



Università degli Studi di Cagliari

UNICA
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2024/25

Structural Stability and Limit Analysis of Structures

(Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

> **Lezione 5**

Euler's beam. Linear theory
(La trave di Eulero. Teoria linearizzata)

Victor Eremeev

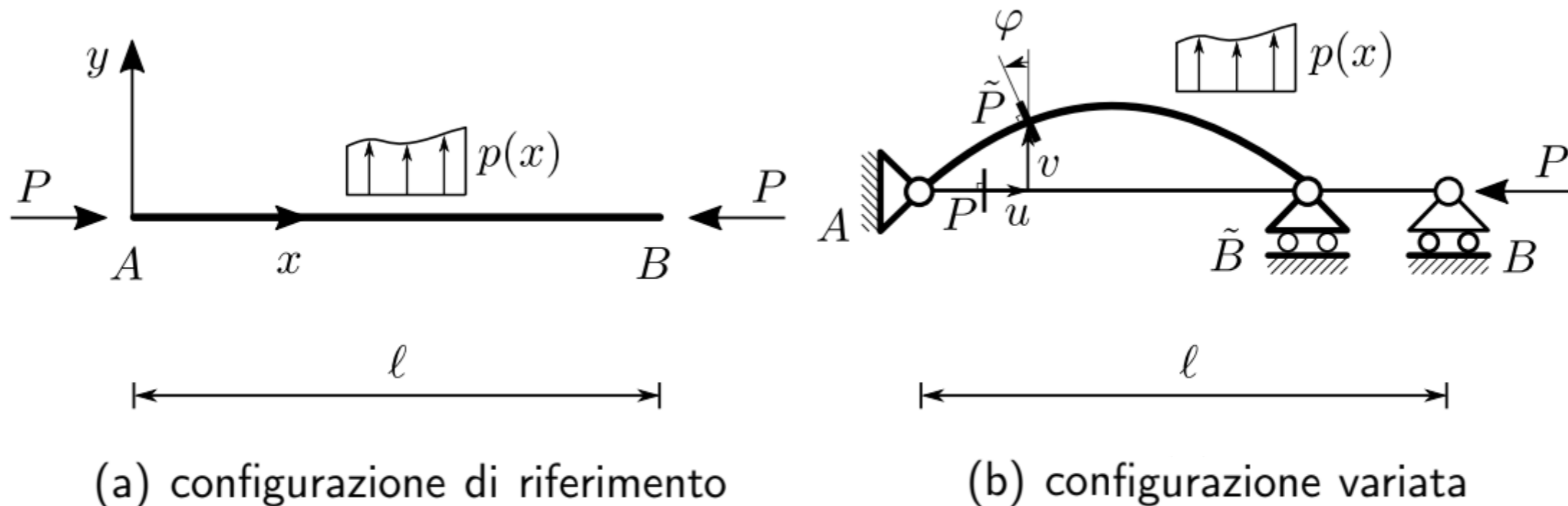
victor.eremeev@unica.it

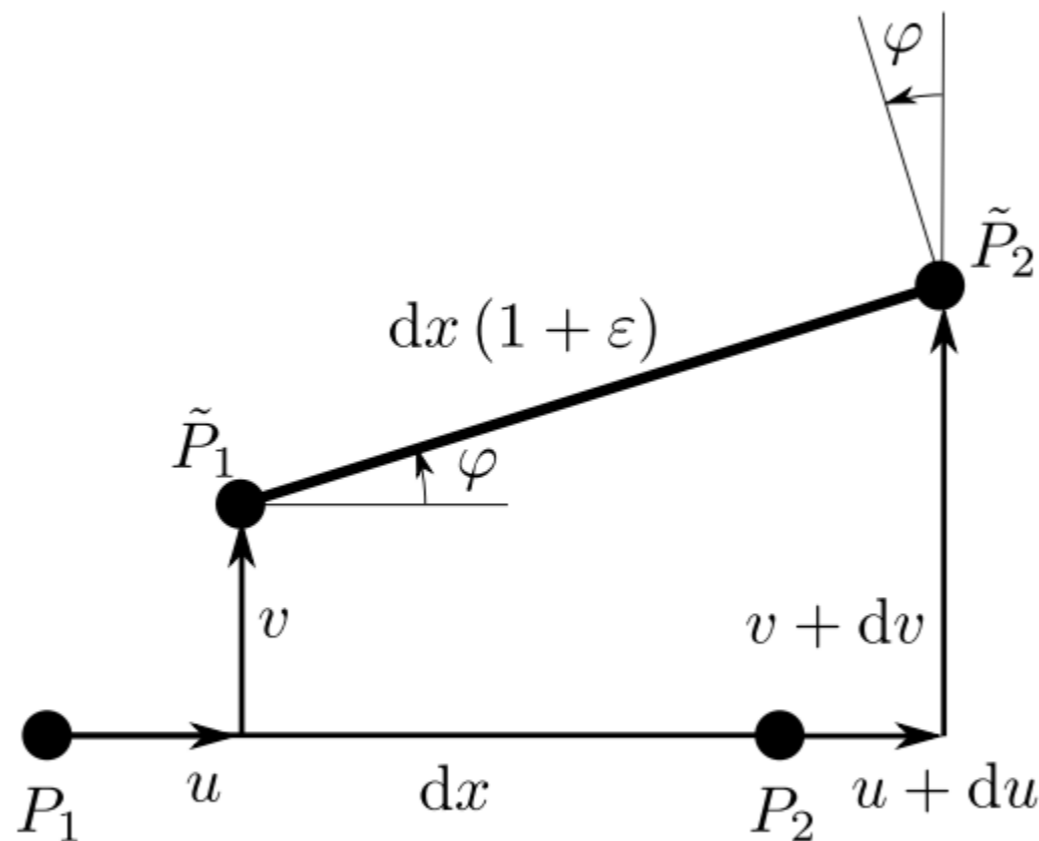
Il modello di trave estensibile

Si sviluppa il modello linearizzato piano di trave *estensibile ed indeformabile a taglio*, facendo riferimento alla teoria dei corpi elastici presollecitati

Tale modello è anche detto *trave di Eulero estensibile*.

Si consideri una trave prismatica rettilinea, di estremi A, B , indeformabile a taglio ed immersa nello spazio 2D, uniformemente compressa da una forza assiale di intensità P , e sollecitata da carichi distribuiti di intensità $p(x)$, normali alla linea d'asse. Tale oggetto è modellato come *continuo monodimensionale polare*. Si assume che nella configurazione presollecitata, confusa con quella naturale, la trave giaccia sul segmento $x \in (0, \ell)$, dove ℓ è la lunghezza della trave





(c) estensione di un elemento infinitesimo di trave

In accordo al modello monodimensionale polare, ogni punto materiale P è dotato di orientazione. Lo spostamento del punto descrive la traslazione della linea d'asse della trave, e la rotazione del punto quella della sezione trasversale del modello 2D. Il generico cambiamento di configurazione è descritto dal campo di spostamento $\mathbf{u} := (u(x), v(x), \varphi(x))^T$, in cui u , v sono rispettivamente la componente longitudinale e trasversale della traslazione e φ la rotazione (Figura). Le tre componenti di spostamento, tuttavia, non sono indipendenti, per il vincolo interno di indeformabilità a taglio (che assicura la conservazione dell'ortogonalità tra sezioni normali e linea d'asse); questo implica l'uguaglianza fra la rotazione della linea d'asse e la rotazione della sezione.

Per esplicitare il vincolo interno, si osserva che

$$dv = (dx + du) \tan \varphi$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{v'}{1 + u'} \right)$$

in cui l'apice indica derivazione rispetto ad x . Questa permette di ridurre i gradi di libertà di ogni punto a due, e precisamente ad u, v (variabili 'master', più comunemente usate).

Le grandezze di deformazione della trave estensibile sono l'*estensione unitaria* $\varepsilon := \frac{d\tilde{x} - dx}{dx}$ e la *curvatura flessionale* $\kappa := \varphi'$. Riguardo la prima, poiché risulta

$$d\tilde{x}^2 = dx^2 (1 + \varepsilon)^2 = (dx + du)^2 + dv^2$$

$$\varepsilon = \sqrt{(1 + u')^2 + v'^2} - 1$$

$$\kappa = \frac{(1 + u') v'' - u'' v'}{(1 + u')^2 + v'^2}$$

Tuttavia, poiché in questa sede si è interessati ad un'analisi linearizzata, è sufficiente assumere deformazioni sviluppate in serie, al secondo ordine per l'estensione ed al primo ordine per la curvatura, ovvero:

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}v'^2 + \dots$$

$$\kappa = v'' + \dots$$

Si hanno dunque le deformazioni lineari $\varepsilon_1 := u'$ e $\kappa_1 := v''$ e la deformazione quadratica $\varepsilon_2 := \frac{1}{2}v'^2$.

Il legame costitutivo

Le sollecitazioni (attive) della trave estensibile sono lo sforzo normale $N(x)$ ed il momento flettente $M(x)$ (mentre il taglio $T(x)$ è reattivo). Assunto un legame elastico lineare disaccoppiato, si ha:

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{pmatrix}$$

dove $N_0 = -P$ è lo sforzo normale di presollecitazione ed EA , EI sono rispettivamente le rigidezze assiale e flessionale della trave.

L'energia potenziale totale

$$\Pi = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EA \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} EI \kappa_1^2 + N_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right] dx + P u(\ell) - \int_0^\ell p v dx$$

Poiché lo stato presollecitato è equilibrato, per il Teorema dei Lavori Virtuali è:

$$\int_0^\ell N_0 \varepsilon_1 dx = -P u(\ell)$$

cosicché l'energia Π assume la forma

$$\Pi = \int_0^\ell \left(\frac{1}{2} EA \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} EI \kappa_1^2 + N_0 \varepsilon_2 \right) dx - \int_0^\ell p v dx$$

$$\varepsilon_1 := u' \quad \kappa_1 := v'' \quad \varepsilon_2 := \frac{1}{2} v'^2$$

Le equazioni di equilibrio e le condizioni al contorno

La variazione prima dell'EPT si scrive:

$$\delta \Pi = \int_0^\ell (EAu' \delta u' + EIv'' \delta v'' + N_0 v' \delta v' - p \delta v) dx$$

Dopo integrazione per parti, uguagliando a zero $\forall (\delta u, \delta v)$, si ha:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_0^\ell [-EAu'' \delta u + (EIv'''' - N_0 v'' - p) \delta v] dx + [EAu' \delta u]_0^\ell + [EIv'' \delta v']_0^\ell \\ + [(-EIv''' + N_0 v') \delta v]_0^\ell = 0, \quad \forall (\delta u, \delta v) \end{aligned}$$



$$N_0 = -P$$

$$EAu'' = 0$$

$$[EAu' \delta u]_0^\ell = 0$$

$$EIv'''' + Pv'' = p$$

$$[(-EIv''' - Pv') \delta v]_0^\ell = 0$$

$$[EIv'' \delta v']_0^\ell = 0$$

Poiché il problema in u è disaccoppiato da quello in v , ed inoltre è omogeneo e non singolare, esso ammette la sola soluzione banale $u = 0, \forall x$. Il modo critico di buckling è dunque *inestensionale*.

Il carico critico di travi semplici

L'integrale generale si scrive

$$v = c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x) + c_3 x + c_4$$

dove c_i ($i = 1, \dots, 4$) sono costanti arbitrarie ed inoltre:

$$\beta := \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

è il *numero d'onda*, che costituisce l'autovalore del problema differenziale ai limiti.

Le condizioni al contorno sono di due tipi:

- *geometriche*: (a) spostamento $v = 0$ in cerniera e carrello, (b) rotazione $v' = 0$ all'incastro o glifo (scorrevole longitudinalmente, per consentire l'applicazione della presollecitazione, o trasversalmente);
- *meccaniche*: (a) momento flettente $M(x) = EI v''(x) = 0$ in cerniera e carrello, (b) taglio $T(x) = -EI v'''(x) = 0$ nel glifo trasversale, (c) componente trasversale della forza interna, $V(x) = T(x) - P v'(x) = 0$, nell'estremo libero.

Carichi critici di travi semplici e lunghezze di libera inflessione.

	Vincolo	Cond. al cont.	P_c	l_0
(a)		$v(0) = M(0) = 0$ $v(l) = M(l) = 0$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	l
(b)		$v(0) = v'(0) = 0$ $M(l) = V(l) = 0$	$\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$	$2l$
(c)		$v(0) = v'(0) = 0$ $v(l) = v'(l) = 0$	$\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$	$l/2$
(d)		$v(0) = v'(0) = 0$ $v(l) = M(l) = 0$	$2.05 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$0.7l$
(e)		$v'(0) = -T(0) = 0$ $v(l) = M(l) = 0$	$\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$	$2l$
(f)		$v'(0) = -T(0) = 0$ $v(l) = v'(l) = 0$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	l

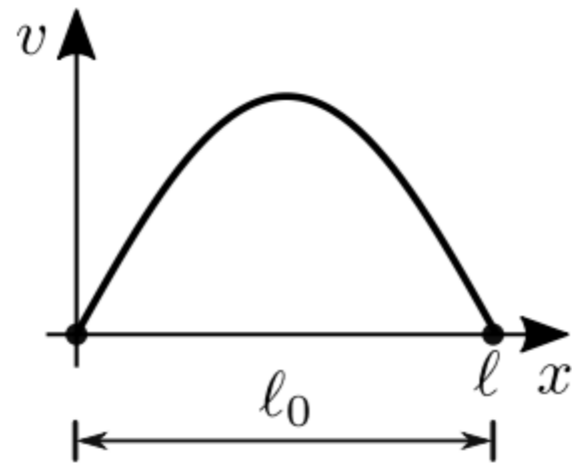
La lunghezza di libera inflessione

Dai risultati in **Tabella** si osserva che carichi critici di travi semplici possono tutti essere riscritti nella forma:

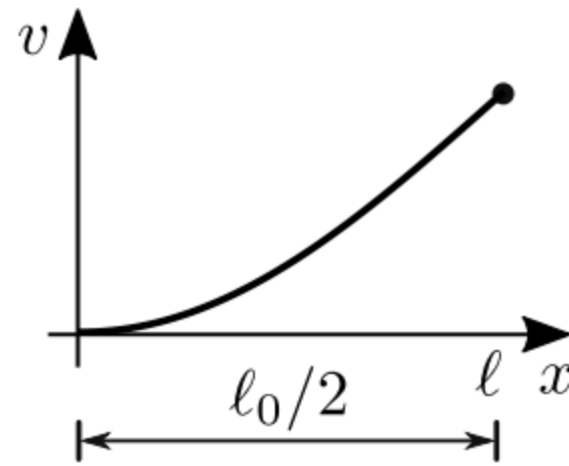
$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}$$

in cui si è introdotta un'opportuna lunghezza ℓ_0 , detta *lunghezza di libera inflessione*. Il suo significato geometrico emerge dalla forma dei modi in **Figura**, e precisamente: ℓ_0 è la distanza tra due punti di flesso della deformata critica. Questo risultato si giustifica con il fatto che una trave semplice di luce ℓ , che sbanda con una deformata che esibisce punti di flesso a distanza ℓ_0 , possiede lo stesso carico critico della trave appoggiata di luce ℓ_0 (la cui deformata critica ha, infatti, punti di flesso alle estremità).

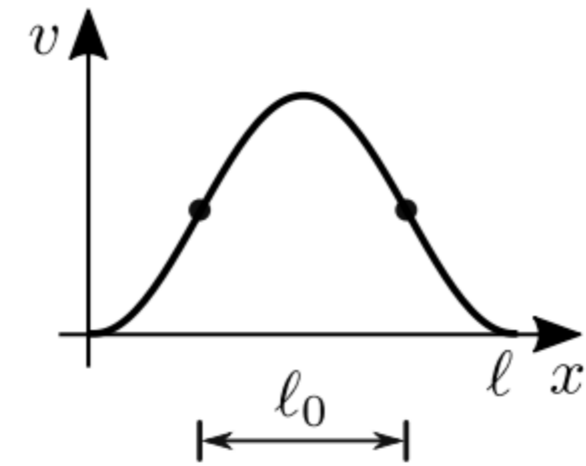
Modi critici delle travi semplici



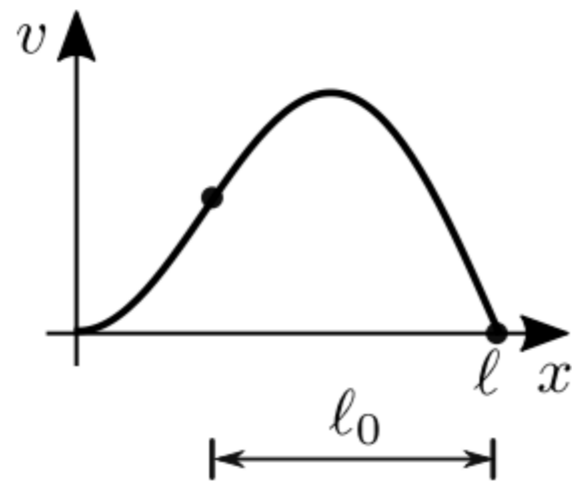
(a)



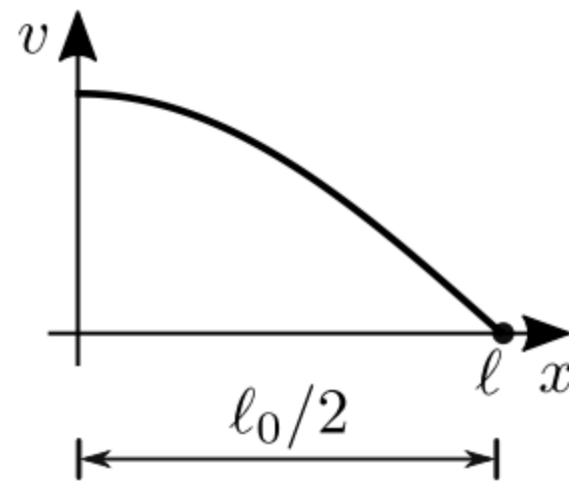
(b)



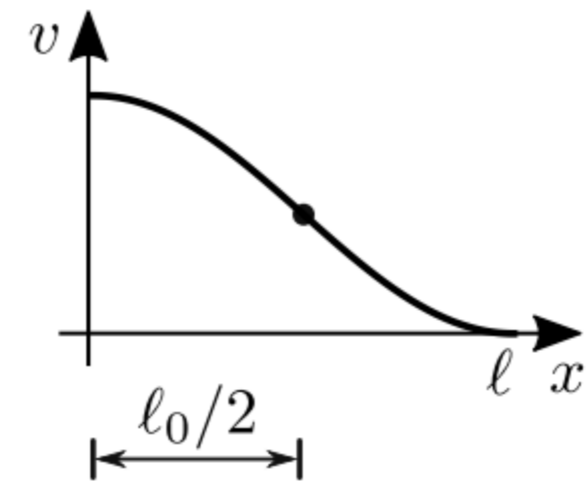
(c)



(d)



(e)



(f)

La tensione critica

È utile valutare la *tensione normale critica* $\sigma_c := \frac{P_c}{A}$, con A l'area della sezione, che si verifica nella trave all'atto (più precisamente, immediatamente prima) della biforcazione. Tenuto conto si ha:

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E \rho^2}{\ell_0^2}$$

dove $\rho := \sqrt{\frac{I}{A}}$ è il raggio giratore d'inerzia della sezione. La precedente si scrive anche:

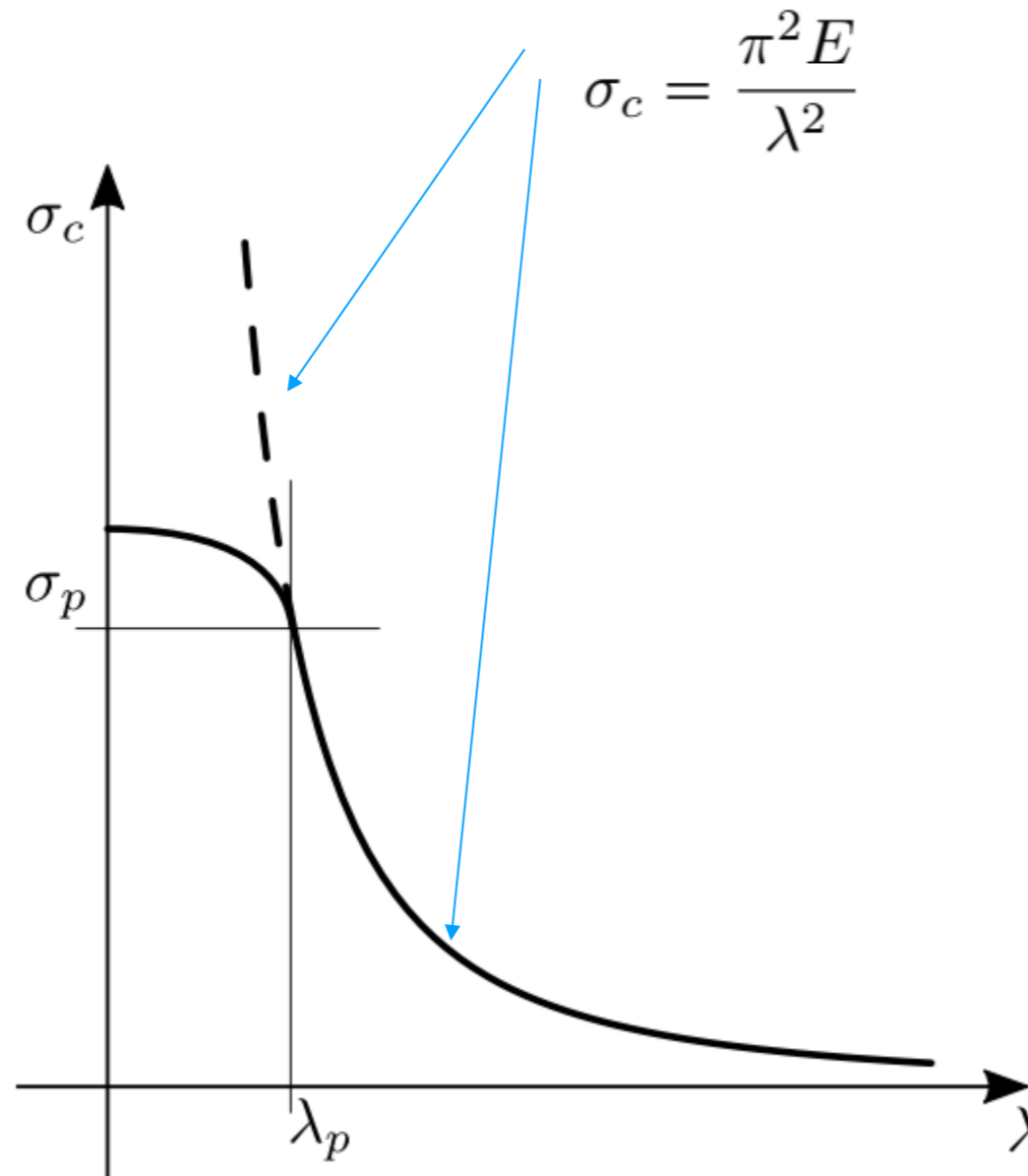
$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

dove si è introdotto il rapporto adimensionale:

$$\lambda := \frac{\ell_0}{\rho}$$

detto *snellezza* della trave. Esso riassume le caratteristiche geometriche della struttura: proprietà della sezione A , I , lunghezza della trave ℓ e condizioni di vincolo.

curva di *Eulero*



Tensione critica euleriana in funzione della snellezza; σ_p tensione limite di proporzionalità.