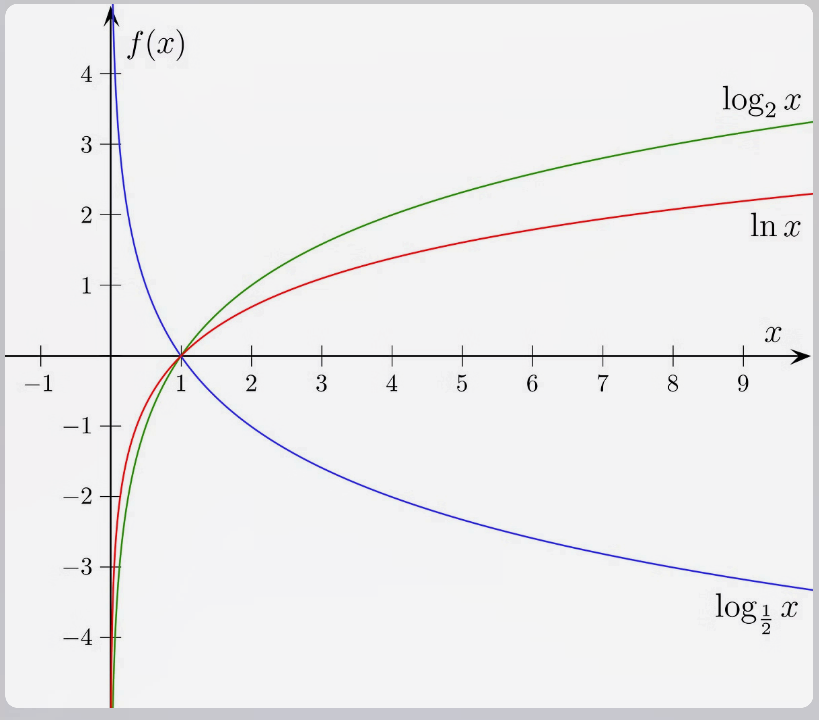
LOGARITMI ED ESPONENZIALI

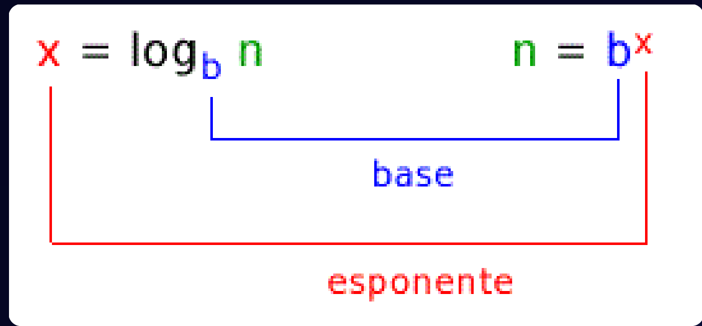
I logaritmi e gli esponenziali sono concetti fondamentali nella matematica e in molte discipline scientifiche. Comprendere la definizione, le proprietà e i metodi di risoluzione di equazioni e disequazioni logaritmiche ed esponenziali è essenziale per affrontare con successo problemi avanzati in ambiti quali fisica, chimica, ingegneria e finanza. In questa presentazione, esploreremo in dettaglio questi importanti argomenti, fornendo una panoramica completa sui logaritmi e sugli esponenziali e sulle loro applicazioni nella risoluzione di equazioni e disequazioni.



Definizione di logaritmo e sue proprietà

Definizione di logaritmo

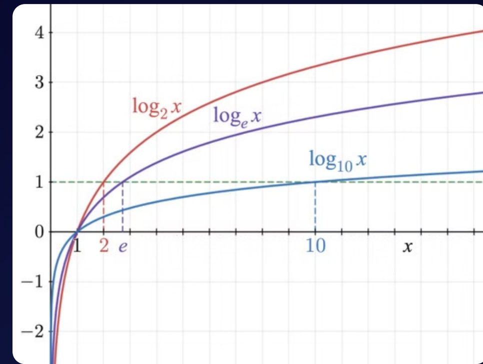
Il logaritmo di un numero n (argomento) in base b è l'esponente a cui bisogna elevare la base b per ottenere n.



$$\log_{10} 100 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$10^2 = 100$$



Proprietà dei logaritmi

I logaritmi soddisfano diverse importanti proprietà, tra cui il prodotto, il quoziente, la potenza e la somma/differenza. Queste proprietà permettono di semplificare e manipolare espressioni logaritmiche in modo efficace.

Proprietà	Esempio
Teorema del prodotto	
$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$	$\log_2(3\,x) = \log_2(3) + \log_2(x)$
Teorema del rapporto	
$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$	$\log_2\left(\frac{x}{3}\right) = \log_2(x) - \log_2(3)$
Teorema della potenza	
$\log_a(b^c) = c\,\log_a(b)$	$\log_2(x^3) = 3\,\log_2(x)$

Condizioni di esistenza

Base ed argomento devono essere sempre strettamente positivi (b, n > 0) e la base dev'essere diversa da 1.

Cambio di base

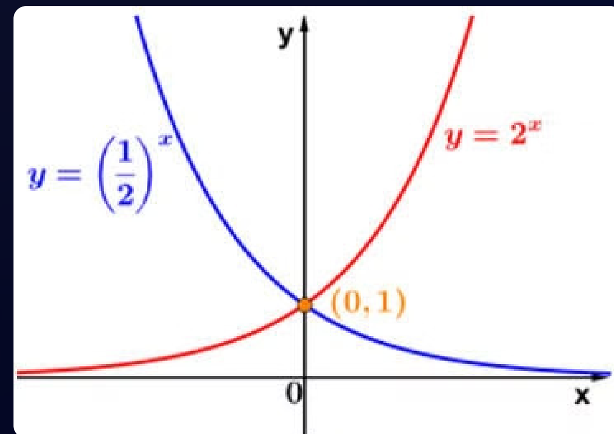
È possibile passare dal logaritmo in una base ad un logaritmo in un'altra base utilizzando la formula a destra.

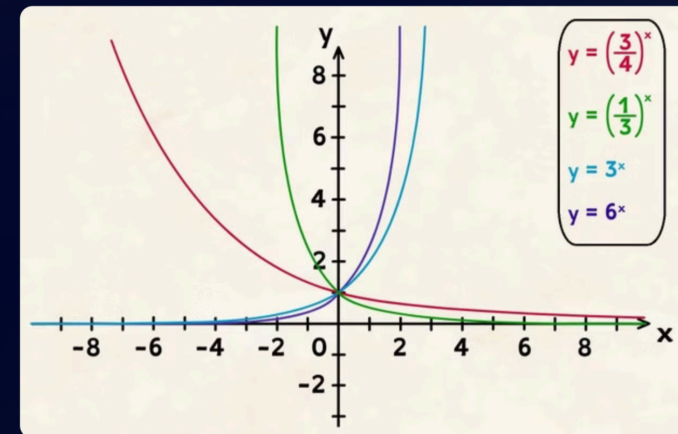
Cambio di base: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Definizione di esponenziale e sue proprietà

Definizione di esponenziale

La funzione esponenziale f(x) = a^x, dove a > 0 e a ≠ 1, descrive una crescita o un decadimento esponenziale. Il numero a è la base dell'esponenziale e rappresenta il fattore di moltiplicazione a ogni incremento unitario di x.





Proprietà degli esponenziali

Le funzioni esponenziali soddisfano importanti proprietà, come il prodotto, il quoziente, la potenza e la somma/differenza. Queste proprietà sono fondamentali per manipolare e risolvere equazioni esponenziali.

1. $a^x \cdot a^y \iff a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} \iff a^{x-y}$
3. $a^x \cdot b^x \iff (ab)^x$
4. $\dfrac{a^x}{b^x} \iff \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
5. $(a^x)^y \iff a^{xy}$
6. $a^{-x} \iff \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

Il Numero di Nepero (e)

Il numero di Nepero (e) è una costante matematica molto importante nelle funzioni esponenziali. Ha un valore approssimativo di 2,71828 ed è spesso utilizzato come base degli esponenziali e logaritmi naturali (ln). Il numero di Nepero compare frequentemente in molti settori della matematica e delle scienze, come il calcolo differenziale, la probabilità e l'analisi complessa.

Equazioni logaritmiche

Le equazioni logaritmiche sono equazioni in cui uno o più termini sono logaritmi. Per risolvere queste equazioni, è necessario applicare le proprietà dei logaritmi e manipolare l'espressione fino a isolare la variabile incognita.

Condizioni di Esistenza

Per poter risolvere una equazione logaritmica, è necessario che l'argomento del logaritmo sia positivo. Pertanto, quando si risolvono equazioni logaritmiche, bisogna verificare le condizioni di esistenza che assicurino che l'argomento sia sempre maggiore di zero. Se queste condizioni non sono soddisfatte, l'equazione logaritmica non ha soluzione.

Metodi di Risoluzione

I principali metodi di risoluzione delle equazioni logaritmiche includono l'applicazione delle proprietà dei logaritmi, il cambio di base e la trasformazione dell'equazione in un'equazione esponenziale equivalente.

Esercizio 1

$$\boxed{\log(4x+5)+\log(x-2)=\log 3+\log(5-x)}$$

(C. E.) $\rightarrow 2 < x < 5$

Secondo passaggio:

$$\log(4x+5)+\log(x-2)=\log 3+\log(5-x)$$

$$\boxed{\log_a(b)+\log_a(c)=\log_a(b\cdot c)}$$

$$\log[(4x+5)(x-2)]=\log[3(5-x)]$$

Terzo passaggio:

$$(4x+5)(x-2)=3(5-x)$$

Equazioni esponenziali

Le equazioni esponenziali sono equazioni in cui uno o più termini sono esponenziali. Queste equazioni possono essere risolte applicando le proprietà degli esponenziali e manipolando l'espressione per isolare la variabile incognita.

Metodi di Risoluzione

I principali metodi di risoluzione delle equazioni esponenziali includono la trasformazione in equazioni logaritmiche equivalenti, l'applicazione delle proprietà degli esponenziali e l'utilizzo di logaritmi per isolare la variabile. Si noti che non vi sono vincoli di condizioni di esistenza in quanto l'esponente o la base di un esponenziale può assumere qualsiasi valore.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 8 \cdot 2^{x-4}$$

$$2^{-3x} = 2^3 \cdot 2^{x-4}$$
$$2^{-3x} = 2^{3+x-4}$$
$$2^{-3x} = 2^{x-1}$$
$$-3x = x - 1$$
$$-4x = -1$$
$$x = \frac{1}{4}$$

Applicazioni

Le equazioni esponenziali sono ampiamente utilizzate in fisica (ad esempio, nella radioattività e nel decadimento di particelle), in chimica (nella cinetica chimica) e in molti altri campi scientifici e tecnologici.

Disequazioni logaritmiche

Le disequazioni logaritmiche sono disequazioni in cui uno o più termini sono logaritmi. La risoluzione di queste disequazioni richiede l'applicazione delle proprietà dei logaritmi e la comprensione del comportamento della funzione logaritmica.

I metodi di risoluzione sono analoghi a quelli visti per le equazioni logaritmiche e per le disequazioni semplici.

Nel caso la base sia compresa tra 0 e 1 (i.e. 0 < b < 1), in sede di applicazione dell'esponenziale equivalente, il segno della disequazione si inverte.

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

$\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$

Se $a > 1$, allora $\log_a x > b \Rightarrow x > a^b$

Se $0 < a < 1$, allora $\log_a x < b \Rightarrow x < a^b$ (comunque l'argomento del logaritmo deve essere positivo, quindi $0 < x < a^b$)

Ovvero se $0 < a < 1$ si cambia il segno alla diseguaglianza

Esempi : $\log_{10} x > -2 \Rightarrow x > \frac{1}{100}$, $\log_2 x \le 3 \Rightarrow 0 < x \le 8$

$\log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x \ge 2 \Rightarrow 0 < x \le \frac{1}{9}$, $\log_{\frac{1}{5}} x < 0 \Rightarrow x > 1$

Disequazioni esponenziali

Le disequazioni esponenziali sono disequazioni in cui uno o più termini sono esponenziali.

La risoluzione di queste disequazioni richiede l'applicazione delle proprietà dei esponenziali e la comprensione del comportamento della funzione esponenziale.

I metodi di risoluzione sono analoghi a quelli visti per le equazioni esponenziali e per le disequazioni semplici.

Nel caso la base sia compresa tra 0 e 1 (i.e. 0 < b < 1), in sede di applicazione del logaritmo equivalente, il segno della disequazione si inverte.

$$3^{2x-1} < 3^{4x^2-x-1}$$

$$2x - 1 < 4x^2 - x - 1$$

$$4x^2 - 3x > 0$$

$$x < 0, \; x > \frac{3}{4}$$

$$\boxed{x < 0, \; x > \tfrac{3}{4}}$$