Algebre semplici e sottodirettamente irriducibili

Francesco Paoli

Cagliari, 23 ottobre 2012

Prodotto sottodiretto

Definition

(Prodotto sottodiretto). Un'algebra $\mathbf{A}$ si dice *prodotto sottodiretto* di una famiglia di algebre simili $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ se valgono le condizioni:

1. $\mathbf{A} \leq \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$;
2. $\pi_i(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_i$ per ogni i.

Un'immersione $\alpha : \mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ è sottodiretta se $\alpha(\mathbf{A})$ è prodotto sottodiretto degli $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$.

Graficamente...

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{A} & \overset{\alpha}{\rightarrow} & \displaystyle\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \\
\text{sur.} & \searrow & \downarrow \pi_i \\
 & & \mathbf{A}_i
\end{array}
$$

Un'importante connessione

Lemma

Se per tutti gli $i \in I$, $\theta_i \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$ e $\bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta$, allora l'omomorfismo naturale $\nu : \mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}/\theta_i$ definito da

$$\nu(a)_i = a/\theta_i$$

è un'immersione sottodiretta.

Proof.

Sia $\nu_i = \pi_i \circ \nu$. Poiché $\bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta$ e $\ker(\nu_i) = \theta_i$, ν è un'immersione.

Poiché ogni ν_i è suriettivo, ν è un'immersione sottodiretta. $\square$

Algebre sottodirettamente irriducibili

Definition

Un'algebra $\mathbf{A}$ è *sottodirettamente irriducibile* se pèr ogni immersione sottodiretta $\alpha : \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$, c'è un i tale che $\pi_i \circ \alpha : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ è un isomorfismo.

Algebre sottodirettamente irriducibili: una caratterizzazione (1)

Theorem

Un'algebra non banale $\mathbf{A}$ *è sottodirettamente irriducibile sse* $\mathrm{Con}\mathbf{A} - \{\Delta\}$ *ha un elemento minimo.*

Proof.

$\Rightarrow$ Se $\mathrm{Con}\mathbf{A} - \{\Delta\}$ non ha un elemento minimo, allora $\bigcap(\mathrm{Con}\mathbf{A} - \{\Delta\}) = \Delta$. Consideriamo l'omomorfismo naturale

$$\nu : \mathbf{A} \to \prod_{\theta \in \mathrm{Con}\mathbf{A} - \{\Delta\}} \mathbf{A}/\theta$$

che in virtù di questo fatto è un'immersione sottodiretta. Tuttavia, per $\theta \in \mathrm{Con}\mathbf{A} - \{\Delta\}$, $\pi_i \circ \nu$ non è iniettiva (esiste almeno una classe di congruenza con due o più elementi). Quindi $\mathbf{A}$ non è sottodirettamente irriducibile. □

Algebre sottodirettamente irriducibili: una caratterizzazione (2)

Proof.

$\Leftarrow$ Sia θ l'elemento minimo di $\mathrm{Con}\mathbf{A} - \{\Delta\}$. Sia $a\theta b$, $a \neq b$. Se $\alpha : \mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ è un'immersione sottodiretta, pertanto iniettiva, $\alpha(a) \neq \alpha(b)$, il che significa che per qualche $i \in I$, $\alpha(a)_i \neq \alpha(b)_i$. In altre parole, $\pi_i \circ \alpha(a) \neq \pi_i \circ \alpha(b)$. Quindi $(a, b) \notin \ker(\pi_i \circ \alpha)$, da cui $\theta \subsetneq \ker(\pi_i \circ \alpha)$. Poiché θ era il minimo di $\mathrm{Con}\mathbf{A} - \{\Delta\}$, ne segue $\ker(\pi_i \circ \alpha) = \Delta$, ossia $\pi_i \circ \alpha$ è un isomorfismo. Dunque $\mathbf{A}$ è sottodirettamente irriducibile. $\square$

L'elemento minimo di una s.i. si chiama *monolite* e si denota con μ.

Algebre sottodirettamente irriducibili e direttamente indecomponibili

Theorem

Ogni algebra s.i. è d.i; il viceversa non vale.

Proof.

Sappiamo che un'algebra è d.i. sse le sue uniche congruenze fattore sono Δ e ∇. Ma se $\mathbf{A}$ è s.i., chiaramente Δ e ∇ sono congruenze fattore ($\Delta^* = \nabla, \nabla^* = \Delta$). Sono anche le uniche: per $\theta > \Delta$, $\theta \wedge \theta^* = \Delta$ implica $\theta^* = \Delta$, da cui $\theta \vee \theta^* = \nabla$ implica $\theta = \nabla$.
Il reticolo totalmente ordinato di 3 elementi è un esempio di algebra d.i. che non è s.i. □

Teorema di rappresentazione sottodiretta

Theorem

Ogni algebra $\mathbf{A}$ *è prodotto sottodiretto di algebre s.i.*

Proof.

Siano $a, b \in A$ tali che $a \neq b$. Usando il Lemma di Zorn, si dimostra che esiste una congruenza $\theta_{a,b}$ massimale rispetto alla proprietà di non contenere (a, b). Allora

$$\theta_{a,b} \vee \theta(a, b)$$

è la più piccola congruenza strettamente maggiore di $\theta_{a,b}$. Diamo un'occhiata a $\mathrm{Con}\mathbf{A}/\theta_{a,b}$. Il suo reticolo delle congruenze è isomorfo all'intervallo $[\theta_{a,b}, \nabla]$ in $\mathrm{Con}\mathbf{A}$; ne segue che $\mathbf{A}/\theta_{a,b}$ ha un monolite che è $\theta_{a,b} \vee \theta(a, b)$, ed è quindi s.i. Poiché $\bigcap \{\theta_{a,b} : a \neq b\} = \Delta$, si applica il Lemma e otteniamo che $\mathbf{A}$ è sottodirettamente immergibile nel prodotto

$$\prod_{a \neq b} \mathbf{A}/\theta_{a,b}.$$