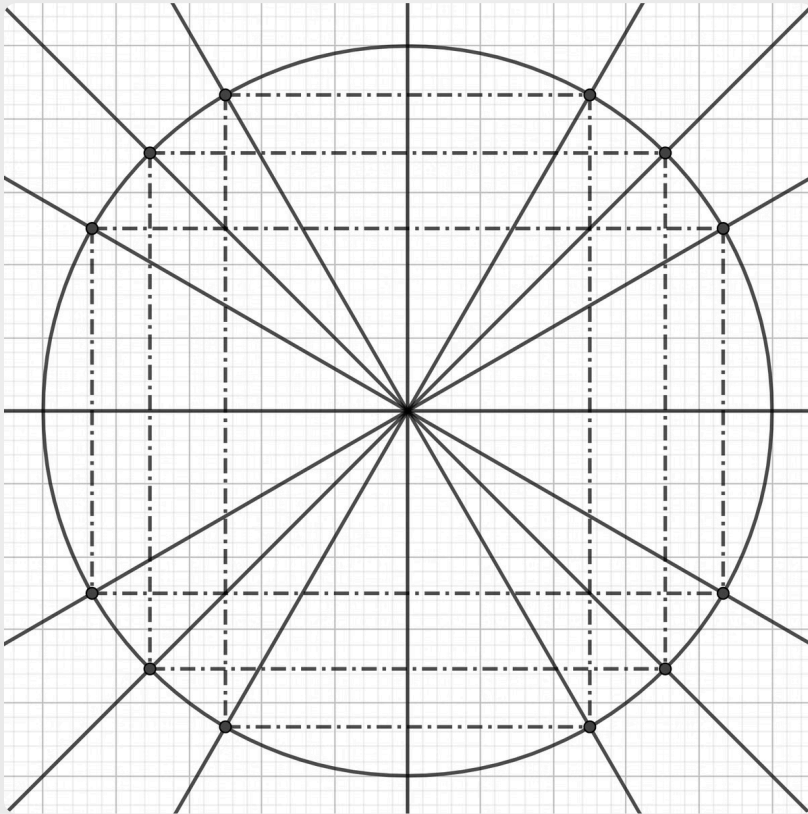


# TRIGONOMETRIA

La goniometria è una branca della matematica che studia le relazioni tra gli angoli e le funzioni trigonometriche. L'elemento fondamentale su cui essa trova perno è la circonferenza goniometrica, che rappresenta graficamente le relazioni tra gli angoli e le funzioni goniometriche. Questa circonferenza unitaria (i.e. con raggio pari a 1) consente di definire in modo preciso i valori delle funzioni goniometriche di un angolo qualsiasi.

Queste funzioni risultano inoltre di enorme utilità quando applicate nella risoluzione dei triangoli, si parla allora di *trigonometria*.

La trigonometria gioca un ruolo cruciale nello studio della fisica: rappresenta la base dell'analisi vettoriale, un aspetto fondamentale ed imprescindibile su cui si basa tutta la fisica. Sulla goniometria e trigonometria, inoltre, si basano molti fenomeni fisici fondamentali come, ad esempio, il moto dei corpi.



# Radiani e Funzioni goniometriche

## Radiani

I radianti sono l'unità di misura degli angoli utilizzata nella goniometria. Sono definiti come il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio della **circonferenza goniometrica**.

In particolare, i radianti rappresentano la misura dell'arco tracciato dall'angolo sulla circonferenza di raggio unitario: se un angolo di  $360^\circ$  traccia un arco pari alla lunghezza dell'intera circonferenza,  $c = 2\pi$ , a  $180^\circ$  corrisponderà un arco lungo  $\pi$ , a  $90^\circ$   $\pi/2$  e così via.

La circonferenza goniometrica viene suddivisa in quattro quadranti (I, II, III, e IV) come indicato nella figura a lato.

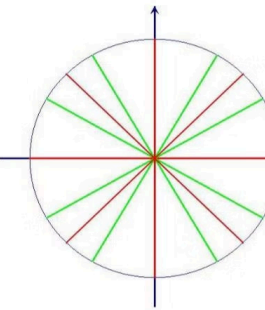
## Funzioni goniometriche

Le funzioni goniometriche principali sono seno, coseno e tangente. Queste funzioni, vengono definite come da figura a lato. Il valore di seno e coseno varia da -1 a 1, mentre la tangente da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

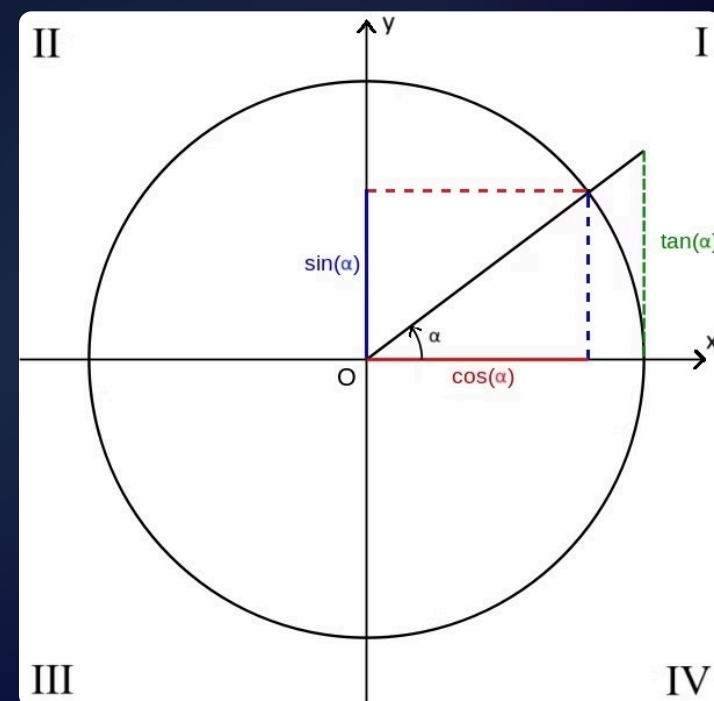
Inoltre, vigono le seguenti **relazioni fondamentali della goniometria**:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

**Conversione gradi-radiani**



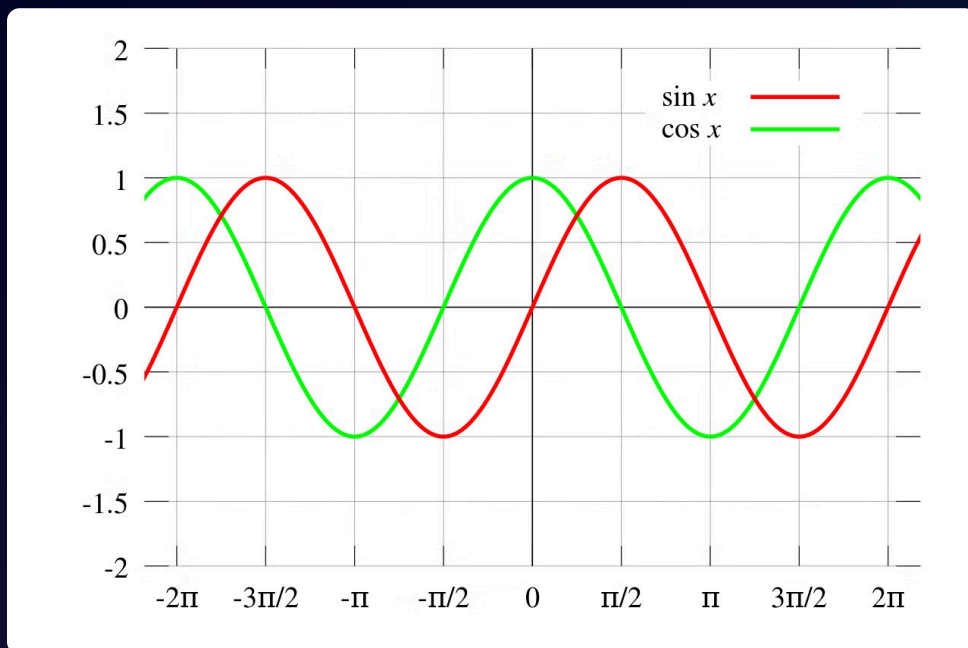
gradi	Rad.	gradi	Rad.
$0^\circ$	0	$180^\circ$	$\pi$
$30^\circ$	$\pi/6$	$210^\circ$	$7\pi/6$
$45^\circ$	$\pi/4$	$225^\circ$	$5\pi/4$
$60^\circ$	$\pi/3$	$240^\circ$	$4\pi/3$
$90^\circ$	$\pi/2$	$270^\circ$	$3\pi/2$
$120^\circ$	$2\pi/3$	$300^\circ$	$5\pi/3$
$135^\circ$	$3\pi/4$	$315^\circ$	$7\pi/4$
$150^\circ$	$5\pi/6$	$330^\circ$	$11\pi/6$



# Grafico delle Funzioni Goniometriche

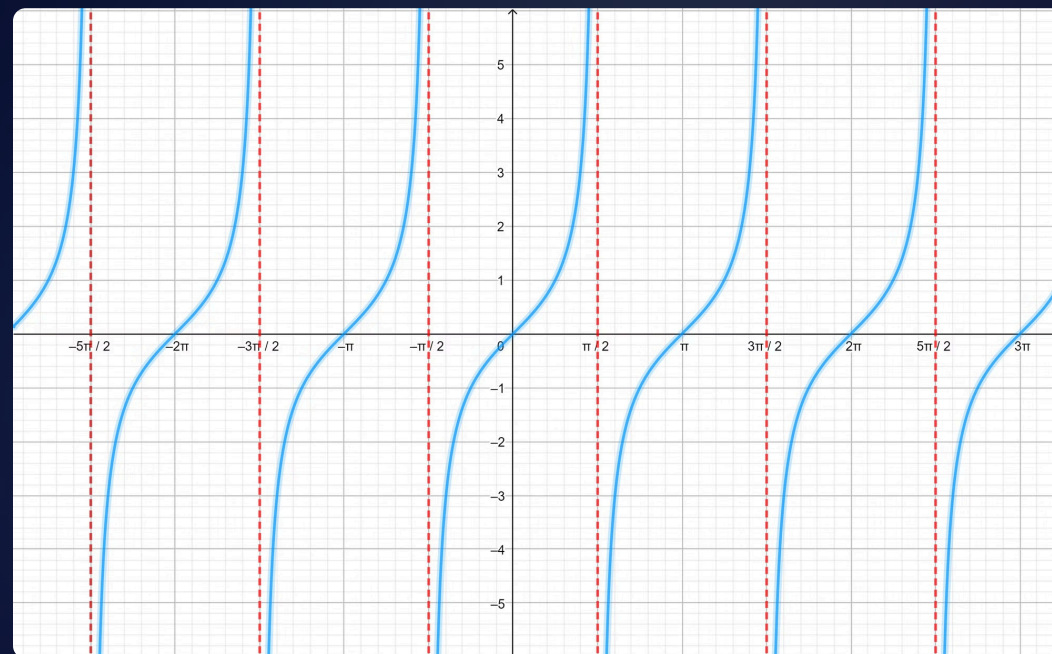
## Seno e Coseno

Le funzioni seno e coseno sono periodiche con periodo  $2\pi$  e sfasate di  $\pi/2$ . Il grafico del seno è una curva sinusoidale che oscilla tra -1 e 1, mentre il grafico del coseno è una curva cosinusoidale che oscilla tra 1 e -1.



## Tangente

La funzione tangente è periodica con periodo  $\pi$ . Il suo grafico è una curva che interseca l'asse x in multipli dispari di  $\pi/2$ , dove presenta asintoti verticali. Essendo, per la seconda relazione fondamentale, il rapporto tra seno e coseno, il suo segno è dato dal segno di questo rapporto, quindi è positiva nel primo e terzo quadrante e negativa altrove.



# Archi Associati e Angoli Noti

1

## Angoli Positivi e Negativi

Gli angoli possono essere positivi o negativi a seconda del verso di rotazione sulla circonferenza goniometrica. Conoscere il segno dell'angolo è essenziale per determinare correttamente i valori delle funzioni goniometriche.

2

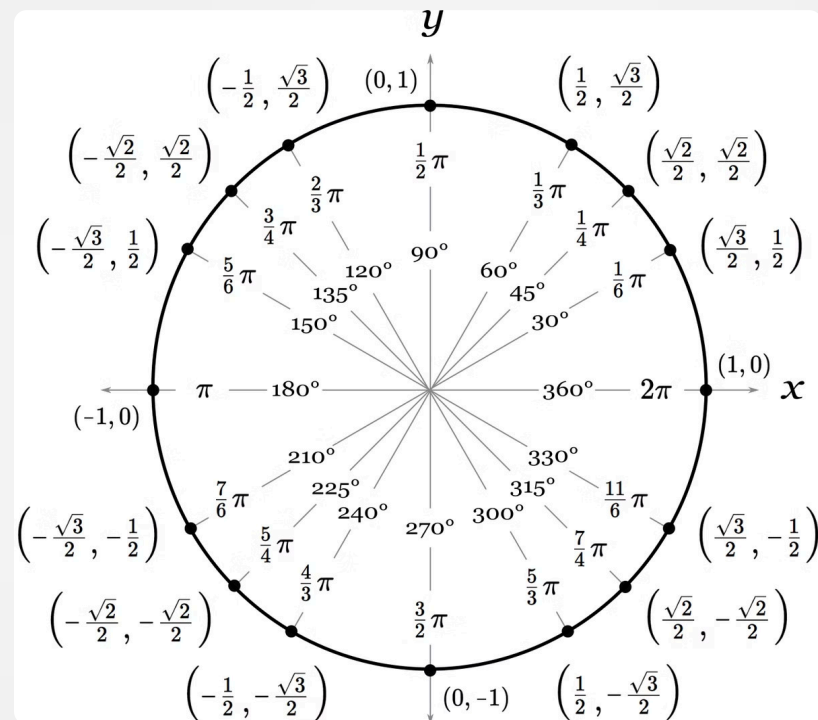
## Archi Associati

Esistono relazioni tra angoli diversi che portano agli stessi valori delle funzioni goniometriche. Comprendere queste relazioni consente di semplificare l'analisi di espressioni e equazioni goniometriche.

3

## Angoli Notevoli

Alcuni angoli particolari, come  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ , hanno valori noti delle funzioni goniometriche. Conoscere questi valori facilita è fondamentale per la risoluzione dei problemi matematici.



# Espressioni Goniometriche, simmetrie e funzioni inverse

Le espressioni goniometriche sono espressioni matematiche nelle quali compaiono gli operatori goniometrici. Queste vanno semplificate utilizzando le relazioni goniometriche ed utilizzando le simmetrie ottenibili dallo studio della circonferenza goniometrica e le comuni regole dell'aritmetica e dell'algebra.

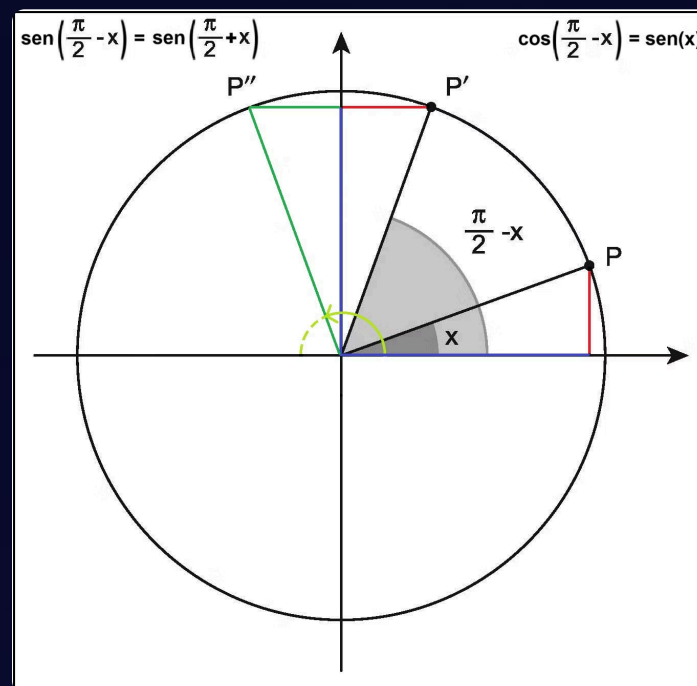
## Arcoseno, Arcocoseno e Arcotangente

Le funzioni inverse del seno, coseno e tangente sono rispettivamente l'arcoseno, l'arcocoseno e l'arcotangente. Queste funzioni inverse consentono di determinare l'angolo (o arco associato) a partire dal valore della funzione trigonometrica corrispondente.

- $y = \sin x$      $x = \arcsin y$
- $y = \cos x$      $x = \arccos y$
- $y = \tan x$      $x = \arctan y$

## Simmetrie

Si possono ricavare le simmetrie tra le funzioni goniometriche mediante lo studio della circonferenza goniometrica:



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

# Esempio

Risolvere la seguente espressione

$$\operatorname{tg}135^\circ(\operatorname{sen}240^\circ - \operatorname{sen}60^\circ) + \operatorname{tg}240^\circ(\operatorname{sen}210^\circ - \operatorname{sen}30^\circ)$$

Occorre innanzitutto ridurre tutti gli angoli ad angoli del primo quadrante grazie alle formule degli angoli associati. Per questo,  $135^\circ$  si trasforma nella differenza tra  $180^\circ$  e  $45^\circ$ ,  $240^\circ$  si scrive come somma tra  $180^\circ$  e  $60^\circ$  mentre  $210^\circ$  è inteso come somma tra  $180^\circ$  e  $30^\circ$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ)[\operatorname{sen}(180^\circ + 60^\circ) - \operatorname{sen}60^\circ] + \operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ)[\operatorname{sen}(180^\circ + 30^\circ) - \operatorname{sen}30^\circ]$$

Ora si applicano le formule degli angoli associati

$$-\operatorname{tg}45^\circ(-\operatorname{sen}60^\circ - \operatorname{sen}60^\circ) + \operatorname{tg}60^\circ(-\operatorname{sen}30^\circ - \operatorname{sen}30^\circ)$$

A questo punto, basta sostituire i valori noti ed effettuare i calcoli

$$\begin{aligned} & -1 \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \cdot \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \\ & = -\left( \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \cdot \left( \frac{-1 - 1}{2} \right) = \\ & = -\left( \frac{-2\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \cdot \left( \frac{-2}{2} \right) = \\ & +\sqrt{3} - \sqrt{3} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

# Esercitazione

1. Risolvere la seguente espressione goniometrica:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} - \cos(\pi) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

2. Risolvere la seguente espressione goniometrica:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) - 4 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

3. Ridurre la seguente espressione goniometrica:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2\pi - \alpha) + 2 \cos(\pi + \alpha) - 2 \sin(\pi - \alpha) + 3 \cos(-\alpha)$$

# Equazioni e Disequazioni Goniometriche

## Equazioni Goniometriche

Le equazioni goniometriche richiedono l'applicazione di tecniche specifiche, come l'uso delle identità fondamentali e l'utilizzo delle relazioni di simmetria, per isolare la variabile trigonometrica e trovare le soluzioni mediante l'individuazione degli archi associati.

$$4\text{sen}^2 x - 1 = 0$$

$$(2\text{sen}x + 1)(2\text{sen}x - 1) = 0$$

$$2\text{sen}x + 1 = 0 \rightarrow \text{sen}x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \cup x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

$$2\text{sen}x - 1 = 0 \rightarrow \text{sen}x = +\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \cup x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

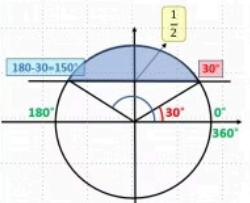
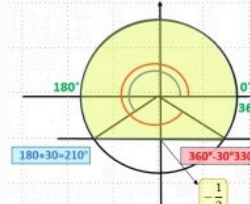
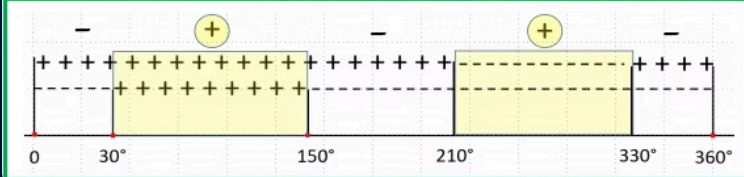
## Disequazioni Goniometriche

Le disequazioni goniometriche, come le equazioni, possono essere risolte mediante l'applicazione delle proprietà delle funzioni trigonometriche, delle loro inverse e lo studio grafico nella circonferenza goniometrica.

Risolvere la seguente disequazione goniometrica

$$\frac{2\text{sen}x - 1}{2\text{sen}x + 1} \geq 0$$

Nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$

<p>Bisogna studiare numeratore e denominatore separatamente. A lato lo studio del numeratore</p>	<p><b>Numeratore</b></p> $2\text{sen}x - 1 \geq 0 \rightarrow 2\text{sen}x \geq 1 \rightarrow \text{sen}x \geq \frac{1}{2}$  <p><math>30^\circ \leq x \leq 150^\circ</math></p>
<p>Studio del denominatore</p>	<p><b>Denominatore</b></p> $2\text{sen}x + 1 > 0 \rightarrow 2\text{sen}x > -1 \rightarrow \text{sen}x > -\frac{1}{2}$  <p><math>0^\circ \leq x &lt; 210^\circ</math> <math>330^\circ &lt; x \leq 360^\circ</math></p>
<p>Come si vede dal grafico qua sotto, la disequazione è verificata dagli intervalli a destra</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math display="block">30 \leq x \leq 150^\circ</math> <math display="block">210 &lt; x &lt; 330^\circ</math> </div>
	

# Trigonometria: Applicazione ai Triangoli Rettangoli

## 1 Seno

Il seno di un angolo in un triangolo rettangolo è il rapporto tra il cateto opposto e l'ipotenusa.

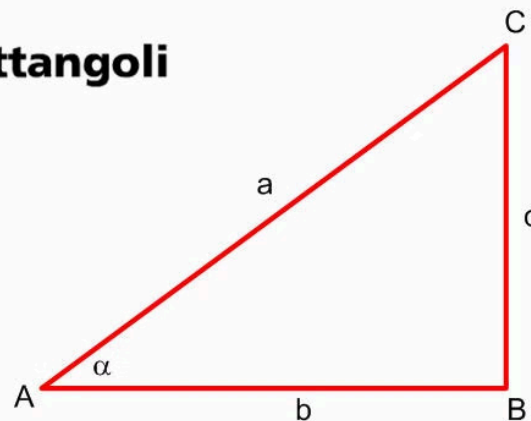
## 2 Coseno

Il coseno di un angolo in un triangolo rettangolo è il rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa.

## 3 Tangente

La tangente di un angolo in un triangolo rettangolo è il rapporto tra il cateto opposto e il cateto adiacente.

### Teoremi sui triangoli rettangoli



$$c = a \cdot \sin \alpha$$

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo acuto opposto al cateto.

---

$$b = a \cdot \cos \alpha$$

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto.

---

$$c = b \cdot \tan \alpha$$

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'altro cateto per la tangente dell'angolo acuto opposto al primo cateto.