTANTE INIZIALE, y_0 VALORE INIZIALE, DATI) E SI SCRIVE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ESEMPIO:
$$\begin{cases} y'(t) = -e^t (y(t))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

SAPPIAMO CHE LA SOLUZIONE È $y(t) = e^{-t}$

ANALOGAMENTE, SI PUÒ CONSIDERARE IL PROBLEMA

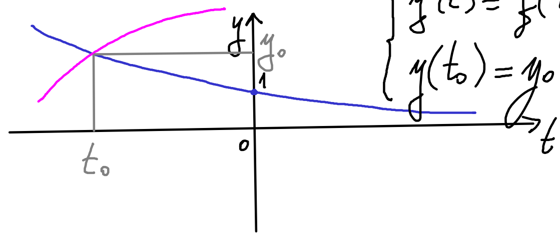
$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

TEOREMA DI CAUCHY: PENSIAMO A $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ COME A UN PUNTO IN $\mathbb{R}^{n+1}$ E SUPPONIAMO CHE f SIA CONTINUA IN UN INTORNO DI TALE PUNTO. SUPPONIAMO INOLTRE CHE LE DERIVATE PARZIALI $\frac{\partial f}{\partial y_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}$ ESISTANO ESISTANO E SIANO CONTINUE NEL SUDDETTO INTORNO. TESI: ESISTE UN INTORNO $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ NEL QUALE ESISTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DATO.

NELL'ESEMPIO
$$\begin{cases} y'(t) = -e^t (y(t))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

IL PUNTO $(t_0, y_0) = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ E $f(t,y) = -e^t y^2$ È DEFINITA IN $\mathbb{R}^2$, È IVI CONTINUA, E LA DERIVATA $\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^t y$ ESISTE ED È CONTINUA IN $\mathbb{R}^2$. DUNQUE ESISTE $(-\delta, \delta)$ DOVE ESISTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE.

IL TEOREMA ESCLUDE LA POSSIBILITÀ CHE DUE GRAFICI SI INTERSECHINO:
$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$



PROCEDIMENTO RISOLUTIVO DEL PROBLEMA AI VALORI INIZIALI

FACCIAMO RIFERIMENTO ALL'EQUAZIONE $y' = -e^t y^2$

FASE 1: TROVARE L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI.

NELL'ESEMPIO, ESSE SONO $y(t) = \frac{1}{e^t - C}$ E

LA SOLUZIONE BANALE $y(t) = 0$.

FASE 2: DETERMINARE QUELLA CHE SODDISFA LA CONDIZIONE INIZIALE $y(t_0) = y_0$.

ESEMPIO: $\begin{cases} y'(t) = -e^t y^2(t) \\ y(1) = 0 \end{cases}$

LA SOLUZIONE È $y(t) = 0$ QUELLA BANALE PERCHÉ $y(t) = \dfrac{1}{e^t - C} \neq 0$ PER OGNI t.

ESEMPIO: $\begin{cases} y'(t) = -e^t y^2(t) \\ y(t_0) = 0, \quad t_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

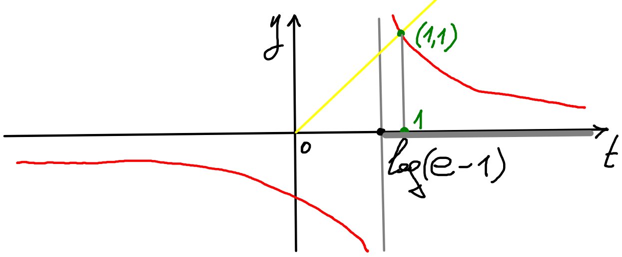
HA SOLO LA SOLUZIONE BANALE $y(t) = 0$.

ESEMPIO: $\begin{cases} y'(t) = -e^t y^2(t) \\ y(1) = 1 \end{cases}$

VISTO CHE LA SOLUZIONE BANALE NON SODDISFA LA CONDIZIONE $y(1) = 1$, CERCHIAMO $C \in \mathbb{R}$ TALE CHE $y(t) = \dfrac{1}{e^t - C}$ SODDISFI $y(1) = 1$:

DEVE RISULTARE CHE $\dfrac{1}{e^1 - C} = 1$ EQUAZIONE ALGEBRICA NELL'INCOGNITA C

LA SCRIVIAMO $e - C = 1$ E OTTENIAMO $C = e - 1 > 0$. LA SOLUZIONE CERCATA È DUNQUE $y(t) = \dfrac{1}{e^t - (e-1)}$, $t \in (\log(e-1), +\infty)$



GI 24 OTT 2024

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

HANNO LA FORMA $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = f(t)$

CON $a_0(t), \dots, a_n(t)$ E $f(t)$ FUNZIONI DATE CHE SUPPONIAMO CONTINUE.

CONTROESEMPIO: L'EQUAZIONE $y' = -e^t y^2$ NON È LINEARE PER LA PRESENZA DI y^2

ESEMPIO: $y'(t) = a(t)\, y(t)$ È LINEARE.

(QUANDO $g(y) = y$, L'EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI È LINEARE) RISOLVIAMOLA.

1. LA SOLUZIONE BANALE È $y(t) = 0$

2. LE ALTRE SI OTTENGONO TRAMITE L'UGUAGLIANZA
$$\int \frac{dy}{y} = \int a(t)\, dt$$

SAPENDO CHE $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \log|y| + C$

POSSIAMO SCRIVERE $\log|y(t)| = \displaystyle\int a(t)\, dt$ $= A(t) + C$ ESSENDO $A(t)$ UNA PRIMITIVA DI $a(t)$, E QUINDI

$$|y(t)| = e^{A(t)+C} = e^C \cdot e^{A(t)}.$$

CONCLUSIONE: $y(t) = k\, e^{A(t)}$, $k \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO: $y' = \dfrac{y}{t}$ È LINEARE CON $a(t) = \dfrac{1}{t}$

SOLUZIONE BANALE: $y(t) = 0$. ALTRE SOLUZIONI:

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t}$; $\log|y(t)| = \log|t| + C$;

$|y(t)| = e^C |t|$. IN CONCLUSIONE $y(t) = kt$ PER $t \in (-\infty, 0)$ E PER $t \in (0, +\infty)$

GI 24 OTT 2024

L'EQUAZIONE LINEARE NON OMOGENEA DEL PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + f(t)$$

LE SOLUZIONI HANNO LA FORMA

$y(t) = \varphi(t)\, e^{A(t)}$ CON $A(t)$ UNA PRIMITIVA DI $a(t)$ E $\varphi(t)$ DA TROVARSI.

SI HA: $y'(t) = \varphi(t)\, a(t)\, e^{A(t)} + \varphi'(t)\, e^{A(t)}$

E VOGLIAMO CHE SIA $= a(t)\, y(t) + f(t)$

QUINDI PRENDEREMO $\varphi(t)$ TALE CHE

$\varphi'(t)\, e^{A(t)} = f(t)$ CIOÈ $\varphi'(t) = f(t)\, e^{-A(t)}$

DUNQUE $\varphi(t) = \int f(t)\, e^{-A(t)}\, dt$ E LE SOLUZIONI SONO DUNQUE $y(t) = e^{A(t)} \int f(t)\, e^{-A(t)}\, dt$

ESERCIZIO: $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t} + t \\ y(1) = 0 \end{cases}$

LU 28 OTT 2024

PROPRIETÀ TEORICHE DELL'EQUAZIONE

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = 0$$

1. OMOGENEITÀ: A PARTIRE DA UNA QUALUNQUE SOLUZIONE $y(t)$, MOLTIPLICANDO PER $\lambda \in \mathbb{R}$ ARBITRARIO SI OTTIENE ANCORA UNA SOLUZIONE.

DIMOSTRAZIONE: PRENDO UNA $y(t)$ TALE CHE

$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = 0$ PER OGNI $t \in (a,b)$.

PRENDO $\lambda \in \mathbb{R}$ E CONSIDERO LA FUNZIONE $\lambda y(t)$.

SO CHE $\frac{d^k}{dt^k} \lambda y(t) = \lambda \frac{d^k}{dt^k} y(t)$ E QUINDI

TROVO $\sum_{k=0}^{n} a_k(t) \frac{d^k}{dt^k} \lambda y(t) =$

$= \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \frac{d^k}{dt^k} y(t) = 0$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

2. PIÙ IN GENERALE, SE PRENDO DUE SOLUZIONI $y_1(t)$ E $y_2(t)$ E DUE SCALARI $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, LA FUNZIONE $\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$ È ANCORA UNA SOLUZIONE (DIMOSTRAZIONE: ESERCIZIO)

IN PARTICOLARE, LA FUNZIONE NULLA $y(t) = 0$ È UNA SOLUZIONE.

IN CONCLUSIONE, L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA HA LA STRUTTURA DI UNO SPAZIO VETTORIALE. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE (GLI $a_k(t)$ SIANO CONTINUI E) $a_n(t) \neq 0$ PER OGNI $t \in (a,b)$ IL SUDDETTO SPAZIO HA DIMENSIONE n.

Quindi le soluzioni di $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = 0$ si possono rappresentare nella forma

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t).$$

Si dice che le $y_i(t)$ sono n integrali particolari, linearmente indipendenti, e $y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t)$ è l'integrale generale (integrale = soluzione)

Esempio: l'equazione $y' = \frac{y}{t}$ le cui soluzioni sono $y(t) = kt$ rispetta quanto sopra: basta prendere $y_1(t) = t$.

Controesempio: l'equazione $y' = -e^{t} y^2$ non è lineare. Sappiamo che la funzione $y(t) = e^{-t}$ è una soluzione. Tuttavia se prendo $y(t) = 2e^{-t}$ trovo $y'(t) = -2e^{-t}$ mentre il secondo membro vale $-\cancel{e^{t}} \cdot 4 \cdot \cancel{e^{-t}} \cdot e^{-t} = -4e^{-t}$ quindi non è soluzione e l'equazione non può dirsi omogenea, né tantomeno lineare.

LU 28 OTT 2024

Consideriamo, per semplicità, l'equazione $y'' = -y$. Si vede che le funzioni $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} t$ sono integrali particolari, linearmente indipendenti.

Comunque si prendano $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, la funzione $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$ è ancora una soluzione (esercizio). Verifichiamo che, presa una funzione $y(t)$ soddisfacente $y'' = -y$, esistono $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tali che $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$. Verifica:

prendo $t_0 \in \mathbb{R}$ e calcolo: $y(t_0)$, $y'(t_0)$, $\operatorname{sen} t_0$ e $\cos t_0$. Poi risolvo il sistema

$$\begin{cases} \overbrace{C_1 \cos t_0 + C_2 \operatorname{sen} t_0}^{z(t_0)} = y(t_0) \\ \underbrace{-C_1 \operatorname{sen} t_0 + C_2 \cos t_0}_{z'(t_0)} = y'(t_0) \end{cases}$$

nelle incognite C_1, C_2 (sistema risolubile perché $\begin{vmatrix} \cos t_0 & \operatorname{sen} t_0 \\ -\operatorname{sen} t_0 & \cos t_0 \end{vmatrix} = 1$)

Infine con tali C_1 e C_2 definisco la funzione $z(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$ e dico che la $y(t)$ che avevo all'inizio è proprio questa $z(t)$. Lo vedo per l'unicità della soluzione del problema

$$\begin{cases} \varphi'' = -\varphi \\ \varphi(t_0) = y(t_0) \text{ dato} \\ \varphi'(t_0) = y'(t_0) \text{ dato} \end{cases}$$

PROPRIETÀ TEORICHE DELL'EQUAZIONE

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = f(t)$$

NOTARE CHE SE $f(t)$ NON È IDENTICAMENTE NULLA, LA FUNZIONE $y_0(t) = 0$ NON È SOLUZIONE, PERÒ:

L'INTEGRALE GENERALE È

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t) + z_0(t)$$

DOVE $y_1(t), \dots, y_n(t)$ SONO UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE OMOGENEA E $z_0(t)$ È UNA SOLUZIONE (VANNO BENE TUTTE) DI $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z^{(k)}(t) = f(t)$.

DIMOSTRAZIONE. PRIMA PARTE.

PRENDO UNA $z_0(t)$ SIFFATTA E CI SOMMO LA $\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t)$, OTTENGO $z(t) = z_0(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t)$, VEDO CHE $z^{(k)}(t) = z_0^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(k)}(t)$ E SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE TROVO $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z^{(k)}(t)$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z_0^{(k)}(t)}_{f(t)} + \sum_{i=1}^{n} C_i \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_i^{(k)}(t)}_{=0}$$

$$= f(t)$$

SECONDA PARTE: SIA $z(t)$ UNA QUALUNQUE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z^{(k)}(t) = f(t)$ E $z_0(t)$ UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DI $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z_0^{(k)}(t) = f(t)$. VERIFICHIAMO CHE ESISTONO $C_1, \dots, C_n$ TALI CHE $z(t) = z_0(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t)$, ESSENDO $y_1(t), \dots, y_n(t)$ UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = 0$.

PONIAMO $y(t) = z(t) - z_0(t)$. SI TROVA

$y^{(k)}(t) = z^{(k)}(t) - z_0^{(k)}(t)$ E QUINDI

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z_0^{(k)}(t) = 0.$$

QUINDI $y(t)$ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA! MA ALLORA SI PUÒ SCRIVERE $y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t)$, DA CUI $z(t) - z_0(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t)$, CHE È LA TESI.

MA 29 OTT 2024

$$\boxed{\text{COME TROVARE } y_1(t), \dots, y_m(t) \text{ E } z_0(t)}$$

STUDIAMO LE EQUAZIONI A COEFFICIENTI COSTANTI $\sum_{k=0}^{m} a_k y^{(k)}(t) = 0$. SUSSISTE UNA RELAZIONE NOTEVOLE CON L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k = 0$ CHE HA n SOLUZIONI $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$.

ESEMPIO: L'EQUAZIONE CARATTERISTICA ASSOCIATA A $y'' = -y$ È $\lambda^2 + 1 = 0$.

TEOREMA: SE $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ È UNA SOLUZIONE DI $\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_0^k = 0$ ALLORA LA FUNZIONE $y(t) = e^{\lambda_0 t}$ È UNA SOLUZIONE DI $\sum_{k=0}^{m} a_k y^{(k)}(t) = 0$.

DIMOSTRAZIONE: SI TROVA $y^{(k)}(t) = \lambda_0^k e^{\lambda_0 t}$

E QUINDI $\sum_{k=0}^{m} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_0^k e^{\lambda_0 t}$

$= e^{\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_0^k = 0.$

ESEMPIO: L'EQUAZIONE $y'' = 0$ HA EQUAZIONE CARATTERISTICA $\lambda^2 = 0$ LE CUI SOLUZIONI SONO $\lambda_0 = 0$ (MOLTEPLICITÀ 2). IL TEOREMA GARANTISCE CHE $y(t) = e^0 = 1$ È UNA SOLUZIONE.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE λ_0 HA MOLTEPLICITÀ $m \geq 2$ ALLORA LE FUNZIONI $te^{\lambda_0 t}$, $t^2 e^{\lambda_0 t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda_0 t}$ SONO $m-1$ SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE.

MA ALLORA L'EQUAZIONE $y'' = 0$ AVRÀ, OLTRE ALLA SOLUZIONE $y_1(t) = e^{0t} = 1$, ANCHE LA SOLUZIONE $y_2(t) = te^{0t} = t$, QUINDI L'INTEGRALE GENERALE È $y(t) = C_1 + C_2 t$.

NOTA: IL RISULTATO SI OTTIENE INTEGRANDO DUE VOLTE! DA $y'' = 0$, CIOÈ $(y')' = 0$ DEDUCO $y' = C_2$ (UNA COSTANTE). QUINDI $\int y'(t)\,dt = C_2 t + C_1$ DA CUI LA TESI.

ESEMPIO: RISOLVIAMO L'EQUAZIONE

$$y''(t) = -y(t) + \operatorname{sen} 2t.$$

1. L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA È $y'' = -y$, LE CUI SOLUZIONI SONO $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$.

2. CERCHIAMO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $z_0(t)$ DI $z_0''(t) = -z_0(t) + \operatorname{sen} 2t$

SICCOME $(\operatorname{sen} 2t)'' = -4 \operatorname{sen} 2t$ CERCO UN $B \in \mathbb{R}$ TALE CHE $z_0(t) = B \operatorname{sen} 2t$ SODDISFI L'EQUAZIONE (METODO DI SOMIGLIANZA).

SI TROVA $z_0''(t) = -4B \operatorname{sen} 2t$ E QUINDI $z_0''(t) + z_0(t) = -3B \operatorname{sen} 2t$

E DEDUCO CHE $B = -\frac{1}{3}$, DA CUI $z_0(t) = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} 2t$ QUINDI LE SOLUZIONI DI $y''(t) = -y(t) + \operatorname{sen} 2t$ SONO

$$z(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 2t.$$

MA 29 OTT 2024

LE SOLUZIONI $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$ DI $y'' + y = 0$ SI POSSONO ANCHE OTTENERE DALL'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\lambda^2 + 1 = 0$, LE CUI SOLUZIONI SONO $\lambda_1 = i$ E $\lambda_2 = -i$ ALLE QUALI CORRISPONDONO $y_1(t) = e^{it}$ E $y_2(t) = e^{-it}$ OVVERO

$$y_1(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$$
$$y_2(t) = \cos t - i \operatorname{sen} t$$

LA FORMULA DI EULERO $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ SI DEDUCE DALLE SERIE

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} \quad \text{E}$$

$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

INFATTI $e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4} + \dots$

$$= \cos t + i \operatorname{sen} t$$

QUINDI LA SOLUZIONE DI $y'' = -y$ È

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$
$$= C_1(\cos t + i \operatorname{sen} t) + C_2(\cos t - i \operatorname{sen} t)$$
$$= (C_1 + C_2)\cos t + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen} t$$

PONGO $\begin{cases} C_1 + C_2 = A \in \mathbb{R} \\ i(C_1 - C_2) = B \in \mathbb{R} \end{cases}$

E OTTENGO $y(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t$