Il probabilismo

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2024-25

Credenze e probabilità

- Esprimere i gradi di credenza mediante numeri reali compresi tra 0 e 1, di per sé, non ci dice molto su come questi gradi di credenza debbano essere effettivamente calcolati.
- Il *probabilismo* è la tesi secondo cui i gradi di credenza debbano obbedire alle leggi della probabilità.

Gli assiomi della probabilità

Fissiamo un agente A e un istante t.

- *Assioma di non-negatività*. Per ogni enunciato H, $C_{A,t}(H) \geq 0$.
- *Assioma di normalizzazione*. Se H è una tautologia, $C_{A,t}(H) = 1$.
- *Assioma di additività finita*. Se H_1 e H_2 sono enunciati relativi a eventi incompatibili, $C_{A,t}(H_1 \vee H_2) = C_{A,t}(H_1) + C_{A,t}(H_2)$.

Da qui in avanti, quando l'agente A e l'istante t sono fissati contestualmente, scriveremo $C(H)$ invece di $C_{A,t}(H)$.

Commento agli assiomi

- *Assioma di non-negatività*. Appare ovvio. Nessun grado di credenza può scendere al di sotto di quello posseduto da enunciati che rigettiamo completamente.
- *Assioma di normalizzazione*. Anche questo appare ragionevole. E le tautologie complicate? Ricordiamo che stiamo descrivendo il comportamento di credenza di agenti razionali idealizzati. Inoltre, questo assioma ci consente di usare il calcolo delle probabilità con tutto il suo potere di semplificazione.
- *Assioma di additività finita*. E' estremamente importante perché collega i gradi di credenza gli uni agli altri e ci dà una regola matematica esatta per il loro calcolo.

Tre argomenti per il probabilismo

1. L'argomento della scommessa olandese
2. L'argomento dell'accuratezza
3. L'argomento delle preferenze

Frank Plumpton Ramsey (1903-1930)

La scommessa olandese (1)

- Una *scommessa olandese* è una serie di scommesse nelle quali lo scommettitore perde denaro qualsiasi cosa accada. Ramsey dimostra che ogni agente i cui gradi di credenza violano gli assiomi della probabilità è suscettibile di subire una scommessa olandese.
- Definiamo il *prezzo di scommessa* su H $(PS(H))$ come la massima somma che un agente A è disposto a pagare per fare una scommessa su un enunciato H nella quale l'allibratore paga 100 Euro se H è vero e 0 Euro se H è falso (oppure come la minima somma che A, in qualità di allibratore, si aspetta di incassare per far partecipare un altro agente a una scommessa su un enunciato H nella quale lui stesso pagherà 100 Euro se H è vero e 0 Euro se H è falso).

La scommessa olandese (2)

Theorem (Teorema della scommessa olandese)

Sia $\mathcal{H}$ un insieme di enunciati. Se $\mathcal{P} = \{PS(H) : H \in \mathcal{H}\}$ viola gli assiomi della probabilità, allora esiste una scommessa olandese che consiste di scommesse sugli enunciati in $\mathcal{H}$ ai prezzi stabiliti in $\mathcal{P}$.

Assiomi della probabilità e prezzi di scommessa

- *Assioma di non-negatività*. Per ogni enunciato H, $PS(H) \geq 0$ Euro.
- *Assioma di normalizzazione*. Se H è una tautologia, $PS(H) = 100$ Euro.
- *Assioma di additività finita*. Se H_1 e H_2 sono enunciati relativi a eventi incompatibili, $PS(H_1 \vee H_2) = PS(H_1) + PS(H_2)$.

Violazione degli assiomi e perdite finanziarie (1)

- *Assioma di non-negatività*. Supponiamo che un agente A abbia un grado di credenza in H per cui $PS\,(H) < 0$ Euro. Allora vuol dire che A è disposto a *pagare* un altro agente B per consentirgli di partecipare a una scommessa in cui A non incasserà niente in caso di vittoria, mentre dovrà pagare altro denaro a B in caso di sconfitta. Comunque vadano le cose, A perderà denaro.
- *Assioma di normalizzazione*. Supponiamo che H sia una tautologia e che A abbia un grado di credenza in H per cui $PS\,(H) > 100$ Euro. Allora sarà disposto a pagare più di 100 Euro per partecipare a una scommessa sicuramente vinta, ma che gli frutterà solo 100 Euro (perdita finanziaria certa). Se invece $PS\,(H) < 100$ Euro, allora A è disposto a incassare meno di 100 Euro per far partecipare un altro agente a una scommessa su H nella quale lui pagherà 100 Euro se H è vero e 0 Euro se H è falso. Poiché H è sicuramente vero, si ha di nuovo una perdita finanziaria certa.

Violazione degli assiomi e perdite finanziarie (2)

Assioma di additività finita. Supponiamo che un agente A abbia un grado di credenza in $H_1, H_2, H_1 \vee H_2$ per cui $PS\left(H_1\right) = PS\left(H_2\right) = 40$ Euro, ma $PS\left(H_1 \vee H_2\right) = 60$ Euro. Costruiamo allora una scommessa olandese su $H_1, H_2, H_1 \vee H_2$ che consiste di tre scommesse.

1. La *prima scommessa* è una scommessa su H_1 che frutta 100 Euro se H_1 è vero e 0 Euro se H_1 è falso. Per ipotesi, A sarà disposto a pagare 40 Euro per parteciparvi.
2. La *seconda scommessa* è una scommessa su H_2 che frutta 100 Euro se H_1 è vero e 0 Euro se H_1 è falso. Per ipotesi, A sarà disposto a pagare 40 Euro per parteciparvi.
3. Nella *terza scommessa*, l'allibratore offre ad A 60 Euro per partecipare a una scommessa su $H_1 \vee H_2$ che frutta 100 Euro se $H_1 \vee H_2$ è vero e 0 Euro se $H_1 \vee H_2$ è falso. Per ipotesi, A accetterà l'offerta.

Violazione degli assiomi e perdite finanziarie (3)

	$H_1, \neg H_2$	$\neg H_1, H_2$	$\neg H_1, \neg H_2$
Prima scommessa	$+60$	-40	-40
Seconda scommessa	-40	$+60$	-40
Terza scommessa	-40	-40	$+60$
Totale	-20	-20	-20

L'argomento della scommessa olandese

Fissiamo un agente A.

- P1 I gradi di credenza di A sono adeguatamente rispecchiati dai suoi prezzi di scommessa.
- P2 Se i prezzi di scommessa di A violano gli assiomi della probabilità, A incorre volontariamente in una perdita finanziaria certa.
- P3 Se A incorre volontariamente in una perdita finanziaria certa, allora A è irrazionale.
- C Se i gradi di credenza di A violano gli assiomi della probabilità, allora A è irrazionale.

Obiezione a P1

- L'*utilità* di un evento espresso da H per agente A è una proprietà psicologica che indica quanto A è felice se H si verifica. Si può ragionevolmente sostenere che il comportamento di scommessa di un agente è il risultato dell'interazione tra i suoi gradi di credenza e le sue utilità. Queste ultime, però, non sono proporzionali al denaro.
- Supponiamo che Marco sia a Milano ma voglia tornare a Cagliari per incontrare Alice, di cui sente enormemente la mancanza. Il biglietto per Cagliari costa 100 Euro, ma Marco ne ha solo 60. Un allibratore chiede 60 Euro a Marco per partecipare a una scommessa che frutta 100 Euro se e solo se lanciando una moneta (non truccata) esce testa. Per Marco può essere razionale accettare anche se la probabilità che esca testa è solo del 50%, e quindi il prezzo di scommessa viola le leggi della probabilità.

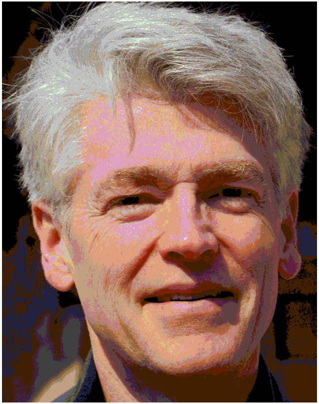
Risposta all'obiezione

Si può riformulare l'argomento della scommessa olandese sostituendo le utilità alle somme in denaro. E' un approccio scivoloso, perché non è chiaro come le utilità possono essere misurate.
Più ragionevole è sostenere che l'argomento della scommessa olandese si applica solo agli agenti *semplici*, le cui utilità sono proporzionali al denaro.

Obiezione a P3

- Si può sostenere che l'agente non probabilistico A può beneficiare di opportunità che l'agente probabilistico B si perde.
- Supponiamo che un miliardario eccentrico doni un milione di Euro a chi violerà le regole della probabilità in una qualche scommessa. Allora A non dovrà fare altro che cercare un allibratore che gli offra una scommessa olandese, pagargli i suoi 20 Euro, e poi passare all'incasso dal suddetto milardario. Perché chiamare A irrazionale?
- In letteratura, tuttavia, ci sono varianti dell'argomento della scommessa olandese *de-pragmatizzate*, ovvero basate unicamente su criteri epistemici (credenza, verità o evidenza).

James M. Joyce (n. 1958)



L'argomento dell'accuratezza (1)

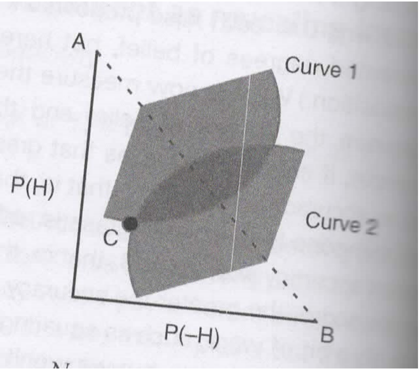
- L'*accuratezza* della credenza in un enunciato H (da parte di un agente A) è la distanza tra il grado di credenza di A in H e il valore di verità di H.
- Ad esempio, se $H=$"L'erba è verde" e $C(H) = 0.9$, allora l'accuratezza della credenza in H è 0.1; se $H=$"L'erba è rossa" e $C(H) = 0.3$, allora l'accuratezza della credenza in H è 0.3. Più alto è il numero, minore è l'accuratezza.
- Un insieme di credenze $\mathcal{H}$ *domina* un insieme di credenze $\mathcal{K}$ se in qualsiasi circostanza $\mathcal{H}$ è più accurato di $\mathcal{K}$.

Theorem (Teorema di accuratezza)

Ogni insieme di credenze i cui gradi violano gli assiomi della probabilità è dominato da un insieme che non le viola.

Quindi, agenti i cui gradi di credenze violano gli assiomi della probabilità sono irrazionali.

L'argomento dell'accuratezza (2)



Obiezione

- Fitelson e Easwaran sostengono che può essere razionale avere delle credenze dominate: il paradosso della lotteria ce ne fornisce un esempio.
- Dunque, se abbiamo evidenza indipendente del fatto che i nostri gradi di credenza sono appropriati, non abbiamo ragione di cambiare le nostre credenze con altre che le dominano.

John von Neumann (1903-1957)

Gli assiomi delle preferenze

Von Neumann e Morgenstern (1944) assiomatizzano le preferenze di un agente razionale A nel modo seguente:

- *Assioma di completezza*. Date le opzioni a e b, o A preferisce a a b, oppure preferisce b ad a, oppure a e b gli sono indifferenti.
- *Assioma di transitività*. Se A preferisce a a b, e preferisce b a c, allora preferisce a a c.
- *Assioma di continuità*. Se A preferisce a a b, e preferisce b a c, allora esiste un gioco d'azzardo che coinvolge a e c tale che per A è indifferente scegliere tra l'opzione b e accettare di giocare tale gioco d'azzardo.
- *Assioma di indipendenza*. La scelta di A tra due opzioni non dev'essere influenzata da un esito indipendente dalla scelta (es. se A preferisce andare al cinema piuttosto che alla partita di calcio quando queste sono le sole opzioni, deve preferire il cinema alla partita anche quando vi è l'ulteriore opzione di andare al bowling).

L'argomento delle preferenze

Fissiamo un agente *A*.

- P1 Se *A* è razionale, le sue preferenze soddisfano gli assiomi di von Neumann-Morgenstern.
- P2 *Teorema di rappresentazione*: se le preferenze di *A* soddisfano tali assiomi, possono essere rappresentate come il risultato di gradi di credenza che soddisfano gli assiomi della probabilità.
- P3 Se le preferenze di *A* possono essere rappresentate come il risultato di gradi di credenza che soddisfano gli assiomi della probabilità, allora gli *effettivi* gradi di credenza di *A* soddisfano gli assiomi della probabilità.
- C Se Se *A* è razionale, allora gli effettivi gradi di credenza di *A* soddisfano gli assiomi della probabilità.

Il paradosso di Allais

A	B
2500 con probabilità 0,33	2400 con certezza
2400 con probabilità 0,66	
0 con probabilità 0,01	

C	D
2500 con probabilità 0,33	2400 con probabilità 0,34
0 con probabilità 0,67	0 con probabilità 0,66

Alan Hajek (n. 1958)

L'obiezione del voodoo

Hajek (2008) attacca la premessa P3 nell'argomento delle preferenze.

> *Supponiamo che io rappresenti le tue preferenze con il voodooismo. La mia teoria voodoo dice che dentro di te ci sono spiriti voodoo in guerra tra loro. Quando preferisci A a B, ci sono dentro di te più spiriti voodoo che favoriscono A rispetto a quelli che favoriscono B. Tutti gli assiomi di von Neumann si possono interpretare in termini voodoo. Transitività: se hai più A-spiriti che B-spiriti, e più B-spiriti che C-spiriti, allora hai più A-spiriti che C-spiriti. E così via... A questo punto "dimostro" il voodooismo: se le tue preferenze obbediscono agli assiomi di von Neumann, esiste una rappresentazione voodoo di esse, ossia agisci come se dentro di te ci fossero spiriti voodoo in guerra tra loro. Conclusione: non sei razionale se non hai dentro di te spiriti voodoo in guerra. Come risultato non è un granché.*