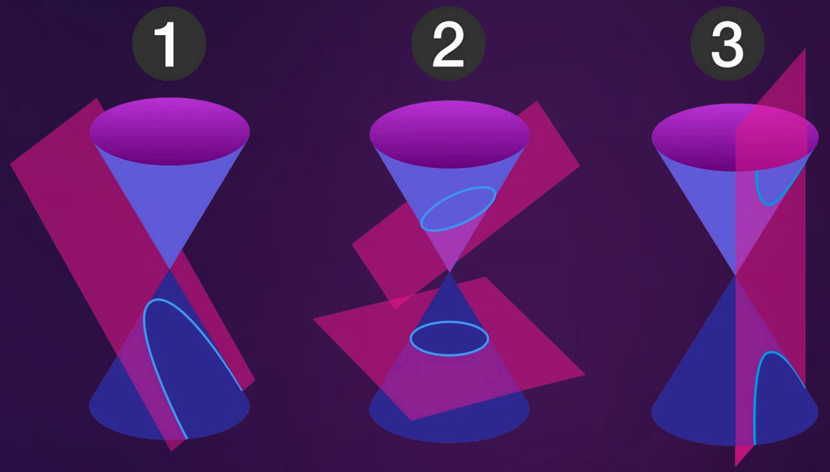
GEOMETRIA ANALITICA: LE CONICHE

Le coniche sono curve piane che possono essere rappresentate mediante equazioni di secondo grado in due variabili.

Esse comprendono la parabola, la circonferenza, l'ellisse e l'iperbole, ognuna con caratteristiche geometriche uniche e proprietà distintive.

Lo studio delle coniche è fondamentale nella geometria analitica e trova numerose applicazioni in campi come l'astronomia, l'ottica e l'ingegneria. Comprendere le equazioni e le proprietà di queste curve è essenziale per risolvere problemi geometrici e analitici di livello avanzato.



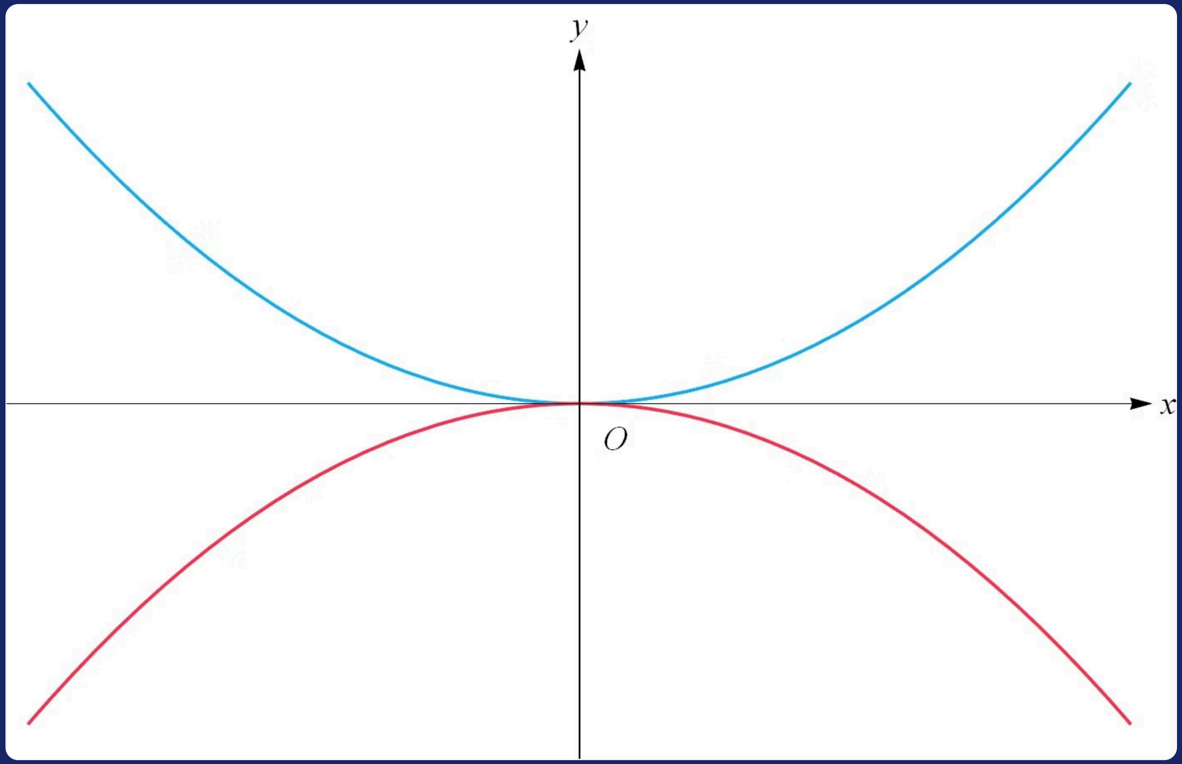
La parabola

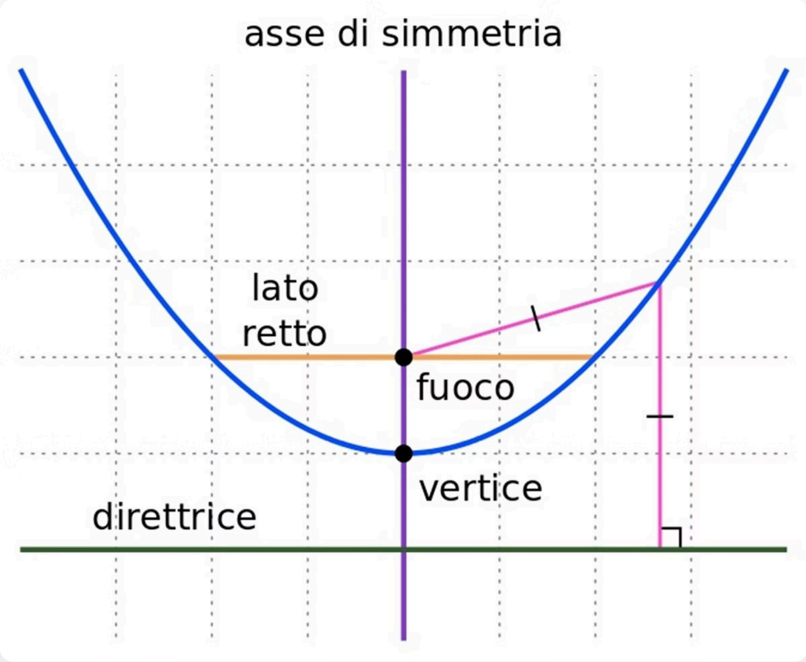
Equazione generale

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

con a, b, c costanti reali. Il segno di "a" determina orientamento e apertura (concavità).

Concavità (positiva e negativa)





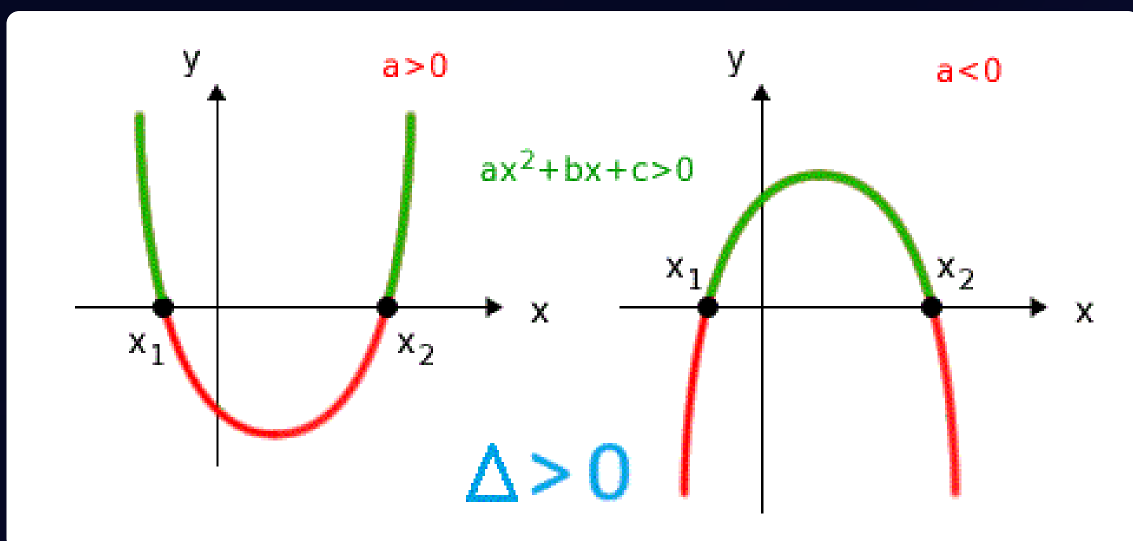
Disequazioni di 2° grado: Discussione grafica

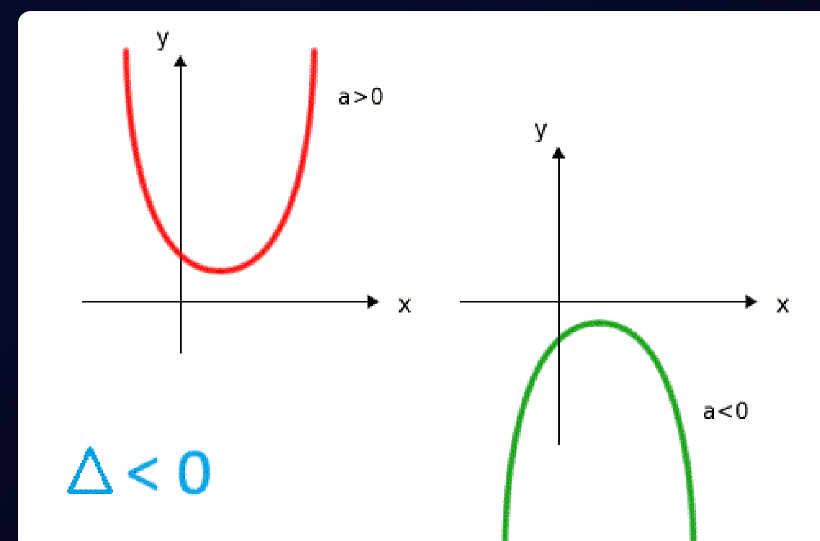
Per comprendere meglio le disequazioni di secondo grado, possiamo analizzare la discussione grafica delle stesse.

Se il polinomio ammette radici reali, laddove il grafico della parabola si trova sopra l'asse x, la funzione sarà positiva, mentre sarà negativa viceversa, ammettendo quindi soluzioni interne o esterne alle radici.

Se $\Delta < 0$, la funzione non ha radici reali, perciò la parabola si trova al di sopra ($a > 0$) o al di sotto ($a < 0$) dell'asse delle ascisse. In questo caso, la disequazione corrispondente può avere come soluzione tutto l'insieme **R** ($\forall x \in \mathbb{R}$) o nessuna soluzione ($\nexists x \in \mathbb{R}$).

Se infine $\Delta = 0$, il polinomio è in realtà un quadrato di binomio (o tutt'al più di un monomio) e la parabola è tangente l'asse delle ascisse in corrispondenza dell' unica radice (doppia) del polinomio.





Proprietà della parabola

La parabola è una curva simmetrica rispetto all'asse che passa per il suo vertice, chiamato asse di simmetria. Tutti i punti equidistanti dal vertice giacciono sulla stessa retta parallela all'asse di simmetria.

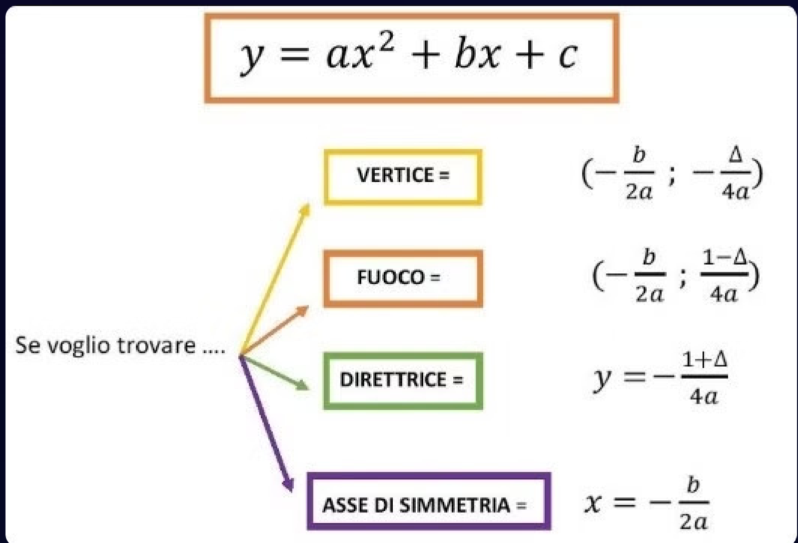
Oltre al vertice, altri punti notevoli di una parabola sono i fuochi, i punti di intersezione con gli assi cartesiani e i punti di tangenza con rette perpendicolari all'asse di simmetria.

Le proprietà della parabola trovano numerose applicazioni, come nei riflettori parabolici, nelle antenne paraboliche e nei calcoli ballistici. La forma parabolica è anche caratteristica di molti fenomeni naturali, come il percorso di una palla lanciata o la forma di una superficie d'acqua.

Fuoco e proprietà focale della parabola

Definizione del fuoco

Il fuoco di una parabola è un punto particolare situato sull'asse di simmetria della curva. Esso gode di una proprietà fondamentale: tutti i raggi luminosi che incidono perpendicolarmente sulla parabola vengono riflessi passando per il fuoco.



Distanza focale

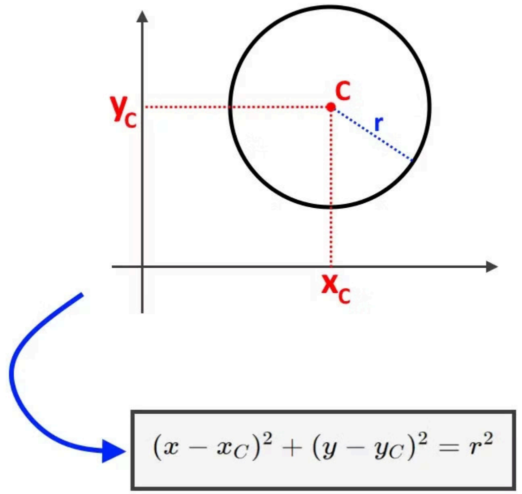
La distanza tra il vertice e il fuoco di una parabola è detta distanza focale. Essa determina l'apertura e la concavità della curva. Una distanza focale minore implica una parabola più aperta, mentre una distanza maggiore corrisponde a una parabola più stretta.

Proprietà focale

Grazie alla proprietà di riflessione, il fuoco svolge un ruolo cruciale nell'ottica e nelle applicazioni tecnologiche che sfruttano la forma parabolica, come telescopi, riflettori e antenne.

Concentrazione di energia

Il fuoco di una parabola è un punto di particolare importanza fisica, in quanto rappresenta il luogo in cui l'energia di un fascio di raggi incidenti parallelamente all'asse viene concentrata. Questa proprietà di concentrazione dell'energia permette di sfruttare le parabole in numerose applicazioni, come i riflettori parabolici per la produzione di luce intensa, i forni solari e i radiotelescopi per l'astronomia.



La circonferenza

Equazione generale in forma esplicita

FORMA ESPLICITA

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Equazione generale in forma implicita

FORMA IMPLICITA

$$x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Circonferenza con centro nell'origine degli assi (forma canonica)

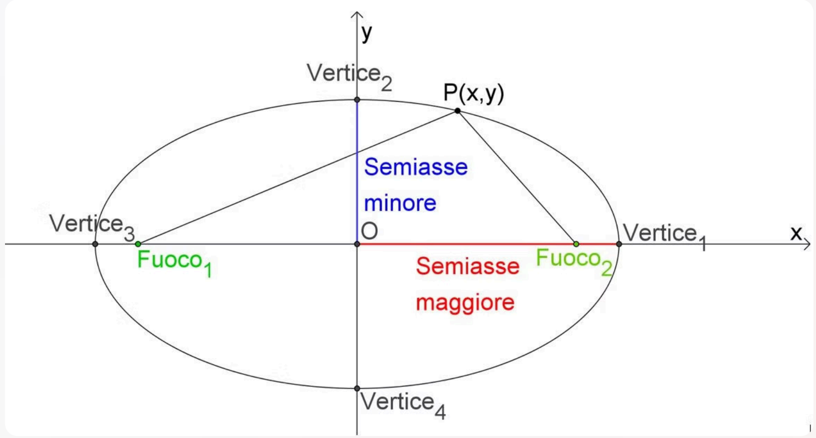
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Da forma esplicita a forma implicita

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Svolgendo i quadrati

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$



L'ellisse

Definizione

L'ellisse è una curva chiusa, di forma ovale, definita come l'insieme dei punti del piano il cui luogo geometrico rispetta la somma costante delle distanze dai fuochi.

Applicazioni

L'ellisse trova molteplici applicazioni in campi come l'astronomia, l'ottica, l'architettura e l'ingegneria.

Equazione generale

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

dove a e b sono i semiassi orizzontale e verticale, rispettivamente, mentre x0 e y0 sono le coordinate del centro.

Nel caso di ellisse centrata nell'origine (forma canonica), l'equazione si riduce a:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

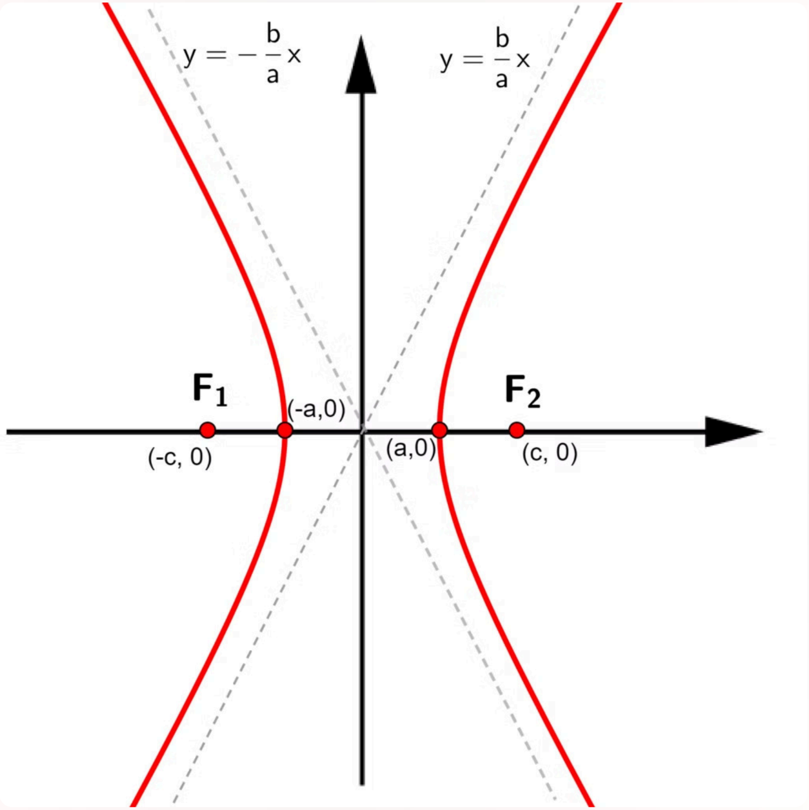
L'iperbole

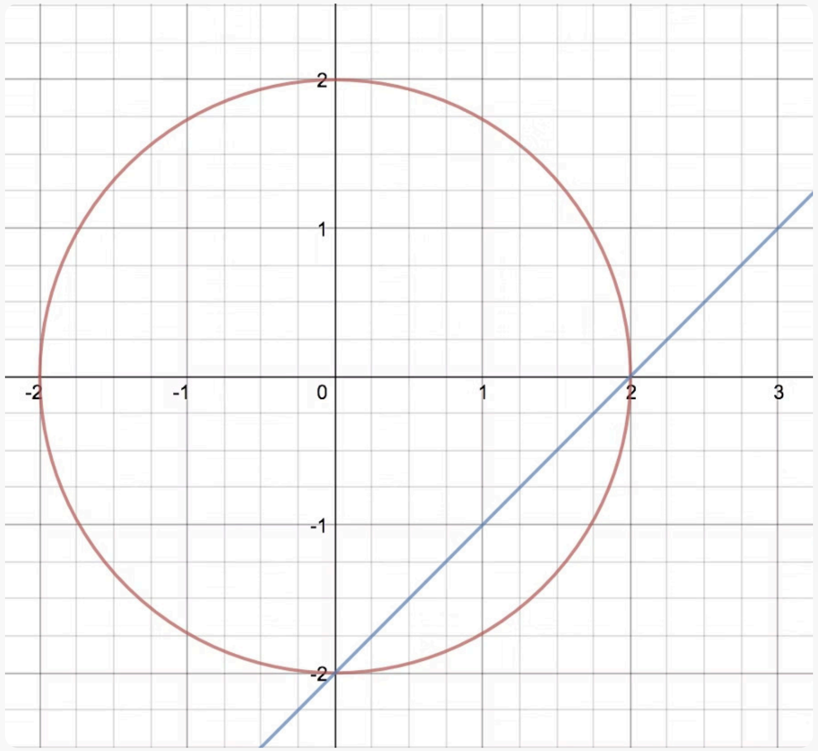
L'iperbole è una curva aperta, definita come l'insieme dei punti del piano il cui luogo geometrico rispetta la differenza costante delle distanze dai fuochi. L'equazione generale dell'iperbole centrata nell'origine e riferita agli assi cartesiani (forma canonica) è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Una caratteristica fondamentale dell'iperbole sono i suoi asintoti, ovvero rette che si avvicinano sempre più alla curva senza mai incontrarla. Gli asintoti dividono il piano in quattro regioni, ciascuna delle quali contiene un ramo dell'iperbole.

L'iperbole presenta proprietà focali analoghe a quelle della parabola e dell'ellisse, trovando applicazioni in campi come l'ottica, l'astronomia e l'ingegneria. La sua forma aperta la rende particolarmente adatta per rappresentare fenomeni e relazioni di tipo iperbolico.





Calcolo dei punti di intersezione tra le curve

1

Identificare le curve

Il primo passo per determinare i punti di intersezione tra curve coniche è identificare le equazioni delle curve in questione.

2

Mettere le equazioni a sistema

Successivamente, si deve impostare un sistema di equazioni in due incognite, le cui (eventuali) soluzioni saranno le coordinate dei punti di intersezione.

3

Risolvere il sistema

Infine, si risolve il sistema di equazioni con il metodo di sostituzione o con il metodo di confronto.

Questo procedimento può richiedere la risoluzione di equazioni di secondo grado. In alcuni casi, è possibile che non esistano punti di intersezione reali tra le curve o che ne esista solo uno (condizione di tangenza).