

ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA

La geometria analitica è una branca della matematica che studia la geometria utilizzando il sistema di coordinate cartesiane.

Questo ci permette di descrivere la posizione di un punto nello spazio tramite coordinate numeriche, aprendo la strada a una comprensione più profonda e a un'analisi più rigorosa di linee, curve, superfici e altri oggetti geometrici.

Coordinate Cartesianhe di un Punto

In un sistema di coordinate cartesiane, la posizione di un punto è definita da due numeri, chiamati coordinate. La coordinata orizzontale è chiamata ascissa e viene indicata con la lettera x , mentre la coordinata verticale è chiamata ordinata ed è indicata con la lettera y . Insieme, le coordinate (x,y) identificano in maniera univoca un punto nello spazio bidimensionale.

Condizione di appartenenza di un punto ad una curva

Per determinare se un punto si trova su una curva, è necessario verificare se le sue coordinate soddisfano l'equazione della curva. Se le coordinate del punto sostituite nell'equazione restituiscono una uguaglianza valida, allora il punto appartiene alla curva. Se invece l'uguaglianza non è soddisfatta, il punto non appartiene alla curva.

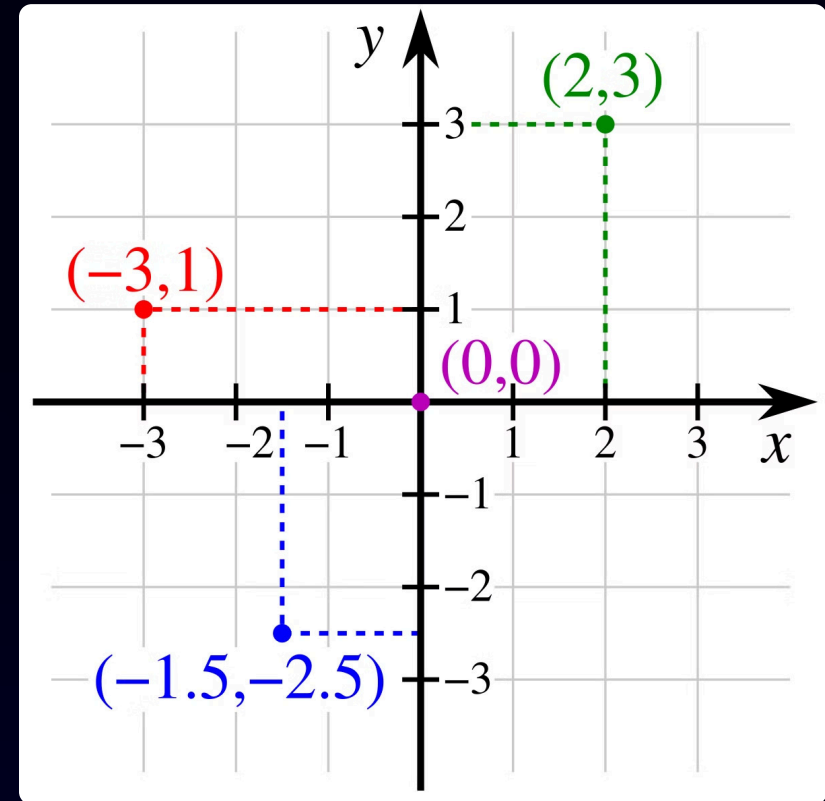
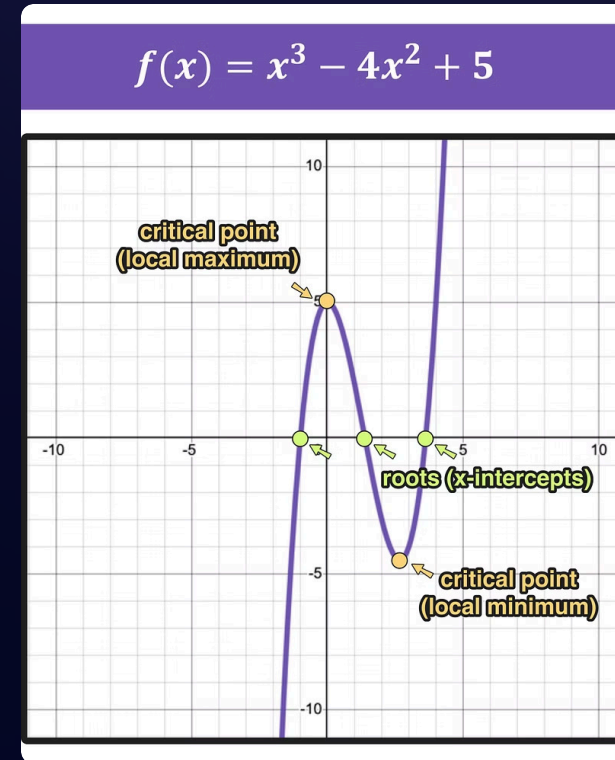


Grafico di una Funzione



Definizione

Il grafico di una funzione è l'insieme di tutti i punti nel piano cartesiano che soddisfano l'equazione della funzione. In altre parole, il grafico rappresenta visivamente l'andamento di una funzione matematica.



Tracciamento per Punti

Per tracciare il grafico di una funzione, si possono calcolare e rappresentare graficamente una serie di coppie di coordinate (x,y) che soddisfano l'equazione della funzione. Collegando questi punti si ottiene la rappresentazione visiva dell'andamento della funzione.

Distanza tra Due Punti e Punto Medio di un segmento

Definizione

La distanza tra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) nel piano cartesiano è data dalla formula:

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto Medio

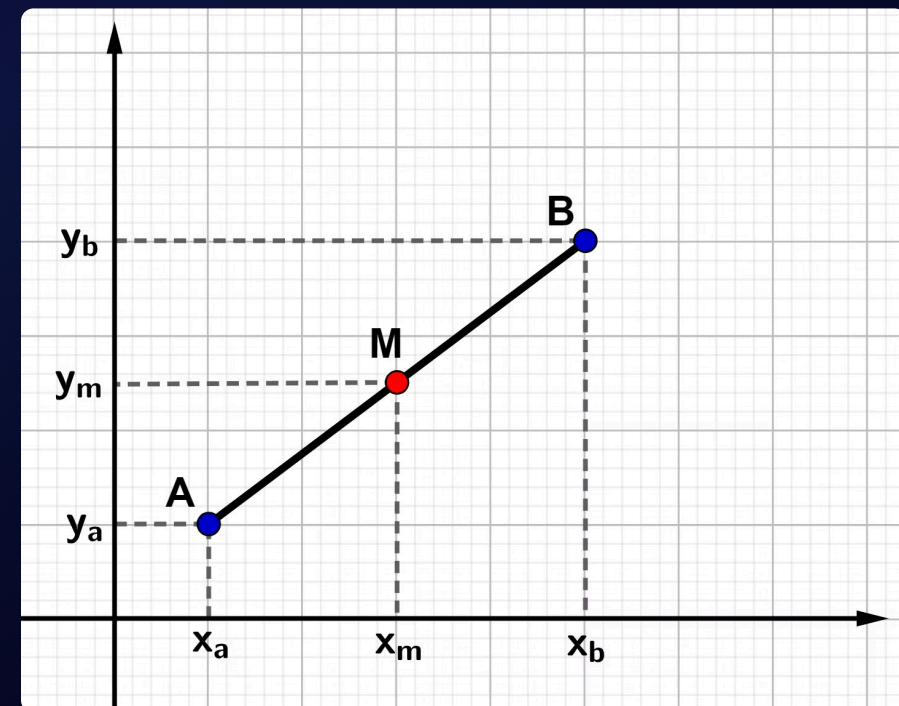
Le coordinate del punto medio $M (x_M, y_M)$ di un segmento si ottengono facendo la media aritmetica delle coordinate degli estremi del segmento stesso:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Esempio

Siano i punti $A(-5,3)$ e $B(4,3)$. La distanza tra A e B è:

$$D = \sqrt{(4 - (-5))^2 + (3 - 3)^2}$$
$$D = 9$$



La Retta

Definizione

Una retta è un insieme di punti allineati nello spazio. In geometria analitica, una retta è rappresentata da un'equazione lineare nel piano cartesiano.

Equazione

L'equazione generale di una retta nel piano cartesiano è $y = mx + q$, dove m è il coefficiente angolare e q è l'intercetta sull'asse y .

Parametri

Il coefficiente angolare m indica l'inclinazione della retta, mentre l'intercetta q determina il punto in cui la retta interseca l'asse y .

Coefficiente Angolare di una Retta

Definizione

Il coefficiente angolare di una retta, indicato con la lettera m , rappresenta la pendenza o inclinazione della retta rispetto all'orizzontale.

Interpretazione Geometrica

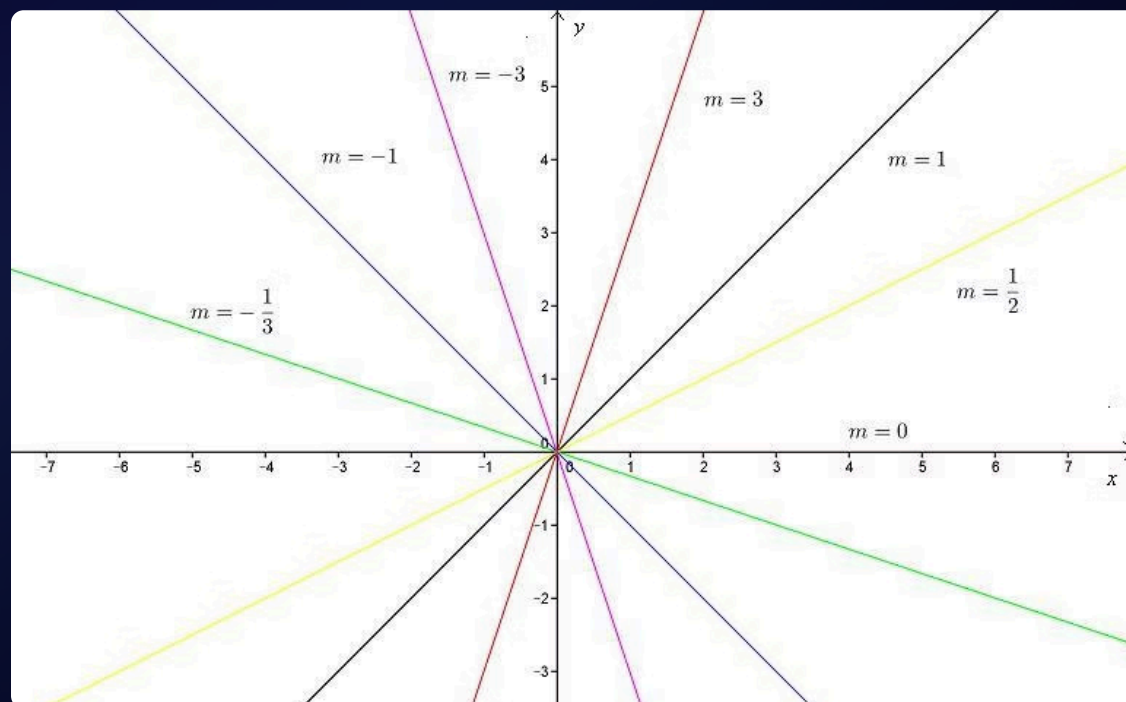
Un coefficiente angolare positivo indica una retta con inclinazione crescente da sinistra a destra, mentre un coefficiente negativo indica una retta con inclinazione decrescente.

Inoltre, quando il coefficiente angolare vale zero, esso rappresenta una retta orizzontale, mentre un coefficiente angolare infinito rappresenta una retta verticale.

Calcolo

Il coefficiente angolare di una retta passante per i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è dato dalla formula a destra.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Equazione Generale di una Retta

Equazione Generale

L'equazione generale di una retta nel piano cartesiano è:

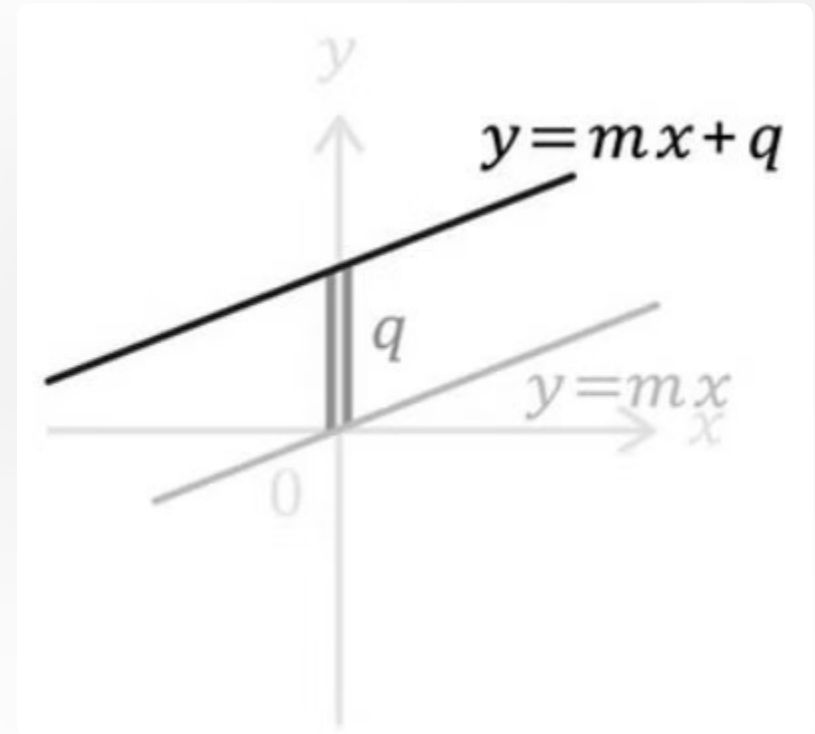
$$y = mx + q$$

Coefficiente Angolare (m)

Il coefficiente angolare m rappresenta l'inclinazione della retta.

Intercetta (q)

L'intercetta q indica il punto in cui la retta interseca l'asse y .



Equazione in forma esplicita ed implicita

Forma esplicita

$$y = mx + q$$

Forma implicita

$$ax + by + c = 0$$

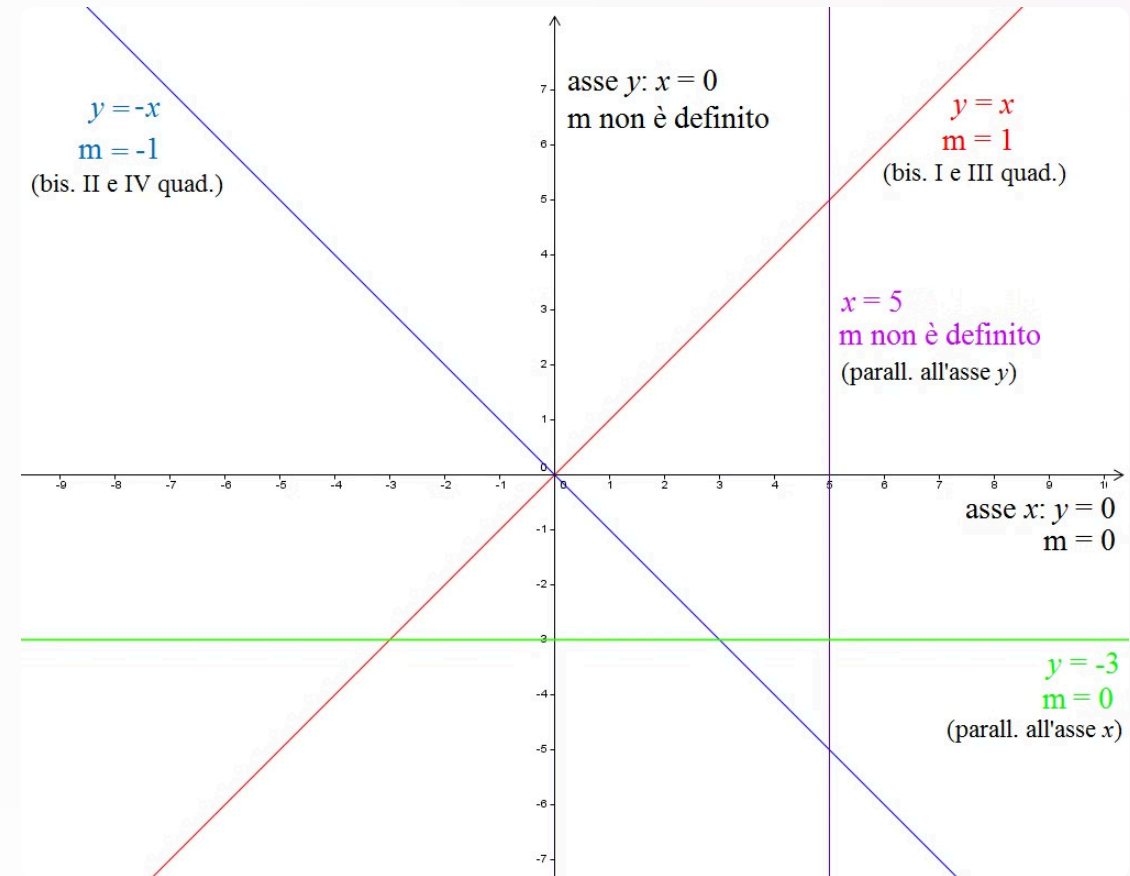
Rette orizzontali e verticali

Equazione generica di una retta orizzontale

$$y = k$$

Equazione generica di una retta verticale

$$x = k$$



Parallelismo e Perpendicolarità



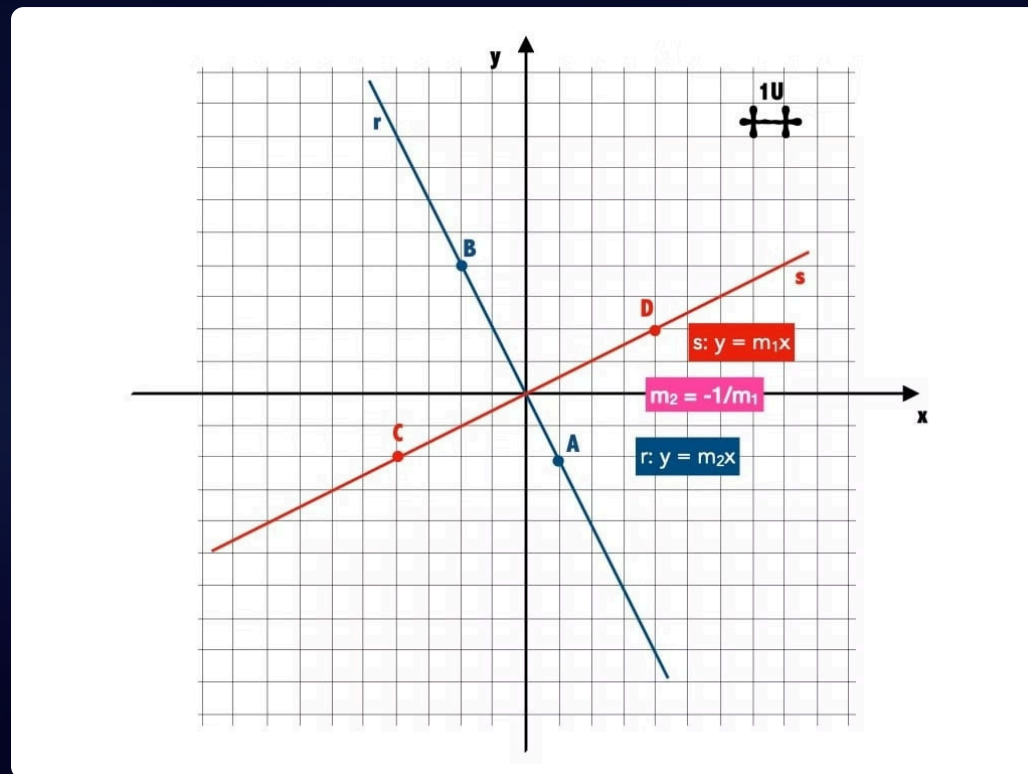
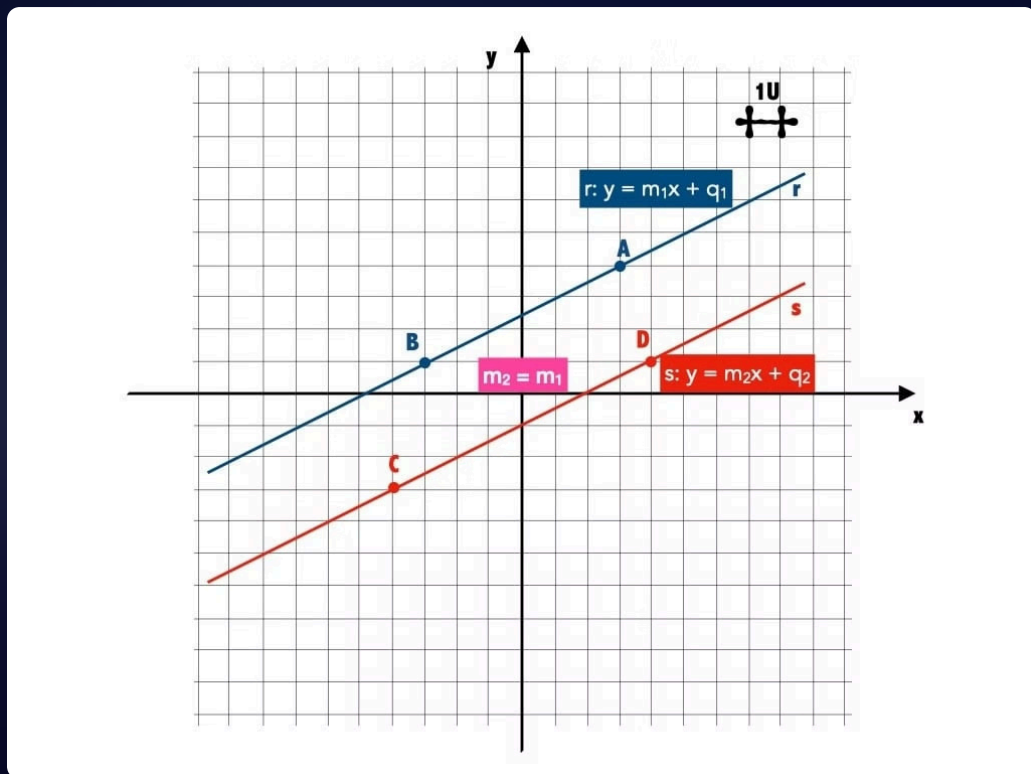
Parallelismo

Due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare m .



Perpendicolarità

Due rette sono perpendicolari se il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1 .



Retta Passante per Due Punti

1

Punto 1

Sia il primo punto dato (x_1, y_1)

2

Punto 2

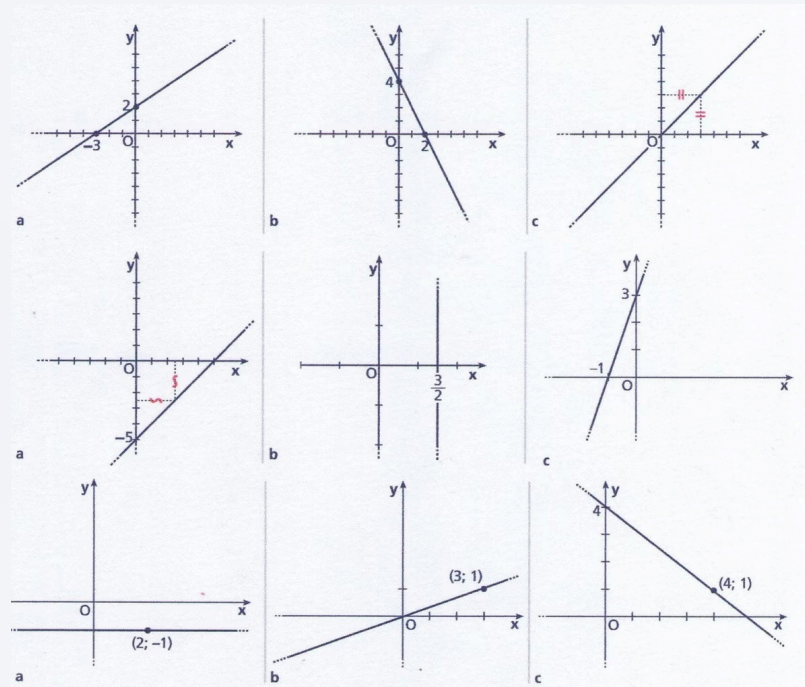
Sia il secondo punto dato (x_2, y_2)

3

Equazione

L'equazione della retta passante per i due punti è:

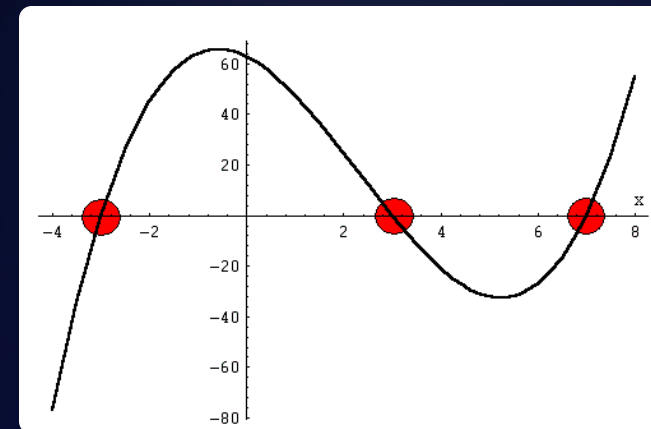
$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$



Equazioni e disequazioni: significato grafico

Equazioni

Se imponiamo la condizione $y=0$, otteniamo un'equazione del tipo $f(x) = 0$, le cui soluzioni rappresentano le radici (o zeri) della funzione stessa. Queste radici x_1, x_2, \dots, x_n rappresentano l'ascissa dei punti in cui la curva interseca l'asse delle ascisse. Perciò, graficamente, risolvere un'equazione significa trovare le coordinate dei punti di intersezione di una curva, punti nei quali la funzione si annulla.



Disequazioni

Il risultato di una disequazione è tipicamente un'insieme di valori appartenente ad un certo intervallo interno al dominio.

Graficamente, a questo intervallo corrisponde una regione di spazio delimitato dalla funzione stessa.

- $f(x) > 0$: Intervallo dell'asse delle x nel quale la funzione risulta positiva ($y > 0$)
- $f(x) < 0$: Intervallo dell'asse delle x nel quale la funzione risulta negativa ($y < 0$)
- $y > f(x)$: regione del piano sopra la curva di equazione $y = f(x)$
- $y < f(x)$: regione del piano sotto la curva di equazione $y = f(x)$

