Rudimenti di algebra universale

Francesco Paoli

Cagliari, 16 ottobre 2012

Cos'è un'algebra?

Prerequisiti:

- Potenza cartesiana n-esima di un insieme A:
  $A^n = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in A\}$.
- Operazione n-aria su A: funzione $f : A^n \to A$ (unarie, binarie, ..., 0-arie!)
- Operazione finitaria su A: operazione n-aria su A, per un qualche n.

Definition

(Tipo). Un *tipo di algebre* è un insieme $\mathcal{L}$ di simboli di operazione, ciascuno dei quali denota un'operazione finitaria.

Convenzione pratica: se $\mathcal{L} = \{f_1, ..., f_k\}$, dove ciascun f_i ha arietà n_i, identificheremo spesso $\mathcal{L}$ con una delle sequenze di numeri naturali $(n_1, ..., n_k)$ (in genere scelta in modo che $n_i \geq n_j$ per $i \leq j$).

Cos'è un'algebra?

Definition

(Algebra). Un'*algebra* di tipo $\mathcal{L}$ è una coppia ordinata $\mathbf{A} = (A, F)$, dove:

1. A è un insieme non vuoto (detto *universo* di $\mathbf{A}$);
2. F è un insieme di operazioni finitarie su A t.c. per ogni simbolo di operazione n-ario $f \in \mathcal{L}$ esiste una corrispondente operazione n-aria $f^{\mathbf{A}} \in F$.

Gli elementi di F si chiamano *operazioni fondamentali* di $\mathbf{A}$. Diciamo anche che il simbolo di operazione f *realizza* l'operazione $f^{\mathbf{A}}$.
Convenzione pratica: se $\mathcal{L} = \{f_1, ..., f_k\}$, in genere (A, F) viene scritto $(A, f_1^{\mathbf{A}}, ..., f_k^{\mathbf{A}})$. Gli apici vengono omessi se non c'è pericolo di ambiguità.

Alcune importanti distinzioni

Piano linguistico	**Piano ontologico**
simbolo di operazione f	operazione $f^{\mathbf{A}}$
costante	elemento privilegiato
variabile	elemento

Esempi

Example

(Reticoli) Un *reticolo* è un'algebra $\mathbf{L} = (L, \wedge^{\mathbf{L}}, \vee^{\mathbf{L}})$ di tipo $(2, 2)$.

- Il suo universo è L;
- le sue operazioni fondamentali sono $\wedge^{\mathbf{L}}$e $\vee^{\mathbf{L}}$.

Example

(Algebre di Boole) Un'*algebra di Boole* è un'algebra $\mathbf{B} = (B, \wedge^{\mathbf{B}}, \vee^{\mathbf{B}}, \neg^{\mathbf{B}}, 0^{\mathbf{B}}, 1^{\mathbf{B}})$ di tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$.

Example

(Gruppi) Un *gruppo* è un'algebra $\mathbf{G} = (G, +^{\mathbf{G}}, -^{\mathbf{G}}, 0^{\mathbf{G}})$ di tipo $(2, 1, 0)$.

Un non-esempio

Example

(Spazi vettoriali) Uno *spazio vettoriale* è una struttura $\mathbf{V} = (V, \mathbf{K}, +^{\mathbf{V}}, -^{\mathbf{V}}, 0^{\mathbf{V}}, \cdot)$ tale che:

1. Il *ridotto* $(V, +^{\mathbf{V}}, -^{\mathbf{V}}, 0^{\mathbf{V}})$ è un gruppo abeliano;
2. $\mathbf{K}$ è un campo;
3. $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ è un'operazione che soddisfa $1 \cdot v = v$, $a \cdot (v +^{\mathbf{V}} w) = a \cdot v +^{\mathbf{V}} a \cdot w$ e $(a +^{\mathbf{K}} b) \cdot v = a \cdot v +^{\mathbf{V}} b \cdot v$ per ogni $a, b \in K$ e per ogni $v, w \in V$.

Omomorfismo

Algebre *simili*: hanno lo stesso tipo.

Definition

(omomorfismo). Siano **A** e **B** algebre simili di tipo $\mathcal{L}$. Una funzione $\alpha : A \longrightarrow B$ è un omomorfismo da **A** a **B** se:

1. è una funzione da A a B;
2. per ogni $f \in \mathcal{L}$, supposto di arietà n, e per ogni $a_1, ..., a_n \in A$,

$$\alpha\left(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)\right) = f^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), ..., \alpha(a_n))$$

Se α è iniettiva e suriettiva, si dice *isomorfismo*. Se c'è un isomorfismo α da **A** a **B**, allora diciamo che **A** e **B** sono *isomorfe*.
Se lasciamo cadere la condizione che α sia suriettiva, allora si dice che è un'*immersione*.

Sottalgebra

Definition

(Sottalgebra). Siano **A** e **B** algebre simili di tipo $\mathcal{L}$. **B** è una sottalgebra di **A** se:

1. $B \subseteq A$;
2. ogni operazione fondamentale $f^{\mathbf{B}}$ di **B** è la restrizione a B della corrispondente operazione fondamentale $f^{\mathbf{A}}$ di **A**.

Se **B** è una sottalgebra di **A**, scriviamo semplicemente $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$. $B \subseteq A$ è un *sottouniverso* di **A** se è chiuso rispetto alle operazioni fondamentali di **A**.

Lemma

Se $\alpha : A \to B$ è un'immersione di **A** *in* **B**, *allora $\alpha(A)$ è un sottouniverso di* **B**.

Il reticolo dei sottouniversi di un'algebra

Definition

(Reticolo dei sottouniversi). Sia $\mathbf{A}$ un'algebra, e sia $Sub(\mathbf{A})$ l'insieme dei sottouniversi di $\mathbf{A}$. Definiamo $\mathbf{Sub}(\mathbf{A}) = (Sub(\mathbf{A}), \cap, \vee)$, dove

$$\begin{aligned} B \vee C &= Sg(B \cup C) \\ Sg(X) &= \bigcap \{B : X \subseteq B \text{ e } B \in Sub(\mathbf{A})\} \end{aligned}$$